

VORLESUNGSSKRIPT LINEARE ALGEBRA

WINTERSEMESTER 2023 - SOMMERSEMESTER 2024

Roland Herzog*

2024-06-18

*Interdisciplinary Center for Scientific Computing, Heidelberg University, 69120 Heidelberg, Germany
(roland.herzog@iwr.uni-heidelberg.de, <https://scoop.iwr.uni-heidelberg.de/team/rherzog>).

Dieses Skript orientiert sich an früheren Vorlesungen von Jan Johannes und Alexander Schmidt (Universität Heidelberg).

Änderungen gegenüber bereits veröffentlichten Versionen werden **in dieser Farbe** gekennzeichnet.

Material für 29 Vorlesungen (Lineare Algebra I). Material für 28 Vorlesungen (Lineare Algebra II).

Kommentare und Korrekturen bitte an roland.herzog@iwr.uni-heidelberg.de.

Inhaltsverzeichnis

1. Mathematische Grundlagen	7
§ 1 Aussagenlogik	7
§ 2 Prädikatenlogik	14
§ 3 Beweismuster	16
§ 4 Mengenlehre	19
§ 5 Relationen	25
§ 5.1 Ordnungsrelationen	28
§ 5.2 Äquivalenzrelation	30
§ 6 Abbildungen	34
§ 6.1 Injektivität und Surjektivität	37
§ 6.2 Umkehrabbildung	40
§ 6.3 Mächtigkeit von Mengen	42
§ 6.4 Familien und Folgen	44
§ 6.5 Das Auswahlaxiom	45
2. Algebraische Strukturen	47
§ 7 Halbgruppen und Gruppen	47
§ 7.1 Halbgruppen	48
§ 7.2 Gruppen	52
§ 7.3 Die symmetrische Gruppe	54
§ 7.4 Untergruppen	59
§ 7.5 Untergruppen induzieren Äquivalenzrelationen	63
§ 8 Homomorphismen von Halbgruppen und Gruppen	65
§ 8.1 Normalteiler	70
§ 8.2 Der Homomorphiesatz für Gruppen	74
§ 9 Ringe	75
§ 10 Körper	82
§ 11 Polynome	87
§ 11.1 Polynomdivision	92
§ 11.2 Polynomfunktionen	94
3. Vektorräume	99

§ 12	Vektorräume	99
§ 13	Basis und Dimension	108
§ 14	Summen von Unterräumen	120
§ 14.1	Summen von zwei Unterräumen	120
§ 14.2	Summen von Familien von Unterräumen	125
4.	Matrizen und lineare Abbildungen	127
§ 15	Matrizen	127
§ 15.1	Matrix-Matrix-Multiplikation	130
§ 15.2	Zeilen- und Spaltenraum	133
§ 15.3	Zeilenstufenform	136
§ 15.4	Transposition von Matrizen	140
§ 15.5	Der Ring quadratischer Matrizen	142
§ 15.6	Invertierbare Matrizen	145
§ 16	Lineare Gleichungssysteme	149
§ 17	Homomorphismen von Vektorräumen	159
§ 17.1	Konstruktion linearer Abbildungen	163
§ 17.2	Die Matrix-Vektor-Multiplikation als lineare Abbildung	168
§ 17.3	Der Vektorraum der Vektorraumhomomorphismen	168
§ 17.4	Faktorräume	170
§ 17.5	Der Homomorphiesatz für Vektorräume	173
§ 18	Dimensionssätze	175
§ 18.1	Zusammenhang von Dimension und Isomorphie	175
§ 18.2	Dimension von Faktorräumen	176
§ 18.3	Dimensionen im Homomorphiesatz	178
§ 19	Matrizen zur Darstellung linearer Abbildungen	180
§ 19.1	Die Koordinatendarstellung eines endlich-dimensionalen Vektorraumes	180
§ 19.2	Darstellung linearer Abbildungen durch Matrizen	181
§ 19.3	Eigenschaften linearer Abbildungen und ihrer Darstellungsmatrizen	186
§ 19.4	Darstellungsmatrizen von Endomorphismen	190
§ 20	Basiswechsel und Normalformen von Darstellungsmatrizen	191
§ 20.1	Transformation der Darstellungsmatrizen von Homomorphismen	195
§ 20.2	Transformation der Darstellungsmatrizen von Endomorphismen	199
§ 21	Dualräume und adjungierte Homomorphismen	207
§ 21.1	Der Dualraum eines Vektorraumes	208
§ 21.2	Darstellung von Linearformen	213
§ 21.3	Annihilatoren	216

§ 21.4	Duale Homomorphismen	220
§ 21.5	Darstellungsmatrizen dualer Homomorphismen	225
§ 21.6	Die vier fundamentalen Unterräume zu einer linearen Abbildung	227
§ 21.7	Zusammenspiel zwischen Dualräumen und Faktorräumen	230
§ 21.8	Der Bidualraum	232
§ 22	Tensorprodukte und multilineare Abbildungen	234
§ 22.1	Bilineare Abbildungen	234
§ 22.2	Multilineare Abbildungen	244
§ 22.3	Tensoren über einem Vektorraum	246
§ 22.4	Symmetrische und schiefsymmetrische Tensoren	250
§ 23	Determinanten	254
§ 23.1	Die Determinante einer Matrix	258
§ 23.2	Die Determinante eines Endomorphismus	269
§ 23.3	Orientierung eines Vektorraumes	270
5.	Normalformen von Endomorphismen	273
§ 24	Grundlagen zu Eigenwerten und Eigenvektoren	273
§ 24.1	Berechnung von Eigenvektoren zu gegebenem Eigenwert	275
§ 24.2	Berechnung von Eigenwerten, charakteristisches Polynom	280
§ 24.3	Charakteristisches Polynom eines Endomorphismus	284
§ 25	Algebren über Körpern	289
§ 26	Der Satz von Cayley-Hamilton	296
§ 27	Ideale in Ringen	300
§ 28	Das Minimalpolynom	303
§ 28.1	Bestimmung des Minimalpolynoms	305
§ 28.2	Weitere Eigenschaften des Minimalpolynoms	306
§ 28.3	Die Begleitmatrix eines Polynoms	312
§ 29	Die Frobenius-Normalform	314
§ 30	Die Jordan-Normalform	324
6.	Innenprodukte	333
§ 31	Bilinearformen	333
§ 32	Quadratische Formen	338
A.	Die komplexen Zahlen	339
B.	Liste algebraischer Strukturen	341
C.	Transformationen und Normalformen	347

D. Exkurs: Lie-Algebren	349
E. Das griechische Alphabet	351
F. Abkürzungen	353

Kapitel 1 Mathematische Grundlagen

Die **Algebra** (von arabisch الجبر, *al-ğabr*, „das Zusammenfügen gebrochener Teile“, englisch: **algebra**) hat ihren Ursprung in der Beschreibung von Lösungsverfahren linearer und quadratischer Gleichungen. Heute versteht den Begriff **Algebra** deutlich weiter, es geht jedoch immer um Strukturen, Abbildungen zwischen Strukturen und die in ihnen geltenden „Rechen“regeln. Speziell die **lineare Algebra** (englisch: **linear algebra**) befasst sich mit „linearen Strukturen“, das sind vor allem Vektorräume, Abbildungen zwischen Vektorräumen und lineare Gleichungssysteme.

Wie andere Wissenschaften auch hat die Mathematik eine eigene Sprache, die man erlernen muss, um die Gegenstände dieser Wissenschaft zu verstehen und sich sachgerecht ausdrücken und argumentieren zu können. Das Herz der Mathematik bilden Beweise. Jede Aussage, jeder Lehrsatz muss bewiesen werden, d. h., durch logische Verknüpfungen aus den verwendeten Grundaxiomen und bereits bewiesenen Aussagen hergeleitet werden.

Eine streng formale, axiomatische Einführung der Logik und logischer Schlussweisen ist im Rahmen dieser Lehrveranstaltung leider nicht möglich. Diese kann später bei Interesse in weiterführenden Veranstaltungen zur Logik nachgeholt werden. Wir beschränken uns hier auf eine „naive“ (nicht-axiomatische) Einführung in die Logik.

§ 1 AUSSAGENLOGIK

Literatur: Deiser, 2022b, Kapitel 1.1, Magnus u. a., 2023, Kapitel 1–14

Definition 1.1 (Aussage, Wahrheitswert).

Eine **Aussage** (englisch: **statement**) ist ein Satz (einer Sprache), dem eindeutig entweder der **Wahrheitswert wahr** (kurz: **W** oder \top , englisch: **true**, **T**) oder der **Wahrheitswert falsch** (kurz: **F** oder \perp , englisch: **false**, **F**) zugeordnet werden kann. \triangle

Der Satz kann dabei der gewöhnlichen Sprache oder der mathematischen Sprache entstammen. Wir bezeichnen Aussagen in der Regel mit Großbuchstaben wie *A*, *B* usw.

Beispiel 1.2 (Aussagen und Nicht-Aussagen).

- (i) *A*: 9 ist durch 3 teilbar.
Dieses ist eine wahre Aussage.
- (ii) *B*: Am 17.10.2023 ist London die Hauptstadt von Frankreich.
Dieses ist eine falsche Aussage.
- (iii) *C*: München ist 781 km von Hamburg entfernt.
Dieses ist keine Aussage, da der Satz zuviel Interpretationsspielraum lässt. Was ist mit „München“ und „Hamburg“ gemeint? Mit welcher Toleranz ist die Entfernungsangabe zu verstehen?

- (iv) *D*: Das Team des VfL Wolfsburg ist in der Saison 2023/24 deutscher Meister in der Frauen-Fußball-Bundesliga.
Dieses ist eine Aussage, deren Wahrheitswert wir im Moment aber nicht kennen.
- (v) *E*: Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge.
Dieses ist ebenfalls eine Aussage, deren Wahrheitswert wir zur Zeit nicht kennen.¹ Δ

Ein grundlegendes Prinzip in der Mathematik ist es, aus bekannten Objekten durch Verknüpfung neue Objekte zu schaffen. In der Logik heißen diese Verknüpfungen **Junktoren** (englisch: **logical operators**, **junction**, lateinisch: **iungere**: verbinden, verknüpfen). Ein Junktor erschafft also aus einer oder aus mehreren Aussagen eine neue Aussage. Der Wahrheitswert der neuen Aussage ergibt sich aus den Wahrheitswerten der miteinander verknüpften Aussagen. Wir definieren einen Junktor über seine **Wahrheitstabelle** (auch: **Wahrheitstafel**, englisch: **truth table**).

Definition 1.3 (Junktoren).

Im Folgenden seien A und B Aussagen. Wir definieren folgende wichtige ein- und zweistellige Junktoren.

- (i) **Negation** (**Verneinung**, englisch: **negation**) \neg

Die Operation $\neg A$ (sprich: „nicht A “) heißt **Negation**. $\neg A$ ist wahr, wenn A falsch ist, und falsch, wenn A wahr ist.

A	$\neg A$
W	F
F	W

- (ii) **Konjunktion**² (**Und-Verknüpfung**, englisch: **conjunction**) \wedge

Die Aussage $A \wedge B$ (sprich: „ A und B “) ist dann wahr, wenn A und B beide wahr sind, ansonsten falsch.

A	B	$A \wedge B$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	F

¹siehe **Primzahlzwillingsvermutung**

²lateinisch: **coniungere**: verbinden

(iii) **Disjunktion³ (Oder-Verknüpfung**, englisch: **disjunction**) \vee

Die Aussage $A \vee B$ (sprich: „A oder B“) ist wahr, wenn mindestens eine der Aussagen A und B wahr ist, ansonsten falsch. Das „Oder“ ist also in einem nicht-ausschließenden Sinne gemeint.

A	B	$A \vee B$
W	W	W
W	F	W
F	W	W
F	F	F

(iv) **Implikation⁴ (Konditional⁵, Wenn-Dann-Verknüpfung**, englisch: **implication**) \rightarrow

Die Aussage $A \rightarrow B$ ist über die nebenstehende Wahrheitstabelle definiert. Man benennt die Aussage auch als „A ist **hinreichend** für B“ (englisch: „A is sufficient for B“), „B ist **notwendig** für A“ (englisch: „B is necessary for A“), „A impliziert B“ (englisch: „A implies B“) oder „Wenn A, dann B“ (englisch: „If A, then B“). In einer Implikation $A \rightarrow B$ nennt man A auch das **Antezedens** (englisch: **antecedent**, lateinisch: **antecedens**: das Vorausgehende) und B das **Konsequens** (englisch: **consequent**, lateinisch: **consequentis**: folgerichtig).

A	B	$A \rightarrow B$
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W

Die Implikation behauptet keinerlei kausalen oder sonstigen inhaltlichen Zusammenhang zwischen den Aussagen A und B . Man spricht auch von **materialer Implikation** (englisch: **material implication**). Die häufig anzutreffende Sprechweise „Wenn A, dann B“ ist daher problematisch, weil wir diese intuitiv als Kausalität oder zeitliche Nähe interpretieren.

(v) **Äquivalenz⁶ (Bikonditional, Genau-Dann-Wenn-Verkn.,** englisch: **equivalence**) \leftrightarrow

Die Aussage $A \leftrightarrow B$ ist wahr, wenn entweder A und B beide wahr oder beide falsch sind, ansonsten falsch. Man benennt die Aussage auch als „A ist **notwendig und hinreichend** für B“ (englisch: „A is necessary and sufficient for B“), „A ist äquivalent zu B“ (englisch: „A is equivalent to B“), „A genau dann, wenn B“ oder „A dann und nur dann, wenn B“ (englisch: „A if and only if B“, „A iff B“).

A	B	$A \leftrightarrow B$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	W

Auch hier gilt, dass die Äquivalenz nichts über einen eventuellen kausalen oder sonstigen inhaltlichen Zusammenhang zwischen den Aussagen A und B aussagt. Man spricht auch von **materialer Äquivalenz** (englisch: **material equivalence**). △

Quizfrage 1.1: Wieviele verschiedene einstellige Junktoren gibt es? Wieviele zweistellige?

Quizfrage 1.2: Können Sie alle zweistelligen Junktoren aus den oben genannten, also aus \neg sowie \wedge , \vee , \rightarrow und \leftrightarrow , zusammensetzen? Reicht evtl. sogar eine Teilmenge davon aus?

Beispiel 1.4 (Symbolisierung von Sätzen der Umgangssprache⁷).

Die Symbolisierung von Sätzen der Umgangssprache in logische Aussagen ist nicht immer ganz einfach. Es folgen einige Beispiele jeweils mit einer oder mehreren gleichwertigen Symbolisierungen.

³lateinisch: **disiungere**: trennen, unterscheiden

⁴lateinisch: **implicare**: verwickeln

⁵lateinisch: **conditio**: Bedingung

⁶lateinisch: **aequivalens**: gleichwertig

⁷angelehnt an Beispiele aus **Magnus u. a., 2023**, Kapitel 5, genutzt unter der **Lizenz CC-BY 4.0**

- (i) Zum Burger servieren wir Pommes **oder** Salat.
Das „oder“ ist hier im ausschließenden Sinne gemeint.

P : Zum Burger servieren wir Pommes.

S : Zum Burger servieren wir Salat.

- $(P \vee S) \wedge \neg(P \wedge S)$
- $(P \wedge \neg S) \vee (S \wedge \neg P)$

- (ii) **Obwohl** Barbara energisch ist, ist sie nicht sportlich.

E : Barbara ist energisch.

S : Barbara ist sportlich.

- $E \wedge \neg S$

- (iii) Du wirst keine Suppe bekommen, **aber** dafür den Salat.

S_1 : Du wirst Suppe bekommen.

S_2 : Du wirst Salat bekommen.

- $\neg S_1 \wedge S_2$

- (iv) Du wirst Dich erkälten, **es sei denn**, Du trägst eine Jacke.

J : Du trägst eine Jacke.

E : Du wirst Dich erkälten.

- $\neg J \rightarrow E$
- $J \vee E$

An den Beispielen sieht man, dass unter der formalen Symbolisierung Nuancen der Sprache zugunsten der Präzision verloren gehen. △

Lemma 1.5 (Umschreibung von \rightarrow und \leftrightarrow).

Es seien A und B Aussagen.

- (i) Die Aussagen

- $A \rightarrow B$
- $\neg A \vee B$
- $\neg B \rightarrow \neg A$

haben dieselben Wahrheitstafeln.

- (ii) Die Aussagen

- $A \leftrightarrow B$
- $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

haben dieselben Wahrheitstafeln.

Beweis. Wir stellen die Wahrheitstafeln für die drei Aussagen in **Aussage (i)** auf:

A	B	$A \rightarrow B$	$(\neg A) \vee B$	$\neg B$	$\neg A$	$(\neg B) \rightarrow (\neg A)$
W	W	W	W	F	F	W
W	F	F	F	W	F	F
F	W	W	W	F	W	W
F	F	W	W	W	W	W

Der Beweis der Aussage (ii) ist Teil von Hausaufgabe I-1.3. □

Da die Verknüpfung von Aussagen stets wieder auf Aussagen führt, können wir durch wiederholte Verknüpfung komplexe Aussagen aufbauen, wie etwa $(A \rightarrow D) \rightarrow ((B \vee C) \rightarrow (D \wedge C))$. Zur Vereinfachung der Notation vereinbaren wir folgende Bindungsregeln:

$$\neg \text{ bindet stärker als } \wedge \text{ bindet stärker als } \vee \text{ bindet stärker als } \rightarrow \text{ bindet stärker als } \leftrightarrow . \quad (1.1)$$

Diese Regeln erlauben uns, auf Klammern zu verzichten. Beispielsweise ist

$$\begin{aligned} &(\neg A) \wedge B \text{ dasselbe wie } \neg A \wedge B \\ \text{und } &(\neg(A \wedge B)) \rightarrow (B \vee \neg B) \text{ dasselbe wie } \neg(A \wedge B) \rightarrow B \vee \neg B. \end{aligned}$$

Es gilt jedoch, dass Klammern zur Verdeutlichung nicht schaden können. Statt (\cdot) können auch $[\cdot]$ oder $\{\cdot\}$ verwendet werden.

Wir berechnen jetzt die Wahrheitstabellen einiger zusammengesetzter Aussagen.

Beispiel 1.6 (Wahrheitstabellen zusammengesetzter Aussagen).

(i) $\neg(\neg A \wedge \neg B)$

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$	$\neg(\neg A \wedge \neg B)$
W	W	F	F	F	W
W	F	F	W	F	W
F	W	W	F	F	W
F	F	W	W	W	F

Diese Wahrheitstafel ist offenbar dieselbe wie die von $A \vee B$.

(ii) $A \vee B \rightarrow B \wedge C$

A	B	C	$A \vee B$	$B \wedge C$	$A \vee B \rightarrow B \wedge C$
W	W	W	W	W	W
W	W	F	W	F	F
W	F	W	W	F	F
W	F	F	W	F	F
F	W	W	W	W	W
F	W	F	W	F	F
F	F	W	F	F	W
F	F	F	F	F	W

(iii) $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

A	B	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A \vee \neg B$	$\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
W	W	F	F	W
W	F	W	W	W
F	W	W	W	W
F	F	W	W	W

△

Die letzte Aussage $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ hat also immer den Wahrheitswert W, unabhängig von den Wahrheitswerten der Aussagen A und B . Eine solche Aussage nennt man **Tautologie**⁸ (englisch: *tautology*) oder **logisches Gesetz**. Tautologien spielen eine entscheidende Rollen in mathematischen Beweisen, siehe § 3.

Definition 1.7 (logische Implikation, logische Äquivalenz).

Es seien A und B Aussagen.

- (i) Die Aussage B heißt eine **logische Implikation** (englisch: *logical implication*) der Aussage A , wenn $A \rightarrow B$ eine Tautologie ist. A heißt dann **Prämisse** (englisch: *premise*), und B heißt **Konklusion** (englisch: *conclusion*). Wir schreiben: $A \Rightarrow B$ und sagen: „ A impliziert B “ oder „ B folgt aus A “.
- (ii) Die Aussagen A und B heißen **logisch äquivalent (zueinander)** (englisch: *logically equivalent*), wenn $A \leftrightarrow B$ eine Tautologie ist. Wir schreiben: $A \Leftrightarrow B$ und sagen: „ A ist äquivalent zu B “ oder „ A und B sind (zueinander) äquivalent“. △

Beachte: Die logische Implikation und die logische Äquivalenz sind *Aussagen über Aussagen*. Sie sind von den Junktoren „Implikation“ (Konditional) und „Äquivalenz“ (Bikonditional) zu unterscheiden!

Wir vereinbaren, dass \Rightarrow und \Leftrightarrow noch schwächer binden als die Junktoren in (1.1).

Beispiel 1.8 (logische Implikationen und Äquivalenzen).

- (i) Die Aussage $(A \rightarrow B) \wedge A$ impliziert die Aussage B , kurz: $(A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$, denn $(A \rightarrow B) \wedge A \rightarrow B$ ist eine Tautologie:

A	B	$A \rightarrow B$	$(A \rightarrow B) \wedge A$	$(A \rightarrow B) \wedge A \rightarrow B$
W	W	W	W	W
W	F	F	F	W
F	W	W	F	W
F	F	W	F	W

- (ii) Die Aussagen $\neg(A \wedge B)$ und $\neg A \vee \neg B$ sind logisch äquivalent, kurz: $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$, denn $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ ist eine Tautologie, wie in **Beispiel 1.6** gerade schon gezeigt wurde. △

⁸altgriechisch: *ταυτο*: dasselbe

Satz 1.9 (logische Implikationen und Äquivalenzen).

 Es seien A, B und C Aussagen. Es gelten die folgenden Implikationen und Äquivalenzen.

$\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$	doppelte Verneinung ⁹	(1.2)
$A \Rightarrow \top$	„Aus Beliebigem folgt Wahres.“ ¹⁰	(1.3a)
$\perp \Rightarrow A$	„Aus Falschem folgt Beliebiges.“ ¹¹	(1.3b)
$A \wedge A \Leftrightarrow A$	Idempotenz ¹²	(1.4a)
$A \vee A \Leftrightarrow A$	Idempotenz	(1.4b)
$A \wedge \top \Leftrightarrow A$	Neutralität ¹³	(1.5a)
$A \vee \perp \Leftrightarrow A$	Neutralität	(1.5b)
$A \wedge \perp \Leftrightarrow \perp$	Absorption ¹⁴	(1.6a)
$A \vee \top \Leftrightarrow \top$	Absorption	(1.6b)
$A \wedge \neg A \Leftrightarrow \perp$	Komplementarität ¹⁵	(1.7a)
$A \vee \neg A \Leftrightarrow \top$	Komplementarität ¹⁶	(1.7b)
$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$	Kommutativität von \wedge ¹⁷	(1.8a)
$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$	Kommutativität von \vee	(1.8b)
$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$	Assoziativität von \vee ¹⁸	(1.9a)
$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$	Assoziativität von \wedge	(1.9b)
$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$	De Morgansches Gesetz ¹⁹	(1.10a)
$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$	De Morgansches Gesetz	(1.10b)
$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	Distributivität ²⁰	(1.11a)
$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	Distributivität	(1.11b)

Beweis. Der Beweis erfolgt durch Aufstellen der Wahrheitstabellen und wird hier nicht ausgeführt. \square

Ende der Vorlesung 1

⁹lateinisch: duplex negatio affirmat

¹⁰lateinisch: verum ex quolibet

¹¹lateinisch: ex falso quodlibet

¹²englisch: idempotence

¹³englisch: neutrality

¹⁴englisch: absorption

¹⁵englisch: complementarity

¹⁶Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten, lateinisch: tertium non datur

¹⁷englisch: commutativity, lateinisch: commutare: tauschen, vertauschen

¹⁸englisch: associativity, lateinisch: associare: verbinden, beigesellen

¹⁹englisch: De Morgan's law

²⁰englisch: distributivity, lateinisch: distribuere: verteilen, aufteilen

§ 2 PRÄDIKATENLOGIK

Literatur: Magnus u. a., 2023, Kapitel 22–39

Die Aussagenlogik reicht für die Bedürfnisse der Mathematik nicht aus. Beispielsweise lässt sich die Aussage „Wenn n eine gerade ganze Zahl ist, dann ist auch n^2 eine gerade ganze Zahl.“ innerhalb der Aussagenlogik nicht wie erforderlich symbolisieren. Die Schwierigkeit ist, dass wir in der Aussagenlogik keine Aussagen mit Variablen zur Verfügung haben. Wir benötigen dazu die **Prädikatenlogik**²¹, eine Erweiterung der Aussagenlogik. In der Prädikatenlogik ist es möglich, eine Aussage von dem Gegenstand, über den sie gemacht wird, zu trennen. Neben den schon bekannten Junktoren verwendet die Prädikatenlogik

- **Aussageformen** (englisch: *statement*) oder **Prädikate** (englisch: *predicate*), das sind sprachliche Gebilde mit Variablen (Leerstellen), die nach Einsetzen der Variablen in Aussagen übergehen.

Beispiele:

$$A(x) : x \text{ wohnt in Aachen.}$$

$$Z(x) : x \text{ ist eine gerade ganze Zahl.}$$

$$G(x, y) : x \text{ ist mindestens so groß wie } y.$$

Die Anzahl der Variablen einer Aussageform heißt deren **Stelligkeit** (englisch: *arity*).

- **Quantoren** (englisch: *quantifier*), und zwar
 - ∎ für alle (**Allquantor**, englisch: *universal quantifier*),
 - ∃ es existiert (mindestens) ein (**Existenzquantor**, englisch: *existential quantifier*),
 - ∃! es existiert genau ein (**Eindeutigkeitsquantor**, englisch: *uniqueness quantifier*).

Zu jedem Quantor geben wir den **Grundbereich** (auch: **Individuenbereich**, **Diskursuniversum**, **Domäne**, englisch: *universe of discourse*, *domain of discourse*) an. In der Regel nimmt man an, dass der Grundbereich nicht leer ist, um gewisse Komplikationen auszuschließen. Der Grundbereich ist wichtig und beeinflusst den Wahrheitswert einer quantorisierten Aussage:

$$\forall x \in \mathbb{N} (x \geq 0) \quad \text{„Alle natürlichen Zahlen sind nichtnegativ.“} \quad (\text{wahre Aussage})$$

$$\forall x \in \mathbb{R} (x \geq 0) \quad \text{„Alle reellen Zahlen sind nichtnegativ.“} \quad (\text{falsche Aussage})$$

Beispiel 2.1 (Symbolisierung von Sätzen der Umgangssprache mit Quantoren).

Wir betrachten die Aussageformen

$$E(x) : x \text{ hat 100 000 oder mehr Einwohner}$$

$$S(x) : x \text{ ist eine Stadt}$$

mit dem Grundbereich $O :=$ „Menge aller Orte in Deutschland“. Dann können wir die folgenden Aussagen wie angegeben symbolisieren:

Es gibt mindestens eine Stadt in Deutschland, die 100 000 oder mehr Einwohner hat.

$$\exists x \in O (E(x) \wedge S(x))$$

²¹genauer: Prädikatenlogik erster Stufe, englisch: *first order logic*

Es gibt genau einen Ort in Deutschland, der 100 000 oder mehr Einwohner hat, aber keine Stadt ist.

$$\exists! x \in O (E(x) \wedge \neg S(x))$$

Alle Städte in Deutschland haben 100 000 oder mehr Einwohner.

$$\forall x \in O (S(x) \rightarrow E(x))$$

Keine Stadt in Deutschland hat 100 000 oder mehr Einwohner.

$$\neg \exists x \in O (E(x) \wedge S(x))$$

 Δ

Man sagt, dass die Variable einer Aussageform durch ihren Quantor **gebunden** (englisch: **bound variable**) wird. Auf den Namen der Variablen kommt es dabei übrigens nicht an, es sind also $\exists x (E(x) \wedge S(x))$ und $\exists y (E(y) \wedge S(y))$ äquivalente Aussagen.

Besonders mehrstellige Aussageformen spielen in vielen mathematischen Aussagen eine große Rolle. Die Reihenfolge verschiedener Quantoren ist dabei wichtig! Unterscheide zum Beispiel (siehe Lehrveranstaltung *Analysis*)

Die Funktion $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig:

$$\forall x \in (a, b) \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in (a, b) \underbrace{(|x - y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)}_{\text{vierstellige Aussageform}}.$$

Die Funktion $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in (a, b) \forall y \in (a, b) (|x - y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Für Aussagen mit Quantoren gelten folgende Regeln (ohne Beweis).

Satz 2.2 (logische Implikationen und Äquivalenzen von Aussagen mit Quantoren).

Es seien A, B einstellige Aussageformen mit gemeinsamem Grundbereich und C eine zweistellige Aussageform. Es gelten die folgenden Implikationen und Äquivalenzen.²²

$$\neg(\forall x A(x)) \Leftrightarrow \exists x (\neg A(x)) \quad \text{Negation des Allquantors} \quad (2.1a)$$

$$\neg(\exists x A(x)) \Leftrightarrow \forall x (\neg A(x)) \quad \text{Negation des Existenzquantors} \quad (2.1b)$$

$$\forall x \forall y C(x, y) \Leftrightarrow \forall y \forall x C(x, y) \quad \text{Kommutativität gleicher Quantoren} \quad (2.2a)$$

$$\exists x \exists y C(x, y) \Leftrightarrow \exists y \exists x C(x, y) \quad \text{Kommutativität gleicher Quantoren} \quad (2.3a)$$

$$\forall x (A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge \forall x B(x) \quad \text{Distributivität} \quad (2.4a)$$

$$\exists x (A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x) \quad \text{Distributivität} \quad (2.4b)$$

$$(\forall x A(x)) \vee (\forall x B(x)) \Rightarrow \forall x (A(x) \vee B(x)) \quad (2.5a)$$

$$\exists x (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow (\exists x A(x)) \wedge (\exists x B(x)) \quad (2.5b)$$

$$\forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow (\forall x A(x)) \rightarrow (\forall x B(x)) \quad (2.6a)$$

²²Aus Gründen der Lesbarkeit lassen wir die Angabe des Grundbereichs bei den Quantoren hier weg.

$$\exists x (A(x) \rightarrow B(x)) \Leftrightarrow (\forall x A(x)) \rightarrow (\exists x B(x)) \quad (2.6b)$$

Auf <https://de.wikipedia.org/wiki/Prädikatenlogik#Quantoren> finden sich schöne Veranschaulichungen wahrer Aussagen mit zweistelligen Aussageformen und verschiedenen Quantoren.

§ 3 BEWEISMUSTER

Literatur: Deiser, 2022b, Kapitel 1.1, Magnus u. a., 2023, Kapitel 15–21

In einem Beweis versuchen wir in der Regel, für gegebene Aussagen A, B die Implikation $A \Rightarrow B$ nachzuweisen. Das heißt, wir müssen nachweisen, dass $A \rightarrow B$ eine Tautologie ist. Meistens besteht die Prämisse A selbst aus einer Konjunktion (Und-Verknüpfung) mehrerer einzelner Prämissen. Nicht alle Prämissen werden in der Formulierung eines mathematischen Satzes explizit genannt. Beispielsweise wird man die als wahr geltenden Grundannahmen (Axiome) über die reellen Zahlen nicht jedes Mal explizit erwähnen.

Ein Beweis wird oft in viele kleine Schritte zerlegt. Das Aufstellen einer Wahrheitstabelle ist nicht zielführend. Vielmehr werden wir Schlussregeln anwenden, die auf Tautologien beruhen. Solche Tautologien haben wir in Satz 1.9 und Satz 2.2 bereits aufgeführt. Dazu kommen die weiteren Tautologien

$$(A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B \quad \text{modus ponendo ponens,} \quad (3.1a)$$

$$(A \rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A \quad \text{modus tollendo tollens,} \quad (3.1b)$$

$$(A \rightarrow \neg B) \wedge A \Rightarrow \neg B \quad \text{modus ponendo tollens}^{23}, \quad (3.1c)$$

$$(\neg A \rightarrow B) \wedge \neg A \Rightarrow B \quad \text{modus tollendo ponens}^{24}, \quad (3.1d)$$

$$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow C) \quad \text{Kettenschluss (englisch: chain inference).} \quad (3.2)$$

Quizfrage 3.1: Können Sie einfache Beispiele in Alltagssprache für die Argumentation gemäß der vier Argumentationsmuster in (3.1a)–(3.1d) angeben?

Folgende Beweismuster für Implikationen $A \Rightarrow B$ werden häufig verwendet:

- (1) Beim **direkten Beweis** (englisch: **direct proof**) wird $A \Rightarrow B$, typischerweise unter Verwendung von Axiomen und bereits bewiesenen Sätzen, direkt mit Hilfe von Schlussregeln hergeleitet.
- (2) Beim **indirekten Beweis** oder **Beweis durch Kontraposition** (englisch: **indirect proof, proof by contrapositive**) nutzen wir die Äquivalenz $(A \rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ aus. Wir führen also einen direkten Beweis für $\neg B \Rightarrow \neg A$.
- (3) Beim **Widerspruchsbeweis** (englisch: **proof by contradiction**, lateinisch: **reductio ad absurdum**: Zurückführung auf das Sinnlose) nutzen wir die Äquivalenz $(A \rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B) \rightarrow \perp$ aus. Dazu nehmen wir die Aussage A als wahr und die Aussage B als falsch an und zeigen, dass dann \perp folgt.

²³Der modus ponendo tollens wird häufig als $\neg(A \wedge B) \wedge A \Rightarrow \neg B$ geschrieben.

²⁴Der modus tollendo ponens wird häufig als $(A \vee B) \wedge \neg A \Rightarrow B$ geschrieben.

- (4) Beim **Beweis durch Fallunterscheidung** (englisch: **proof by distinction of cases**) nutzen wir die Äquivalenz $(A \wedge C \rightarrow B) \wedge (A \wedge \neg C \rightarrow B) \Leftrightarrow A \rightarrow B$. Dabei ist C irgendeine weitere Aussage. Wir nehmen also zunächst die Aussagen A und C als wahr an und zeigen, dass dann auch die Aussage B wahr ist. Anschließend nehmen wir die Aussage A weiterhin als wahr aber die Aussage C als falsch an und zeigen, dass dann wiederum die Aussage B wahr ist.

Beispiel 3.1 (verschiedene Beweismuster).

(1) **direkter Beweis**

Behauptung: Für natürliche Zahlen m, n gelte $m^2 < n^2$, dann gilt auch $m < n$.

Wir symbolisieren die zugehörigen Aussagen über zweistellige Aussageformen:

$$A(m, n) : m^2 < n^2$$

$$B(m, n) : m < n$$

und verwenden als Grundbereich für beide Variablen in beiden Aussageformen die Menge $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ der natürlichen Zahlen. Wir wollen zeigen:

$$\forall m \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (A(m, n) \Rightarrow B(m, n)).$$

Es seien dazu $m, n \in \mathbb{N}$.

$m^2 < n^2$	nach Definition von A
$\Rightarrow 0 < n^2 - m^2$	nach Subtraktion von m^2
$\Rightarrow 0 < (n - m)(n + m)$	nach Rechenregeln in \mathbb{N}
$\Rightarrow 0 < n - m$	da $n + m > 0$ und nach Regeln von $<$ in \mathbb{N}
$\Rightarrow m < n$	nach Rechenregeln in \mathbb{N} .

Ab sofort werden wir solche Beweise als Fließtext schreiben, etwa wie folgt: „Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $m^2 < n^2$. Dann gilt auch $0 < n^2 - m^2 = (n - m)(n + m)$. Die Division durch die positive Zahl $n + m$ ergibt $0 < n - m$, also auch $m < n$, was zu zeigen war.“

Die konkrete Benennung der verwendeten Aussageformen A und B war für den Beweis auch nicht wesentlich, sodass wir im Folgenden darauf verzichten können.

(2) **Beweis durch Kontraposition**

Behauptung: Für natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn $4^n - 1$ eine Primzahl ist, dann ist notwendig n ungerade.

Kontraposition der Behauptung: Für natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn n gerade ist, dann ist $4^n - 1$ keine Primzahl.

Beweis: Es sei $n \in \mathbb{N}$ gerade, also gilt $n = 2k$ für eine Zahl $k \in \mathbb{N}$. Damit ist $4^n - 1 = 4^{2k} - 1 = (4^k - 1)(4^k + 1)$. Beide Faktoren sind > 1 , d. h., $4^n - 1$ ist keine Primzahl.

(3) **Widerspruchsbeweis**²⁵

Behauptung: Für alle reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sin x + \cos x \neq \frac{3}{2}$.

Beweis: Wir nehmen an, es gäbe eine Zahl $x_0 \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $\sin x_0 + \cos x_0 = \frac{3}{2}$. Durch Quadrieren folgt dann $(\sin x_0)^2 + (\cos x_0)^2 + 2(\sin x_0)(\cos x_0) = \frac{9}{4}$. Wegen $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$

²⁵Dieses Beispiel ist Thiele, 1979 entnommen.

und $2(\sin x)(\cos x) = \sin(2x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (insbesondere auch für x_0) folgt also $\sin(2x_0) = \frac{5}{4} > 1$. Jedoch nimmt die \sin -Funktion nur Werte zwischen -1 und 1 an.

Weitere klassische Aussagen, die typischerweise mit Widerspruchsbeweisen gezeigt werden, sind „Es gibt unendlich viele Primzahlen“ und „ $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl“.

(4) Beweis durch Fallunterscheidung

Behauptung: Für jede ganze Zahl $n \in \mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$ gilt: $n^2 + n$ ist gerade.

Beweis: Es sei $n \in \mathbb{Z}$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall 1: n ist ungerade.

In diesem Fall gilt also $n = 2k + 1$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Dann ist

$$n^2 + n = (2k + 1)^2 + 2k + 1 = 4k^2 + 4k + 1 + 2k + 1 = 4k^2 + 6k + 2,$$

also eine gerade Zahl.

Fall 2: n ist gerade.

In diesem Fall gilt also $n = 2k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Dann ist

$$n^2 + n = (2k)^2 + 2k = 4k^2 + 2k,$$

also wiederum eine gerade Zahl. △

Das Ende eines Beweises wird oft mit der Abkürzung **q.e.d.** (lateinisch: **quod erat demonstrandum**: was zu zeigen war, englisch: **what was to be proved**) oder mit dem Symbol \square markiert.

Andere Sätze sind nicht als Implikation formuliert, sondern in Form mehrerer äquivalenter Aussagen $A_1 \Leftrightarrow A_2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow A_n$. In diesem Fall verwenden wir häufig einen

- (5) **Beweis durch Ringschluss** (englisch: **closed chain inference**). Bei diesem zeigen wir nacheinander die Implikationen $A_1 \Rightarrow A_2, A_2 \Rightarrow A_3$ usw. bis $A_{n-1} \Rightarrow A_n$ und $A_n \Rightarrow A_1$, was dann wiederum die gewünschten Äquivalenzen zur Folge hat. Das erfordert n Beweisschritte. Wir können sogar allgemeiner solange verschiedene Implikationen $A_i \Rightarrow A_j$ zeigen, bis wir mittels Kettenschluss von jeder der beteiligten Aussagen zu jeder anderen Aussage gelangen können. Die Anzahl der zu zeigenden Implikationen beträgt aber mindestens n .

Quizfrage 3.2: Wieviele Implikationen wären zu zeigen, wenn man die Äquivalenz der Aussagen A_i und A_j für $i, j = 1, \dots, n$ mit $i \neq j$ paarweise zeigen würde?

Schließlich betrachten wir noch den

- (6) **Beweis durch vollständige Induktion** (englisch: **proof by induction**), der dann verwendet werden kann, wenn wir die Wahrheit einer Aussageform $A(n)$ für alle ganzen Zahlen $n \in \mathbb{Z}$ ab einem gewissen Startindex $n_0 \in \mathbb{Z}$ zeigen wollen, also für $n \geq n_0$. In diesem Fall zeigen wir am **Induktionsanfang** (englisch: **base case**) die Wahrheit der Aussage $A(n_0)$. Oft wird der Induktionsanfang bei $n_0 = 0$ oder $n_0 = 1$ gesetzt.

Im **Induktionsschritt** (englisch: **induction step**) wird $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ gezeigt. Dabei heißt $A(n)$ die **Induktionsannahme** oder **Induktionsvoraussetzung** (englisch: **induction hypothesis**). Bei Bedarf kann sogar auf alle vorgehenden Aussagen $A(n_0), \dots, A(n)$ zurückgegriffen werden, also $A(n_0) \wedge \dots \wedge A(n) \Rightarrow A(n + n_0)$ gezeigt werden.

Ein schönes Beispiel für einen fehlerhaft ausgeführten Induktionsbeweis ist das **Pferde-Paradoxon**, bei dem „bewiesen“ wird, dass alle Pferde dieselbe Farbe haben.

Beispiel 3.2 (vollständige Induktion).

Behauptung: Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen ist gleich $\frac{1}{2}n(n+1)$.

$$A(n) : \sum_{j=1}^n j = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Induktionsanfang bei $n_0 = 1$: $A(1)$ lautet: $\sum_{j=1}^1 j = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2$, was eine wahre Aussage ist. Wir zeigen nun im Induktionsschritt, dass $A(n)$ auch $A(n+1)$ impliziert:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n+1} j &= n+1 + \sum_{j=1}^n j && \text{wegen der Assoziativität der Addition} \\ &= n+1 + \frac{1}{2}n(n+1) && \text{nach Induktionsannahme, dass } A(n) \text{ wahr ist} \\ &= (n+1) \left[1 + \frac{1}{2}n \right] && \text{wegen des Distributivgesetzes für Addition und Multiplikation} \\ &= (n+1) \left[\frac{n+2}{2} \right] \\ &= \frac{1}{2}(n+1)(n+2), \end{aligned}$$

was $A(n+1)$ entspricht. △

Ende der Vorlesung 2

Ende der Woche 1

§ 4 MENGENLEHRE

Literatur: Deiser, 2022b, Kapitel 1.2, Jänich, 2008, Kapitel 1.1, Jänich, 2008, Kapitel 6

Georg Cantor, Begründer der Mengenlehre, hat 1895 folgenden Versuch der Definition einer Menge angegeben:

„Unter einer **Menge** verstehen wir jede Zusammenfassung X von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten x unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die **Elemente** von X genannt werden) zu einem Ganzen.“

Diese ursprüngliche Definition hat allerdings Schwächen, wie wir gleich noch sehen werden.

Wir bezeichnen Mengen oft mit Großbuchstaben. Ist X eine Menge (englisch: **set**) und x ein Element (englisch: **element**) von X , so notieren wir diese Beziehung als $x \in X$ (seltener auch $X \ni x$) und lesen „ x ist Element von X “ oder kurz „ x in X “ oder auch „ X enthält x “. Das Symbol $x \notin X$ (oder $X \not\ni x$) drückt aus, dass x *kein* Element von X ist.

Mengen sind vollständig durch ihre Elemente bestimmt. Zwei Mengen X und Y sind also genau dann **gleich** (englisch: **equality of sets**), wenn sie dieselben Elemente enthalten. In Symbolen:

$$X = Y \quad \text{ist definiert als die Wahrheit der Aussage} \quad \forall x \in X (x \in Y) \wedge \forall y \in Y (y \in X).$$

Mengen können beispielsweise durch Aufzählung ihrer Elemente in geschweiften Klammern $\{\}$ angegeben werden, etwa

$$X := \{2, 3, 5\}.$$

Da Mengen nur aus „wohlunterschiedenen“ Elementen bestehen und es auf die Reihenfolge nicht ankommt, könnten wir dieselbe Menge auch als

$$X := \{5, 2, 3, 2\}$$

beschreiben. Wichtige Mengen sind die **Zahlbereiche** (englisch: **number systems**)

$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$	Menge der natürlichen Zahlen ²⁶ ,
$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$	Menge der natürlichen Zahlen mit Null ,
$\mathbb{Z} := \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$	Menge der ganzen Zahlen ²⁷ ,
$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$	(vorläufige) Menge der rationalen Zahlen ²⁸ ,
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen ²⁹ ,
$\mathbb{C} := \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$	Menge der komplexen Zahlen ³⁰ ,

die hier nur informell definiert werden. Für die wirkliche Definition der rationalen Zahlen \mathbb{Q} verweisen wir auf das Ende von § 5. Elementare Eigenschaften der komplexen Zahlen \mathbb{C} werden in **Anhang A** besprochen.

Eine weitere Möglichkeit, Mengen anzugeben, besteht darin, Elemente anhand bestimmter Eigenschaften zu sammeln. Es sei dazu A eine Aussageform mit Grundbereich X , der eine Menge sein soll. Dann können wir

$$Y := \{x \in X \mid A(x)\} \tag{4.1}$$

betrachten, bestehend aus den Elementen von X , für die $A(x)$ eine wahre Aussage ist. Diese Konstruktion heißt **Mengenkomprehension** (englisch: **set comprehension**).

Hier erkennt man ein Problem der sehr freien Definition einer Menge nach Cantor. Sie lässt es zu, X als die Menge aller Mengen zu definieren. Wählen wir dann $A(x)$ als die Aussageform „enthält sich nicht selbst“, so definiert

$$R := \{x \in X \mid x \notin x\}$$

also die „Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten“. Stellen wir jetzt die Frage, ob R sich selbst enthält, so erkennen wir das Problem:

- Falls R sich selbst enthält ($R \in R$), dann liegt das daran, dass R die Komprehensionsbedingung $R \notin R$ erfüllt.
- Falls R sich nicht selbst enthält ($R \notin R$), dann erfüllt R die Komprehensionsbedingung $R \notin R$ nicht, also gilt $R \in R$.

²⁶englisch: **natural numbers**

²⁷englisch: **integer numbers**, lateinisch: **integer**: ganz, unversehrt

²⁸englisch: **rational numbers**, lateinisch: **ratio**: Verhältnis

²⁹englisch: **real numbers**

³⁰englisch: **complex numbers**

In Kurzform erhalten wir den Widerspruch $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$. Dieser Widerspruch ist als **Russell-Paradoxon** (englisch: *Russell's paradox*) oder **Russell-Antinomie** der „naiven“ Cantorsche Mengenlehre bekannt geworden, entdeckt 1901 von Russell und unabhängig etwa zeitgleich von Zermelo.³¹

Die Auflösung in der modernen, axiomatischen Mengenlehre nach Zermelo und Fraenkel (**ZF-Mengenlehre**) (englisch: *ZF set theory*) besteht darin, den Mengenbegriff geeignet einzuschränken, sodass Konstruktionen wie die „Menge aller Mengen“ nicht mehr möglich sind. In dieser Lehrveranstaltung können wir die zugehörigen Axiome³² nicht behandeln und verweisen auf spätere Spezialveranstaltungen. Wir weisen aber darauf hin, dass die Mengenkompensation (4.1) in Form des sogenannten Aussonderungsaxioms als Konstruktionsprinzip von Mengen weiterhin vorkommt. Wesentlich ist nur eben, dass der Grundbereich X der Aussageform A eine Menge im Sinne der ZF-Axiome sein muss.³³

Intervalle lassen sich beispielsweise über Mengenkompensation definieren:

Beispiel 4.1 (Mengenkompensation).

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann heißt

$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	abgeschlossenes Intervall ³⁴ ,
$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	links offenes, rechts abgeschlossenes Intervall ³⁵ ,
$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	links abgeschlossenes, rechts offenes Intervall ³⁶ ,
$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	offenes Intervall ³⁷ ,
$[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$	rechtsseitig unendliches abgeschlossenes Intervall ³⁸ ,
$(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$	rechtsseitig unendliches offenes Intervall ³⁹ ,
$(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$	linksseitig unendliches abgeschlossenes Intervall ⁴⁰ ,
$(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$	linksseitig unendliches offenes Intervall ⁴¹ ,
$(-\infty, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid \top\} = \mathbb{R}$	beidseitig unendliches Intervall ⁴² .

Dabei ist $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ eine gebräuchliche Kurzschreibweise für $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \wedge x \leq b\}$. Die Intervalle der Form $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$ und (a, b) heißen **endliche Intervalle** (englisch: *finite intervals*) oder **beschränkte Intervalle** (englisch: *bounded intervals*) mit **Endpunkten** (englisch: *end points*) $a, b \in \mathbb{R}$. Diese sind leer, wenn $b < a$ bzw. $b \leq a$ gilt. Die Bedeutung der Eigenschaften **offen** (englisch: *open*) und **abgeschlossen** (englisch: *closed*) wird in der Lehrveranstaltung *Analysis* behandelt.

Wir definieren für $a, b \in \mathbb{Z}$ auch

$$\llbracket a, b \rrbracket := [a, b] \cap \mathbb{Z} \quad \text{ganzzahliges Intervall (englisch: integer interval).} \quad \triangle$$

³¹Eine bekannte andere Formulierung des Russell-Paradoxons ist die folgende. In einem Dorf lebt ein (männlicher) Barbier, der alle Männer rasiert, die sich nicht selbst rasieren. Rasiert der Dorfbarbier sich selbst?

³²Bei Interesse können Sie sich aber unter https://de.wikipedia.org/wiki/Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre#Die_Axiome_von_ZF_und_ZFC einen Eindruck verschaffen.

³³Ist der Grundbereich keine Menge, so landet man beim Begriff der **Klasse** (englisch: *class*), siehe etwa [Deiser, 2022a](#), Kapitel 3. Ein wichtiges Beispiel ist die **Klasse aller Mengen** (englisch: *class of all sets*).

³⁴englisch: *closed interval*

³⁵englisch: *left-open, right-closed interval*

³⁶englisch: *left-closed, right-open interval*

³⁷englisch: *open interval*. Bei der Notation (a, b) für offene Intervalle besteht eine Verwechslungsgefahr mit den Elementen (a, b) des kartesischen Produkts von zwei Mengen, siehe [Definition 4.8](#).

³⁸englisch: *unbounded above, closed interval*

³⁹englisch: *unbounded above, open interval*

⁴⁰englisch: *unbounded below, closed interval*

⁴¹englisch: *unbounded below, open interval*

⁴²englisch: *unbounded above and below interval*

Definition 4.2 (Teilmenge, Obermenge).

Für Mengen A und B definieren wir:

- (i) A ist eine **Teilmenge** (englisch: **subset**) von B , kurz: $A \subseteq B$, wenn jedes Element von A auch ein Element von B ist, kurz: $\forall a \in A (a \in B)$. In diesem Fall sagen wir auch, B sei eine **Obermenge** (englisch: **superset**) von A , und schreiben $B \supseteq A$.
- (ii) A ist eine **echte Teilmenge** (englisch: **proper subset**) von B , kurz: $A \subsetneq B$, falls $A \subseteq B$ und $A \neq B$ gilt. In diesem Fall sagen wir auch, B sei eine **echte Obermenge** (englisch: **proper superset**) von A , und schreiben $B \supsetneq A$.

Die Teilmengenbeziehung \subseteq zwischen Mengen heißt auch **Inklusion** (englisch: **inclusion**).⁴³ \triangle

Beispielsweise erzeugt die Mengenkompensation (4.1) immer eine Teilmenge $Y \subseteq X$. Außerdem gelten die echten Inklusionen

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{N}_0 \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}.$$

Quizfrage 4.1: Wie kann man sich davon überzeugen, dass die Inklusionen echt sind?

In der axiomatischen Mengenlehre gibt es genau eine Menge, die keine Elemente enthält, die **leere Menge** (englisch: **empty set**) \emptyset .

Definition 4.3 (Schnitt, disjunkte Mengen, Vereinigung, Differenz, symmetrische Differenz).

- (i) Es sei \mathcal{U} eine nichtleere Menge von Mengen. Dann heißt die Menge

$$\bigcap \mathcal{U} := \{x \mid \forall U \in \mathcal{U} (x \in U)\} \quad (4.2)$$

die **Schnittmenge**, der **Durchschnitt** oder **Schnitt** (englisch: **intersection**) von \mathcal{U} . Sind die Elemente von \mathcal{U} über eine nichtleere Indexmenge I indiziert, gilt also $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$, so schreiben wir auch

$$\bigcap_{i \in I} U_i := \{x \mid \forall i \in I (x \in U_i)\}. \quad (4.3)$$

Besteht speziell $\mathcal{U} = \{U_1, U_2\}$ aus nur zwei Elementen, so schreiben wir auch

$$U_1 \cap U_2 := \{x \mid x \in U_1 \wedge x \in U_2\}. \quad (4.4)$$

Gilt $\bigcap \mathcal{U} = \emptyset$ bzw. $\bigcap_{i \in I} U_i = \emptyset$ bzw. $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, so heißen die Elemente von \mathcal{U} bzw. die Mengen U_i bzw. die Mengen U_1 und U_2 **disjunkt** (englisch: **disjoint**).

- (ii) Es sei \mathcal{U} eine (möglicherweise leere) Menge von Mengen. Dann heißt die Menge

$$\bigcup \mathcal{U} := \{x \mid \exists U \in \mathcal{U} (x \in U)\} \quad (4.5)$$

die **Vereinigungsmenge** oder die **Vereinigung** (englisch: **union**) von \mathcal{U} . Sind die Elemente von \mathcal{U} über eine Indexmenge I indiziert, gilt also $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$, so schreiben wir auch

$$\bigcup_{i \in I} U_i := \{x \mid \exists i \in I (x \in U_i)\}. \quad (4.6)$$

Besteht speziell $\mathcal{U} = \{U_1, U_2\}$ aus nur zwei Elementen, so schreiben wir auch

$$U_1 \cup U_2 := \{x \mid x \in U_1 \vee x \in U_2\}. \quad (4.7)$$

⁴³lateinisch: **includere**: einschließen

△

Definition 4.4 (Differenz, symmetrische Differenz, Komplement).
Für Mengen X und Y definieren wir

(i) die **Differenzmenge** (englisch: *set difference*) von Y in X

$$X \setminus Y := \{x \in X \mid x \notin Y\}, \tag{4.8}$$

kurz auch als „ X ohne Y “ bezeichnet.

(ii) die **symmetrische Differenz** (englisch: *symmetric difference*) von X und Y

$$X \Delta Y := (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X). \tag{4.9}$$

Ist weiter X irgendeine Menge und $A \subseteq X$ eine Teilmenge, so definieren wir

(iii) das **Komplement** (englisch: *complement*) von A in X

$$A^c := X \setminus A = \{x \in X \mid x \notin A\}. \tag{4.10}$$

Da die Menge X im Symbol A^c nicht angegeben wird, muss sie dabei aus dem Zusammenhang klar sein. △

Quizfrage 4.2: Was sind $X \Delta X$ und $X \Delta \emptyset$?

Lemma 4.5 (Eigenschaften von Schnitt und Vereinigung).

Es seien X, Y und Z Mengen. Dann gilt:

$$X \cap Y = Y \cap X \quad \text{Kommutativität von } \cap \tag{4.11a}$$

$$X \cup Y = Y \cup X \quad \text{Kommutativität von } \cup \tag{4.11b}$$

$$(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z) \quad \text{Assoziativität von } \cap \tag{4.12a}$$

$$(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z) \quad \text{Assoziativität von } \cup \tag{4.12b}$$

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z) \quad \text{Distributivität} \tag{4.13a}$$

$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z) \quad \text{Distributivität} \tag{4.13b}$$

$$X \setminus Y = X \setminus (X \cap Y) \tag{4.14}$$

$$X \cap Y = X \iff X \subseteq Y \tag{4.15a}$$

$$X \cup Y = Y \iff X \subseteq Y \tag{4.15b}$$

Sind A und B Teilmengen einer Menge X , bzgl. der wir das Komplement nehmen, so gilt weiter:

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \quad \text{De Morgansches Gesetz} \tag{4.16a}$$

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad \text{De Morgansches Gesetz} \tag{4.16b}$$

$$(A^c)^c = A \quad \text{Komplementbildung ist involutorisch}^{44} \tag{4.17}$$

$$A \subseteq B \iff B^c \subseteq A^c \tag{4.18}$$

Beweis. Der Beweis kann durch Ausnutzung von $X = Y \Leftrightarrow \forall x (x \in X \leftrightarrow x \in Y)$ und $X \subseteq Y \Leftrightarrow \forall x (x \in X \rightarrow x \in Y)$ auf [Satz 1.9](#) zurückgeführt werden. Die Details werden hier nicht ausgeführt. \square

Zur Vereinfachung der Notation vereinbaren wir auch hier wieder Bindungsregeln:

$$\cdot^c \text{ bindet stärker als } \setminus \text{ bindet stärker als } \cap \text{ bindet stärker als } \cup, \quad (4.19)$$

wodurch wir beispielsweise das erste Distributivgesetz auch als $X \cap (Y \cup Z) = X \cap Y \cup X \cap Z$ schreiben könnten.

Definition 4.6 (Potenzmenge).

Für jede Menge A heißt

$$\mathcal{P}(A) := \{B \mid B \subseteq A\} \quad (4.20)$$

die **Potenzmenge** (englisch: **power set**) von A . \triangle

In der axiomatischen Mengenlehre nach Zermelo und Fraenkel gibt es das Potenzmengenaxiom, das garantiert, dass jede Menge eine Potenzmenge besitzt.

Beispiel 4.7 (Potenzmenge).

(i) Für $A = \emptyset$ ist $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset\}$.

(ii) Für $A = \{a\}$ ist $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}\}$.

(iii) Für $A = \{a, b\}$ ist $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. \triangle

Definition 4.8 (kartesisches Produkt endlich vieler Mengen).

(i) Für Mengen A und B definieren wir das **kartesische Produkt** (englisch: **Cartesian product**) oder **Kreuzprodukt** (englisch: **cross product**)

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}. \quad (4.21)$$

Die Elemente des kartesischen Produkts heißen **geordnete Paare** (englisch: **ordered pairs**) oder einfach **Paare** (englisch: **pairs**) (a, b) .

(ii) Analog können wir auch das kartesische Produkt von mehr als zwei Mengen definieren, etwa $A \times B \times C$, dessen Elemente **Tripel** (englisch: **triplets**) (a, b, c) sind. Allgemeiner heißen die Elemente (a_1, a_2, \dots, a_n) des Produkts $\times_{i=1}^n A_i$ von $n \geq 2$ Mengen **n -Tupel** (englisch: **n -tuples**). Dabei gilt $a_i \in A_i$ für $i = 1, \dots, n$.

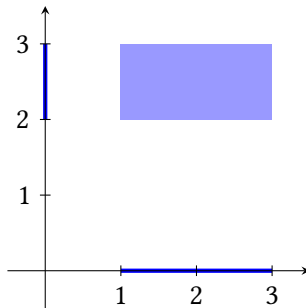
(iii) Wir schreiben $A^2 = A \times A$ und allgemeiner $A^n = \times_{i=1}^n A$ für das kartesische Produkt einer Menge A mit sich selbst. \triangle

Beispiel 4.9 (kartesisches Produkt).

(i) Ist $A = \{\text{Kreuz, Pik, Herz, Karo}\}$ und $B = \{7, 8, 9, 10, \text{Bube, Dame, König, As}\}$, so entsprechen die Elemente des kartesischen Produkts $A \times B$ gerade den 32 Karten eines Skatspiels, also (Kreuz, 7), (Kreuz, 8) usw. bis (Karo, As).

⁴⁴auch: selbst-invers, englisch: **involutory**, **self-inverse**

(ii) Für Intervalle $A = [1, 3]$ und $B = [2, 3]$ können wir das **mehrdimensionale Intervall** (englisch: **multi-dimensional interval**) $A \times B = \{(x_1, x_2) \mid 1 \leq x_1 \leq 3 \wedge 2 \leq x_2 \leq 3\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ wie folgt illustrieren:



△

Ende der Vorlesung 3

§ 5 RELATIONEN

Literatur: Deiser, 2022b, Kapitel 1.3

Relationen⁴⁵ geben Beziehungen zwischen Objekten an wie beispielsweise $1 \leq 3$ oder $5 \in \mathbb{N}$ oder $3 \mid 756$ („3 teilt 756“).

Definition 5.1 (Relation).

Es seien X und Y Mengen. Ist $R \subseteq X \times Y$, so heißt (R, X, Y) eine **Relation** (englisch: **relation**) **zwischen** X und Y . Die Menge R heißt der **Graph der Relation** (englisch: **graph of a relation**). Im Fall $Y = X$ sprechen wir von einer **homogenen Relation** (englisch: **homogeneous relation**) **auf** X . △

Wenn X und Y klar sind, sagt man auch oft, R selbst sei die Relation. Statt $(x, y) \in R$ schreiben wir auch $x R y$, um die Lesart „ x steht in Relation zu y “ zu erleichtern.

Beispiel 5.2 (Relation).

(i) Ist X die Menge der Teilnehmenden an der Lehrveranstaltung *Lineare Algebra I* und $Y = \{\text{Mathematik, Physik, Informatik}\}$ eine Menge von Studienfächern, so ergibt die Beziehung „Die teilnehmende Person x studiert das Fach y .“ eine Relation zwischen X und Y .

(ii) Wir sagen, die Zahl $x \in \mathbb{Z}$ **teilt** (englisch: **divides**) die Zahl $y \in \mathbb{Z}$, in Symbolen: $x \mid y$, wenn eine Zahl $n \in \mathbb{Z}$ existiert, sodass $y = n x$ gilt. Insbesondere teilt jede ganze Zahl die Zahl 0, und die Zahl 1 teilt jede ganze Zahl.

Die folgende Tabelle stellt die **Teilbarkeitsrelation** (englisch: **divisibility relation**) „Die Zahl x teilt die Zahl y .“ auf der Menge $X = Y = \{0, 1, 2, \dots, 10\} = \llbracket 0, 10 \rrbracket$ dar:

⁴⁵lateinisch: *relatio*: Verhältnis, Beziehung

$x \mid y$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	•										
1	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
2	•		•		•		•		•		•
3	•			•			•			•	
4	•				•				•		
5	•					•					•
6	•						•				
7	•							•			
8	•								•		
9	•									•	
10	•										•

(iii) Es sei $X = Y = \mathbb{R}$ und $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$ die **gewöhnliche Kleiner-Gleich-Relation auf \mathbb{R}** (englisch: **usual less-or-equal relation**).

(iv) Es sei X eine Menge, $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge und $R = \{(A, B) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \mid A \subseteq B\}$ die **Inklusionsrelation** (englisch: **inclusion relation**).

(v) Auf einer beliebigen Menge X heißt die Menge

$$\Delta_X := \{(x, y) \in X \times X \mid x = y\} \quad (5.1)$$

die **Diagonale** (englisch: **diagonal**) in $X \times X$. Die Relation $\text{id}_X := (\Delta_X, X, X)$ heißt die **Gleichheitsrelation** (englisch: **equality relation**) oder **Identitätsrelation** (englisch: **identity**) auf der Menge X .

(vi) Auf einer beliebigen Menge X heißt die Relation $U_X := (U, X, X)$ mit $U = X \times X$ die **universelle Relation** (englisch: **universal relation**). \triangle

Quizfrage 5.1: Können Sie weitere Beispiele für Relationen benennen?

Definition 5.3 (Komposition von Relationen).

Es seien X, Y und Z Mengen sowie (R, X, Y) und (S, Y, Z) zwei Relationen. Dann heißt die Relation $(S \circ R, X, Z)$ mit

$$S \circ R := \{(x, z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y \text{ mit } (x, y) \in R \text{ und } (y, z) \in S\} \quad (5.2)$$

die **Komposition** (englisch: **composition**, lateinisch: **componere**: zusammenstellen), die **Hintereinanderausführung**, die **Verknüpfung** oder die **Verkettung** von R und S . Um die Reihenfolge klar zu benennen, sagt man auch „**S nach R**“. \triangle

Quizfrage 5.2: Durch die Komposition welcher Relationen kann man die Relation „Onkel sein von“ ausdrücken?

Definition 5.4 (Umkehrrelation).

Es seien X und Y Mengen und (R, X, Y) eine Relation. Dann heißt (R^{-1}, Y, X) die **Umkehrrelation** (englisch: **reverse relation**) oder **inverse Relation** (englisch: **inverse relation**) von R , wobei

$$R^{-1} := \{(b, a) \in Y \times X \mid (a, b) \in R\} \subseteq Y \times X$$

definiert ist. \triangle

Quizfrage 5.3: Wie bezeichnet man die Umkehrrelationen von „kleiner oder gleich sein als“, „Teilmenge sein von“ bzw. „Teiler sein von“?

Quizfrage 5.4: Wie könnte man die Umkehrrelationen der Teilbarkeitsrelation auf \mathbb{Z} bezeichnen?

Wir definieren nun einige wichtige Eigenschaften, die Relationen auf einer Menge besitzen können.

Definition 5.5 (Eigenschaften homogener Relationen).

Es sei X eine Menge und (R, X, X) eine Relation auf X .

(i) R heißt **reflexiv** (englisch: *reflexive*), wenn gilt:

$$(x, x) \in R \quad \text{für alle } x \in X.$$

(ii) R heißt **symmetrisch** (englisch: *symmetric*), wenn gilt:

$$(x, y) \in R \quad \Rightarrow \quad (y, x) \in R.$$

(iii) R heißt **antisymmetrisch** (englisch: *antisymmetric*), wenn gilt:

$$(x, y) \in R \text{ und } (y, x) \in R \quad \Rightarrow \quad x = y.$$

(iv) R heißt **transitiv** (englisch: *transitive*), wenn gilt:

$$(x, y) \in R \text{ und } (y, z) \in R \quad \Rightarrow \quad (x, z) \in R.$$

(v) R heißt **total** (englisch: *total*), wenn gilt:

$$(x, y) \in R \text{ oder } (y, x) \in R \quad \text{für alle } x, y \in X. \quad \triangle$$

Quizfrage 5.5: Die Reflexivität von R kann man auch als $\text{id}_X \subseteq R$ ausdrücken. Wie sieht das für die anderen Eigenschaften aus?

Beispiel 5.6 (Eigenschaften homogener Relationen).

- Die Teilbarkeitsrelation $|$ auf \mathbb{Z} ist reflexiv und transitiv, aber nicht symmetrisch, antisymmetrisch oder total.
- Die Teilbarkeitsrelation $|$ auf \mathbb{N}_0 ist reflexiv, antisymmetrisch und transitiv, aber nicht symmetrisch oder total.
- Die Relation „ x liebt y “ auf einer Menge von Personen hat in der Regel keine der fünf genannten Eigenschaften. \triangle

§ 5.1 ORDNUNGSRELATIONEN

Definition 5.7 (Ordnungsrelation).

Es sei X eine Menge.

- (i) Eine Relation (R, X, X) auf X heißt eine **Ordnungsrelation**, **Halbordnung** oder **partielle Ordnung** (englisch: **partial ordering**), wenn sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist. Das Paar (X, R) heißt dann eine **halbgeordnete Menge** (englisch: **partially ordered set**).
- (ii) Ist die Relation R zusätzlich total, dann heißt sie eine **Totalordnung** (englisch: **total ordering**). Das Paar (X, R) heißt dann eine **totalgeordnete Menge** (englisch: **totally ordered set**). \triangle

Ordnungsrelationen werden oft mit Symbolen wie \leq , \preceq oder \subseteq notiert. Unter Verwendung der Notation \preceq können wir für eine Ordnungsrelation auf X also festhalten, dass für alle $x, y, z \in X$ gilt:

$$x \preceq x, \tag{5.3a}$$

$$x \preceq y \text{ und } y \preceq x \implies x = y, \tag{5.3b}$$

$$x \preceq y \text{ und } y \preceq z \implies x \preceq z. \tag{5.3c}$$

Die Idee von Ordnungsrelationen ist es, Elemente einer Menge bezüglich einer bestimmten Eigenschaft zu vergleichen. Bei einer Totalordnung ist dabei jedes Element mit jedem Element vergleichbar, bei einer Halbordnung nicht unbedingt.

Beispiel 5.8 (Halbordnungen und Totalordnungen).

- (i) Die Identitätsrelation id_X ist eine Halbordnung auf jeder Menge X .
- (ii) Die universelle Relation U_X ist *keine* Halbordnung auf jeder Menge X , die mindestens zwei Elemente enthält.
- (iii) Die Kleiner-Gleich-Relation \leq ist eine Totalordnung auf jeder Teilmenge von \mathbb{R} .
- (iv) Die Inklusionsrelation \subseteq ist eine Halbordnung auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ jeder beliebigen Menge X . Sie ist eine totale Ordnung dann und nur dann, wenn X entweder kein oder genau ein Element enthält.
- (v) Die Teilbarkeitsrelation $|$ ist eine Halbordnung auf \mathbb{N} . \triangle

Lemma 5.9 (Halbordnungen \preceq und \succeq).

Es sei \preceq eine Halbordnung auf einer Menge X . Dann ist auch die inverse Relation \succeq eine Halbordnung auf X . Ist \preceq eine Totalordnung, dann auch \succeq .

Beweis. Dieser Beweis ist Teil von [Hausaufgabe I-2.3](#). \square

Definition 5.10 (Vergleichbarkeit, obere und untere Schranken, Supremum und Infimum, maximale und minimale Elemente, Maximum und Minimum).

Es sei X mit der Relation \preceq eine halbgeordnete Menge.

- (i) Zwei Elemente $x, y \in X$ heißen **vergleichbar** (englisch: **comparable**), wenn $x \preceq y$ oder $y \preceq x$ gilt.

(ii) $b \in X$ heißt eine **obere Schranke** (englisch: **upper bound**) von $A \subseteq X$, wenn gilt:

$$x \leq b \quad \text{für alle } x \in A. \quad (\text{„Ganz } A \text{ ist } \leq \text{.“})$$

(iii) $b \in X$ heißt ein **Supremum** (englisch: **supremum**, lateinisch: **supremum**: das Größte) oder **kleinste obere Schranke** (englisch: **least upper bound**) von $A \subseteq X$, wenn gilt:

$$b \text{ ist eine obere Schranke von } A, \text{ und für jede obere Schranke } \hat{b} \text{ von } A \text{ gilt: } b \leq \hat{b}.$$

(iv) $b \in X$ heißt ein **maximales Element** (englisch: **maximal element**) von $A \subseteq X$, wenn gilt:

$$b \in A, \text{ und für alle } x \in A \text{ gilt: } b \leq x \Rightarrow x = b. \quad (\text{„Kein Element von } A \text{ ist größer.“})$$

(v) $b \in X$ heißt ein **Maximum** (englisch: **maximum**) von $A \subseteq X$, wenn gilt:

$$b \in A, \text{ und für alle } x \in A \text{ gilt: } x \leq b. \quad (\text{„Ganz } A \text{ ist höchstens so groß.“})$$

(vi) $a \in X$ heißt eine **untere Schranke** (englisch: **lower bound**) von $A \subseteq X$, wenn gilt:

$$a \leq x \quad \text{für alle } x \in A. \quad (\text{„Ganz } A \text{ ist } \geq \text{.“})$$

(vii) $a \in X$ heißt ein **Infimum** (englisch: **infimum**, lateinisch: **infimum**: das Kleinste) oder **größte untere Schranke** (englisch: **greatest lower bound**) von $A \subseteq X$, wenn gilt:

$$a \text{ ist eine untere Schranke von } A, \text{ und für jede untere Schranke } \hat{a} \text{ von } A \text{ gilt: } \hat{a} \leq a.$$

(viii) $a \in X$ heißt ein **minimales Element** (englisch: **minimal element**) von $A \subseteq X$, wenn gilt:

$$a \in A, \text{ und für alle } x \in A \text{ gilt: } x \leq a \Rightarrow x = a. \quad (\text{„Kein Element von } A \text{ ist kleiner.“})$$

(ix) $a \in X$ heißt ein **Minimum** (englisch: **minimum**) von $A \subseteq X$, wenn gilt:

$$a \in A, \text{ und für alle } x \in A \text{ gilt: } a \leq x. \quad (\text{„Ganz } A \text{ ist mindestens so groß.“})$$

Wenn $A \subseteq X$ eine obere Schranke besitzt, so heißt A **nach oben beschränkt** (englisch: **bounded above**), ansonsten **nach oben unbeschränkt** (englisch: **unbounded above**). Wenn $A \subseteq X$ eine untere Schranke besitzt, so heißt A **nach unten beschränkt** (englisch: **bounded below**), ansonsten **nach unten unbeschränkt** (englisch: **unbounded below**). \triangle

Wir zeigen nun einige ausgewählte Eigenschaften.

Lemma 5.11 (Eigenschaften und Beziehungen zwischen Supremum und Maximum, Infimum und Minimum).

Es sei X mit der Relation \leq eine halbgeordnete Menge und $A \subseteq X$.

- (i) Existiert ein Supremum von A , so ist dieses eindeutig.
- (ii) Existiert ein Maximum von A , so ist dieses eindeutig.
- (iii) Ist b das Maximum von A , so ist b gleichzeitig das Supremum von A .

- (iv) Hat A ein Supremum b , so gilt: Gehört b zu A , so ist b das Maximum von A . Gehört b nicht zu A , so besitzt A kein Maximum.

Analoge Aussagen gelten auch für das Infimum und Minimum von A .

Beweis. Aussage (i): Wir nehmen an, $b \in X$ und $\widehat{b} \in X$ seien beides Suprema von A . Dann sind b und \widehat{b} beides obere Schranken. Da b ein Supremum von A ist, gilt $b \leq \widehat{b}$. Da \widehat{b} ein Supremum von A ist, gilt $\widehat{b} \leq b$. Aufgrund der Antisymmetrie von \leq folgt nun $b = \widehat{b}$.

Aussage (ii): Wir nehmen an, $b \in X$ und $\bar{b} \in X$ seien beides Maxima von A . Dann gehören b und \bar{b} beide zu A . Da b ein Maximum von A ist, gilt $\bar{b} \leq b$. Da \bar{b} ein Maximum von A ist, gilt $b \leq \bar{b}$. Aufgrund der Antisymmetrie von \leq folgt nun $b = \bar{b}$.

Aussage (iii): Es sei b das Maximum von A . Es gilt also $b \in A$ und $x \leq b$ für alle $x \in A$. Das heißt aber, dass b eine obere Schranke von A ist. Ist nun \bar{b} eine weitere obere Schranke von A , dann gilt $x \leq \bar{b}$ für alle $x \in A$, insbesondere $b \leq \bar{b}$. Das zeigt, dass b das Supremum von A ist.

Aussage (iv): Es sei b das Supremum von A . Insbesondere ist b eine obere Schranke von A , es gilt also $x \leq b$ für alle $x \in A$. Falls nun b zu A gehört, dann ist b per Definition das Maximum von A . Falls jedoch b nicht zu A gehört, so ist b per Definition kein Maximum von A . Ein Maximum von A kann auch nicht existieren, sonst wäre es nach *Aussage (iii)* gleichzeitig das Supremum, also gleich b . \square

Beispiel 5.12 (Schranken, extreme Elemente, Maxima und Minima, Suprema und Infima).

- (i) In den natürlichen Zahlen \mathbb{N} mit der gewöhnlichen Totalordnung \leq ist die Zahl 1 das Minimum und damit das Infimum. Eine obere Schranke existiert nicht.

- (ii) Es sei X eine beliebige nichtleere Menge. In der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ mit der Halbordnung \subseteq ist \emptyset das Minimum von $\mathcal{P}(X)$ und X das Maximum von $\mathcal{P}(X)$.

Hat X mindestens zwei Elemente, dann besitzt die Teilmenge $A = \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ das Infimum \emptyset , aber kein Minimum. Die minimalen Elemente von A sind genau die einelementigen Teilmengen von X . \triangle

Quizfrage 5.6: Können Sie sich eine Menge mit einer Halbordnung oder einer totalen Ordnung vorstellen, die kein maximales Element besitzt?

§ 5.2 ÄQUIVALENZRELATION

Definition 5.13 (Äquivalenzrelation).

Es sei X eine Menge. Eine Relation (R, X, X) auf X heißt eine **Äquivalenzrelation** (englisch: *equivalence relation*), wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Elemente $x, y \in X$, die $x R y$ erfüllen, heißen (**zueinander**) **äquivalent** (englisch: *equivalent*). \triangle

Äquivalenzrelationen werden oft mit Symbolen wie $=$, \sim oder \equiv notiert. Unter Verwendung der Notation \sim können wir für eine Äquivalenzrelation auf X also festhalten, dass für alle $x, y, z \in X$ gilt:

$$x \sim x, \tag{5.4a}$$

$$x \sim y \Rightarrow y \sim x, \tag{5.4b}$$

$$x \sim y \text{ und } y \sim z \Rightarrow x \sim z. \tag{5.4c}$$

Die Idee von Äquivalenzrelationen ist es, die Elemente einer Menge, die eine bestimmte Eigenschaft gemeinsam haben, zusammenzugruppieren und als gleichwertig zu betrachten.

Beispiel 5.14 (Äquivalenzrelationen).

- (i) Die Identitätsrelation id_X ist eine Äquivalenzrelation auf jeder Menge X .
- (ii) Die universelle Relation U_X ist eine Äquivalenzrelation auf jeder Menge X .
- (iii) Es sei $m \in \mathbb{N}$ fest gewählt. Auf der Menge $X = \mathbb{Z}$ ist durch

$$x \stackrel{m}{\equiv} y \iff \exists n \in \mathbb{Z} (x - y = n m) \quad (5.5)$$

eine Äquivalenzrelation erklärt (**Quizfrage 5.7:** Details?). Anders ausgedrückt, x und y unterscheiden sich nur um ein Vielfaches von m , also, $m \mid (x - y)$. Diese Relation heißt **Kongruenzrelation modulo m** (englisch: **congruence relation modulo m**).⁴⁶ \triangle

Definition 5.15 (Äquivalenzklasse, Repräsentant, Repräsentantensystem).

Es sei X eine Menge mit der Äquivalenzrelation \sim .

- (i) Für $x \in X$ heißt die Menge

$$[x] := \{y \in X \mid y \sim x\} \quad (5.6)$$

die **Äquivalenzklasse** (englisch: **equivalence class**) von x bzgl. \sim . Statt $[x]$ schreibt man manchmal auch $[x]_{\sim}$ oder auch x / \sim .

- (ii) Jedes Element einer Äquivalenzklasse heißt ein **Repräsentant** (englisch: **representative**, lateinisch: **repraesentare**: darstellen) dieser Äquivalenzklasse.
- (iii) Eine Menge $S \subseteq X$, die aus jeder Äquivalenzklasse genau einen Repräsentanten enthält, heißt ein **Repräsentantensystem** (englisch: **system of representatives**) von \sim . \triangle

Beispiel 5.16 (Äquivalenzklasse, Repräsentant).

- (i) Wir betrachten eine beliebige Menge X mit der Identitätsrelation. Dann gilt $[x] = \{x\}$ für alle $x \in X$. Jede Äquivalenzklasse hat also nur ein Element und damit einen eindeutigen Repräsentanten. Das einzige Repräsentantensystem ist X selbst.
- (ii) Wir betrachten eine beliebige Menge X mit der universellen Relation. Dann gilt $[x] = X$ für alle $x \in X$. Falls $X \neq \emptyset$ ist, dann gibt es also nur eine Äquivalenzklasse, und diese enthält alle Elemente von X . In diesem Fall ist jede einelementige Teilmenge von X ein Repräsentantensystem.
- (iii) Die Äquivalenzklassen der Kongruenzrelation modulo m ($m \in \mathbb{N}$) heißen auch die **Restklassen modulo m** (englisch: **residue classes**).⁴⁷ Die Restklasse von $a \in \mathbb{Z}$ modulo m ist also

$$\begin{aligned} [a] &= \{y \in \mathbb{Z} \mid y \stackrel{m}{\equiv} a\} \\ &= \{y \in \mathbb{Z} \mid \exists n \in \mathbb{Z} (y - a = n m)\} \\ &= \{a + n m \mid n \in \mathbb{Z}\} \\ &= a + m\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Das Repräsentantensystem $\{0, 1, \dots, m - 1\}$ heißt das **natürliche Repräsentantensystem** (englisch: **natural system of representatives**) der Kongruenzrelation modulo m .

⁴⁶Oft wird diese Relation statt $x \stackrel{m}{\equiv} y$ als $x \equiv y \pmod{m}$ geschrieben.

⁴⁷Der Name leitet sich aus der Tatsache ab, dass die Elemente einer Restklasse durch die Eigenschaft charakterisiert sind, dass sie bei ganzzahliger Division durch m denselben Rest lassen.

(iv) Speziell im Fall $m = 2$ gibt es genau zwei Äquivalenzklassen (Restklassen):

$$\begin{aligned} [0] &= \{y \in \mathbb{Z} \mid y \stackrel{2}{\equiv} 0\} \\ &= \{y \in \mathbb{Z} \mid \exists n \in \mathbb{Z} (y - 0 = 2n)\} \\ &= \{y \in \mathbb{Z} \mid y \text{ ist gerade}\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [1] &= \{y \in \mathbb{Z} \mid y \stackrel{2}{\equiv} 1\} \\ &= \{y \in \mathbb{Z} \mid \exists n \in \mathbb{Z} (y - 1 = 2n)\} \\ &= \{y \in \mathbb{Z} \mid y \text{ ist ungerade}\}. \end{aligned}$$

Das natürliche Repräsentantensystem ist $\{0, 1\}$, ein anderes ist $\{-2, 4339\}$. △

Satz 5.17 (Äquivalenzklassen sind gleich oder disjunkt).

Es sei X eine Menge mit der Äquivalenzrelation \sim . Weiter seien $[x]$ und $[y]$ zwei Äquivalenzklassen. Dann sind diese entweder gleich oder disjunkt.

Beweis. Nehmen wir an, $[x]$ und $[y]$ seien nicht disjunkt. Das heißt, sie haben ein Element $z \in X$ gemeinsam. Es sei nun \bar{x} ein beliebiges Element aus $[x]$. Dann gilt

$$\bar{x} \sim x \sim z.$$

Wegen der Transitivität von \sim ist also \bar{x} äquivalent zu z , das nach Voraussetzung zu $[y]$ gehört. Damit haben wir $[x] \subseteq [y]$ gezeigt. Die umgekehrte Inklusion folgt analog. □

Definition 5.18 (Partition).

Es sei X eine nichtleere Menge und \mathcal{U} eine Menge von Teilmengen von X , also $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$. \mathcal{U} heißt eine **Partition** (englisch: **partition**) oder **disjunkte Zerlegung** von X , wenn gilt:

- (i) Für alle $x \in X$ gibt es eine Menge $U \in \mathcal{U}$, die x enthält.
- (ii) Für alle $U, V \in \mathcal{U}$ gilt, dass U und V entweder gleich sind oder disjunkt.
- (iii) $\emptyset \notin \mathcal{U}$. △

Zu **Eigenschaft (i)** sagen wir auch, dass die Mengen in \mathcal{U} die Menge X **überdecken** (englisch: **to cover**) oder eine **Überdeckung** (englisch: **cover, covering**) von X darstellen. Zu **Eigenschaft (ii)** sagen wir, dass die Mengen in \mathcal{U} **paarweise disjunkt** (englisch: **pairwise disjoint**) sind.

Satz 5.19 (Partitionen werden genau durch Äquivalenzrelationen erzeugt).

- (i) Es sei X eine nichtleere Menge mit der Äquivalenzrelation \sim . Dann bildet die Menge der Äquivalenzklassen $\{[x] \mid x \in X\}$ eine Partition von X .
- (ii) Es sei X eine nichtleere Menge und \mathcal{U} eine Partition von X . Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Äquivalenzrelation \sim , sodass \mathcal{U} genau aus den Äquivalenzklassen von \sim besteht.

Wir könnten diesen Satz etwas ungenau auch so ausdrücken, dass die Partition einer Menge X „dasselbe“ ist wie eine Äquivalenzrelationen auf X .

Beweis. **Aussage (i):** Zur Abkürzung sei $\mathcal{U} := \{[x] \mid x \in X\}$ die Menge der Äquivalenzklassen. Wir weisen die Eigenschaften der **Definition 5.18** nach. Zunächst ist jedes $x \in X$ Element seiner Äquivalenzklasse $[x]$, da ja $x \sim x$ gilt. Das zeigt **Eigenschaft (i)**. Nach **Satz 5.17** sind Äquivalenzklassen paarweise disjunkt. Das zeigt **Eigenschaft (ii)**. Schließlich sind Äquivalenzklassen nicht leer. Damit ist auch **Eigenschaft (iii)** gezeigt.

Der Beweis von **Aussage (ii)** ist Teil von **Hausaufgabe I-2.3**. □

Definition 5.20 (Quotientenmenge, Invarianz).

Es sei X eine nichtleere Menge mit der Äquivalenzrelation \sim .

(i) Die Menge der Äquivalenzklassen

$$X / \sim := \{[x] \mid x \in X\} \quad (5.7)$$

heißt auch die **Quotientenmenge** (englisch: **quotient set**) oder die **Faktormenge** (englisch: **factor set**) von \sim .

(ii) Eine Aussageform A auf X heißt **invariant** (englisch: **invariant**) oder **wohldefiniert** (englisch: **well-defined**) unter \sim , wenn $x \sim y$ impliziert, dass $A(x)$ und $A(y)$ denselben Wahrheitswert haben. △

Die Invarianz ist wichtig, wenn man eine Aussageform auf der Quotientenmenge dadurch definieren möchte, dass man sie auf den Elementen jeder Äquivalenzklasse definiert. Dabei ist sicherzustellen, dass sich tatsächlich für jedes Element einer Äquivalenzklasse derselbe Wahrheitswert ergibt.

Beispiel 5.21 (wohldefinierte Aussageformen).

- (i) Die Aussageform „ x ist eine gerade ganze Zahl“ ist unter der Kongruenzrelation $\stackrel{2}{\equiv}$ wohldefiniert, da die Restklassen $[0]$ und $[1]$ jeweils nur aus geraden bzw. nur aus ungeraden ganzen Zahlen bestehen.
- (ii) Dieselbe Aussageform ist jedoch unter der Kongruenzrelation $\stackrel{3}{\equiv}$ nicht wohldefiniert, da die Restklassen $[0]$, $[1]$ und $[2]$ jeweils sowohl gerade als auch ungerade ganze Zahlen enthalten. △

Die Menge der rationalen Zahlen wurde zu Beginn von § 4 vorläufig als

$$\tilde{\mathbb{Q}} := \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$$

eingeführt. Darin werden sind aber beispielsweise $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{6}$ und $\frac{-2}{-4}$ unterschiedliche Elemente, die wir jedoch miteinander identifizieren wollen. Zu diesen Zweck verwenden wir die Äquivalenzrelation

$$\frac{m_1}{n_1} \sim \frac{m_2}{n_2} \iff m_1 \cdot n_2 = m_2 \cdot n_1. \quad (5.8)$$

Das führt uns zur Definition

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\} / \sim \quad (5.9)$$

für die **rationalen Zahlen**. Statt der Äquivalenzklasse $\left[\frac{m}{n} \right]$ schreiben wir üblicherweise weiter $\frac{m}{n}$, arbeiten also immer mit Repräsentanten. Das erklärt auch die übliche Notation $\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{-2}{-4}$ an Stelle von $\frac{1}{2} \sim \frac{3}{6} \sim \frac{-2}{-4}$.

Ende der Vorlesung 4

Ende der Woche 2

§ 6 ABBILDUNGEN

Literatur: Deiser, 2022b, Kapitel 1.3, Deiser, 2022b, Kapitel 1.4, Jänich, 2008, Kapitel 1.2

In diesem Abschnitt geht es um den grundlegenden Begriff der Abbildung oder Funktion. Eine Abbildung ist dabei nichts anderes als eine spezielle Relation.

Definition 6.1 (weitere Eigenschaften von Relationen).

Es seien X und Y Mengen. Eine Relation (R, X, Y) zwischen X und Y heißt

- (i) **linkstotal** (englisch: **left-total**), falls für alle $x \in X$ ein $y \in Y$ existiert, sodass $x R y$ gilt.
- (ii) **rechtseindeutig** (englisch: **right-unique**), falls für alle $x \in X$ und alle $y_1, y_2 \in Y$ gilt: $x R y_1 \wedge x R y_2 \Rightarrow y_1 = y_2$. △

Definition 6.2 (Funktion).

Es seien X und Y Mengen. Eine linkstotale und rechtseindeutige Relation (f, X, Y) zwischen X und Y heißt **Abbildung** (englisch: **map**) oder **Funktion** (englisch: **function**) **von X in Y** oder **auf X mit Werten in Y** . Die Menge X heißt der **Definitionsbereich** (englisch: **domain**) oder die **Definitionsmenge** und die Menge Y der **Zielmeng**e (englisch: **codomain**) von f . Ist $Y = X$, so spricht man auch von einer Funktion von X **in sich**. △

Den Sachverhalt, dass f eine Funktion von X in Y ist, drücken wir auch in der Form

$$f: X \rightarrow Y \quad \text{oder} \quad X \xrightarrow{f} Y \quad \text{oder} \quad Y \xleftarrow{f} X$$

aus. Statt $x f y$ schreiben wir $y = f(x)$ oder $x \mapsto f(x)$ und sagen, x werde **abgebildet auf** $f(x)$. Auch die kompakten Schreibweisen

$$X \ni x \mapsto f(x) \in Y \quad \text{oder} \quad f: \begin{cases} X \rightarrow Y \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$$

für die Definition einer Funktion sind üblich.

Beachte: Zwei Funktionen sind genau dann gleich, wenn sie in ihren Definitionsbereichen, Zielmengen und ihren Abbildungsvorschriften übereinstimmen.

Die Menge

$$\{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subseteq X \times Y \tag{6.1}$$

heißt der **Graph** (englisch: **graph**) der Funktion $f: X \rightarrow Y$.⁴⁸

Beispiel 6.3 (Abbildungen).

- (i) Es seien X und Y Mengen und $y_0 \in Y$. Dann heißt die Abbildung f mit

$$X \ni x \mapsto f(x) := y_0 \in Y$$

die **konstante Funktion** (englisch: **constant function**) auf X mit dem Wert y_0 .

⁴⁸Der Begriff des Graphen einer Funktion stimmt also überein mit dem Begriff des Graphen der Funktion als Relation, vgl. Definition 5.1.

(ii) Es seien X und Y Mengen mit $X \subseteq Y$. Dann heißt die Abbildung $i_{X \rightarrow Y}$ mit

$$X \ni x \mapsto i_{X \rightarrow Y}(x) := x$$

die **kanonische** oder **natürliche Injektion** (englisch: **canonical injection, natural injection**) oder die **kanonische** oder **natürliche Einbettung** (englisch: **canonical embedding, natural embedding**) von X in Y .

(iii) Im Fall $X = Y$ heißt die kanonische Einbettung auch die **Identität** (englisch: **identity**) oder **identische Abbildung** (englisch: **identity map**) von X in Y und wird mit id_X bezeichnet, also

$$X \ni x \mapsto \text{id}_X(x) := x.$$

Der Graph von id_X ist also gerade die Diagonale Δ_X , siehe (5.1). △

Definition 6.4 (Bild, Einschränkung, Fortsetzung).

Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine Funktion.⁴⁹

(i) Für $A \subseteq X$ heißt

$$f(A) := \{f(x) \mid x \in A\} \tag{6.2}$$

die **Bildmenge** oder kurz das **Bild** (englisch: **image**) von f **auf** A oder das **Bild** von A **unter** f .

(ii) Ist $A \subseteq X$, dann heißt die Funktion $f|_A$

$$A \ni x \mapsto f|_A(x) := f(x) \in Y$$

die **Einschränkung** oder **Restriktion** (englisch: **restriction**, lateinisch: **restringere**: zurückziehen) von f auf A .

(iii) Gilt zusätzlich $f(A) \subseteq B$, so bezeichnen wir mit $f|_A^B$ die Einschränkung von f auf A , wobei zusätzlich die Zielmenge durch B ersetzt wird, also die Funktion

$$A \ni x \mapsto f|_A^B(x) := f(x) \in B.$$

Gilt insbesondere $f(X) \subseteq B$, dann bezeichnet $f|_X^B$ die Funktion

$$X \ni x \mapsto f|_X^B(x) := f(x) \in B,$$

bei der gegenüber f nur die Zielmenge ersetzt wird.

(iv) Ist $C \supseteq X$ und $D \supseteq Y$, dann heißt eine Funktion $g: C \rightarrow D$, die auf X mit f übereinstimmt, für die also $g|_X^Y = f$ gilt, eine **Fortsetzung** (englisch: **extension**) von f . △

An Stelle von $f|_A$ schreibt man auch manchmal $f \upharpoonright A$.

Beispiel 6.5 (Bild, Einschränkung, Fortsetzung).

Wir betrachten die Funktionen⁵⁰

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \ni x &\mapsto f(x) := \sin(x) \in \mathbb{R} && \text{mit dem Bild } [-1, 1], \\ \mathbb{R} \ni x &\mapsto g(x) := \sin(x) \in [-1, 1] && \text{mit dem Bild } [-1, 1], \\ \frac{\pi}{2}\mathbb{Z} \ni x &\mapsto h(x) := \sin(x) \in [-1, 1] && \text{mit dem Bild } \{-1, 0, 1\}, \\ \frac{\pi}{2}\mathbb{Z} \ni x &\mapsto i(x) := \sin(x) \in \{-1, 0, 1\} && \text{mit dem Bild } \{-1, 0, 1\}. \end{aligned}$$

Dann sind g , h und i Einschränkungen von f , und f ist eine Fortsetzung von g , h und i . △

⁴⁹Wir sagen damit insbesondere, dass X und Y Mengen sind.

⁵⁰Hierbei bedeutet $\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ die Menge der ganzzahligen Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$.

Definition 6.6 (Urbild).

Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine Funktion. Für $B \subseteq Y$ heißt die Menge

$$f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\} \quad (6.3)$$

die **Urbildmenge** oder das **Urbild** (englisch: **pre-image**) von B **unter** f . △

Beispiel 6.7 (Urbild).

Wir betrachten die Funktion

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}.$$

Dann ist

$$f^{-1}(\{y\}) = \begin{cases} \{\sqrt{y}, -\sqrt{y}\} & \text{falls } y > 0, \\ \{0\} & \text{falls } y = 0, \\ \emptyset & \text{falls } y < 0. \end{cases} \quad \triangle$$

Satz 6.8 (Bilder und Urbilder von Vereinigungen und Durchschnitten).

Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine Funktion. Weiter seien I und J irgendwelche Indexmengen und $\{X_i \mid i \in I\}$ eine Menge von Teilmengen von X sowie $\{Y_j \mid j \in J\}$ eine Menge von Teilmengen von Y . Dann gilt:

$$f\left(\bigcup_{i \in I} X_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(X_i) \quad (6.4a)$$

$$f\left(\bigcap_{i \in I} X_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(X_i) \quad (6.4b)$$

$$f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} Y_j\right) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(Y_j) \quad (6.4c)$$

$$f^{-1}\left(\bigcap_{j \in J} Y_j\right) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(Y_j) \quad (6.4d)$$

Beweis. Wir beweisen hier nur (6.4a) und (6.4c). Die Aussagen (6.4b) und (6.4d) sind Teil von [Hausaufgabe I-3.1](#).

Zum Beweis von (6.4a):

$$\begin{aligned} y \in f\left(\bigcup_{i \in I} X_i\right) & \\ \Leftrightarrow \exists i \in I \exists x \in X_i (y = f(x)) & \quad \text{nach Definition (4.6) der Vereinigungsmenge} \\ \Leftrightarrow \exists i \in I (y \in f(X_i)) & \quad \text{nach Definition (6.2) des Bildes } f(X_i) \\ \Leftrightarrow y \in \bigcup_{i \in I} f(X_i) & \quad \text{nach Definition (4.6) der Vereinigungsmenge.} \end{aligned}$$

Zum Beweis von (6.4c):

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} Y_j\right) & \\ \Leftrightarrow \exists y \in \bigcup_{j \in J} Y_j (y = f(x)) & \quad \text{nach Definition (6.3) des Urbildes} \\ \Leftrightarrow \exists j \in J \exists y \in Y_j (y = f(x)) & \quad \text{nach Definition (4.6) der Vereinigungsmenge} \\ \Leftrightarrow \exists j \in J (x \in f^{-1}(Y_j)) & \quad \text{nach Definition (6.3) des Urbildes} \\ \Leftrightarrow x \in \bigcup_{j \in J} f^{-1}(Y_j) & \quad \text{nach Definition (4.6) der Vereinigungsmenge.} \quad \square \end{aligned}$$

Beispiel 6.9 (Bilder und Urbilder von Vereinigungen und Durchschnitten).

In (6.4b) gilt i. A. nicht die Gleichheit, wie folgendes Beispiel zeigt: Es sei

$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto f(x, y) := x \in \mathbb{R}.$$

Für die Mengen $A := \{(0, 0)\}$ und $B = \{(0, 1)\}$ gilt

$$\begin{aligned} f(A \cap B) &= f(\emptyset) = \emptyset, \\ \text{aber } f(A) \cap f(B) &= \{0\} \cap \{0\} = \{0\}. \end{aligned} \quad \triangle$$

§ 6.1 INJEKTIVITÄT UND SURJEKTIVITÄT

Definition 6.10 (Injektivität, Surjektivität, Bijektivität).

Eine Funktion $f: X \rightarrow Y$ heißt

- (i) **surjektiv** (englisch: *surjective, onto*) oder **Surjektion** oder **rechtstotal** (englisch: *right-total*), wenn $f(X) = Y$ gilt.⁵¹ Man sagt auch, f bilde X **auf** Y ab.

Äquivalent dazu ist

$$\forall y \in Y (f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset)$$

- (ii) **injektiv** (englisch: *injective, one-to-one*) oder **Injektion** oder **linkseindeutig** (englisch: *left-unique*), wenn für alle $x_1, x_2 \in X$ gilt: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.⁵²

Äquivalent dazu ist

$$\forall y \in Y (f^{-1}(\{y\}) \text{ hat kein oder genau ein Element})$$

- (iii) **bijektiv** (englisch: *bijjective*), wenn f surjektiv und injektiv ist.⁵³

Äquivalent dazu ist

$$\forall y \in Y (f^{-1}(\{y\}) \text{ hat genau ein Element}) \quad \triangle$$

Als Substantive sind die Bezeichnungen **Surjektion** (englisch: *surjection*), **Injektion** (englisch: *injection*) und **Bijektion** (englisch: *bijection*) geläufig.

Quizfrage 6.1: Können Sie (nicht-mathematische) Beispiele für injektive, surjektive bzw. bijektive Funktionen benennen?

Lemma 6.11 (Bijektiv-Machen einer injektiven Funktion).

Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine injektive Funktion. Dann ist $f|_{f(X)}$ (also die Einschränkung der Zielmenge auf die tatsächliche Bildmenge) bijektiv.

Beweis. Der Beweis ist Gegenstand von **Hausaufgabe I-3.2**. □

Beispiel 6.12 (Injektivität, Surjektivität, Bijektivität).

⁵¹Die Surjektivität von f wird manchmal auch durch die Schreibweise $f: X \twoheadrightarrow Y$ ausgedrückt.

⁵²Die Injektivität von f wird manchmal auch durch die Schreibweise $f: X \rightarrowtail Y$ ausgedrückt.

⁵³Die Bijektivität von f wird manchmal auch durch die Schreibweise $f: X \xrightarrow{\sim} Y$ ausgedrückt.

(i) Die Funktion

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$$

ist nicht surjektiv und nicht injektiv.

(ii) Die Funktion

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

ist surjektiv, aber nicht injektiv. Hierbei ist $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen.

(iii) Die Funktion

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$$

ist injektiv, aber nicht surjektiv.

(iv) Die Funktion

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

ist bijektiv.

(v) Sind X und Y Mengen mit $X \subseteq Y$, dann ist die kanonische Injektion $i_{X \rightarrow Y}$ injektiv. \triangle

Definition 6.13 (Komposition von Funktionen).

Es seien $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ Funktionen. Die Funktion

$$X \ni x \mapsto h(x) := g(f(x)) \in Z$$

heißt die **Komposition** (englisch: **composition**, lateinisch: **componere**: zusammenstellen), die **Hinterinanderausführung**, die **Verknüpfung** oder die **Verkettung** von f und g . Sie wird auch mit $h = g \circ f$ bezeichnet. Um die Reihenfolge klar zu benennen, sagt man auch „ **g nach f** “. \triangle

Wir können den Sachverhalt aus [Definition 6.13](#) auch durch

$$\begin{array}{ccccc} & & g & & f \\ & & \longleftarrow & & \longleftarrow \\ Z & & Y & & X \\ & \longleftarrow & & \longleftarrow & \\ & & g \circ f & & \end{array}$$

illustrieren.

Die Voraussetzung, dass die Zielmenge von f mit der Definitionsmenge von g übereinstimmt, kann relaxiert werden. Die Komposition $g \circ f$ ist definiert, sofern $f(X) \subseteq Y$ gilt.

Beispiel 6.14 (Komposition von Funktionen).

Es seien

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto f(x) := x^2 \in \mathbb{R},$$

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto g(x) := x + 1 \in \mathbb{R}.$$

Dann sind $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ und $g(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$, also sind sowohl $g \circ f$ als auch $f \circ g$ definiert. Sie sind gegeben durch

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto (g \circ f)(x) := x^2 + 1 \in \mathbb{R},$$

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto (f \circ g)(x) := (x + 1)^2 \in \mathbb{R}. \quad \triangle$$

Bemerkung 6.15 (Komposition mit der Identität und mit der kanonischen Einbettung).

Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine Funktion. Dann gilt

$$f \circ \text{id}_X = f = \text{id}_Y \circ f, \quad (6.5)$$

$$f|_A = f \circ i_{A \rightarrow X} \quad \text{für } A \subseteq X, \quad (6.6)$$

$$f = (i_{Y \rightarrow B} \circ f)|^Y \quad \text{für } B \supseteq Y. \quad (6.7)$$

△

Lemma 6.16 (Komposition von Funktionen ist assoziativ).

Es seien $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ und $h: Z \rightarrow W$ Funktionen. Dann gilt $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$, d. h., die Komposition von Funktionen ist assoziativ.

Beweis. Für $x \in X$ gilt

$$\begin{aligned} ((h \circ g) \circ f)(x) &= (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))) \\ \text{und } (h \circ (g \circ f))(x) &= h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))). \end{aligned}$$

Folglich stimmen $(h \circ g) \circ f: X \rightarrow W$ und $h \circ (g \circ f): X \rightarrow W$ in Definitionsbereich, Zielmenge und Abbildungsvorschrift überein. □

Lemma 6.17 (Komposition injektiver und surjektiver Funktionen).

Es seien $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ Funktionen.

- (i) Sind f und g beide injektiv, so ist auch $g \circ f$ injektiv.
- (ii) Sind f und g beide surjektiv, so ist auch $g \circ f$ surjektiv.
- (iii) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.
- (iv) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv.

Beweis. **Aussage (i):** Für $x_1, x_2 \in X$ gelte $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$, also $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Aus der Injektivität von g folgt $f(x_1) = f(x_2)$, und aus der Injektivität von f folgt weiter $x_1 = x_2$. Also ist $g \circ f$ injektiv.

Aussage (ii): Es sei $z \in Z$. Aufgrund der Surjektivität von g gibt es ein $y \in Y$, sodass $z = g(y)$ gilt. Wegen der Surjektivität von f gibt es ein $x \in X$, sodass $y = f(x)$ gilt. Es gilt also $z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$, d. h., $z \in (g \circ f)(X)$.

Aussage (iii): Es seien $x_1, x_2 \in X$, sodass $f(x_1) = f(x_2)$ gilt. Dann gilt auch $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, und wegen der Injektivität von $g \circ f$ folgt $x_1 = x_2$, d. h., f ist injektiv.

Aussage (iv): Es sei $z \in Z$. Aufgrund der Surjektivität von $g \circ f$ gibt es ein $x \in X$, sodass $z = g(f(x))$ gilt. Das heißt aber $z = g(y)$ für $y = f(x)$, also ist g surjektiv. □

Folgerung 6.18 (Komposition zur Identität).

Es seien $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow X$ Funktionen. Wenn $g \circ f = \text{id}_X$ ist, dann ist f injektiv und g surjektiv.

Beweis. Die Identitätsabbildung id_X ist bijektiv. Aus **Lemma 6.17**, **Aussagen (iii)** und **(iv)** folgt daher, dass f injektiv und g surjektiv ist. □

§ 6.2 UMKEHRABBILDUNG

Lemma 6.19 (Charakterisierung der Bijektivität).

Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine Funktion. Dann sind äquivalent:

- (i) f ist bijektiv.
- (ii) Für alle $y \in Y$ gibt es genau ein $x \in X$ mit der Eigenschaft $f(x) = y$.
- (iii) Es existiert eine Abbildung $g: Y \rightarrow X$ mit der Eigenschaft $g \circ f = \text{id}_X$ und $f \circ g = \text{id}_Y$. Die Abbildung g ist eindeutig bestimmt und notwendig bijektiv.

Beweis. **Aussage (i) \Rightarrow Aussage (ii):** Es sei f bijektiv, also surjektiv und injektiv. Ist $y \in Y$ beliebig, dann folgt aus der Surjektivität die Existenz eines $x_1 \in X$ mit $f(x_1) = y$. Ist $x_2 \in X$ ein weiteres Element mit $f(x_2) = y$, dann folgt aus der Injektivität $x_1 = x_2$.

Aussage (ii) \Rightarrow Aussage (iii): Wir definieren die Abbildung $g: Y \rightarrow X$ wie folgt: Wir setzen für $y \in Y$ als $g(y)$ das nach Voraussetzung eindeutig definierte $x \in X$, für das $y = f(x)$ gilt. Für diese Funktion haben wir also $g(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x \quad \text{für alle } x \in X$$

sowie

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = y \quad \text{für alle } y \in Y.$$

Damit ist $g \circ f = \text{id}_X$ und $f \circ g = \text{id}_Y$ gezeigt.

Es sei nun $\widehat{g}: Y \rightarrow X$ eine weitere Funktion mit der Eigenschaft $f \circ \widehat{g} = \text{id}_Y$. Dann gilt

$$\begin{aligned} g &= g \circ \text{id}_Y && \text{nach (6.5)} \\ &= g \circ (f \circ \widehat{g}) && \text{nach Voraussetzung} \\ &= (g \circ f) \circ \widehat{g} && \text{nach Lemma 6.16} \\ &= \text{id}_X \circ \widehat{g} && \text{nach Voraussetzung} \\ &= \widehat{g} && \text{nach (6.5)}. \end{aligned}$$

Aussage (iii) \Rightarrow Aussage (i): Die Abbildung $g \circ f = \text{id}_X$ ist bijektiv, insbesondere injektiv. Aus Lemma 6.17 (iii) folgt also, dass f injektiv ist. Die Abbildung $f \circ g = \text{id}_Y$ ist bijektiv, insbesondere surjektiv. Aus Lemma 6.17 (iv) folgt also, dass f surjektiv ist. \square

Die Funktion $g: Y \rightarrow X$ aus Aussage (iii) heißt die **Umkehrfunktion**, **Umkehrabbildung**, **inverse Funktion** oder **inverse Abbildung** (englisch: **inverse map**) von f . Sie wird mit $f^{-1}: Y \rightarrow X$ bezeichnet. Für ihre Abbildungsvorschrift gilt $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$. Die Funktion $f: X \rightarrow Y$ heißt **invertierbar** (englisch: **invertible**), wenn die Umkehrfunktion existiert. Nach Lemma 6.19 ist das genau dann der Fall, wenn f bijektiv ist.

Bemerkung 6.20 (Umkehrfunktion).

Das Symbol f^{-1} für die Umkehrfunktion muss vom Urbild der Funktion f unterschieden werden. Wenn die Umkehrfunktion von $f: X \rightarrow Y$ existiert, so gilt jedoch

$$\underbrace{f^{-1}(\{y\})}_{\text{Urbild von } \{y\}} = \underbrace{\{f^{-1}(y)\}}_{\text{Wert der Umkehrfunktion bei } y}. \quad \triangle$$

Satz 6.21 (Umkehrfunktion der Komposition).

Es seien $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ bijektive Funktionen. Dann ist auch $g \circ f$ bijektiv, und die Umkehrfunktion ist gegeben durch

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}. \quad (6.8)$$

Quizfrage 6.2: Wie erklärt man sich anschaulich, dass sich bei der Umkehrfunktion die Reihenfolge ändert?

Beweis. Die Bijektivität von $g \circ f$ folgt sofort aus [Lemma 6.17](#), [Aussagen \(i\)](#) und [\(ii\)](#). Wir wissen über die Abbildungsvorschrift

$$\begin{aligned} (g \circ f)^{-1}(z) &= x \\ \Leftrightarrow (g \circ f)(x) &= z \\ \Leftrightarrow g(f(x)) &= z \\ \Leftrightarrow f(x) &= g^{-1}(z) \\ \Leftrightarrow x &= f^{-1}(g^{-1}(z)) \\ \Leftrightarrow x &= (f^{-1} \circ g^{-1})(z) \end{aligned}$$

für alle $x \in X$ und $z \in Z$. Das bedeutet aber $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. □

Lemma 6.22 (Charakterisierung der Injektivität).

Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine Funktion und $X \neq \emptyset$. Dann sind äquivalent:

- (i) f ist injektiv.
- (ii) Es existiert eine Abbildung $g: Y \rightarrow X$ mit der Eigenschaft $g \circ f = \text{id}_X$. Eine solche Abbildung heißt eine **Linksinverse** (englisch: **left inverse**) von f . Sie ist notwendig surjektiv. Ihre Einschränkung $g|_{f(X)}$ auf das Bild von f ist eindeutig.

Beweis. [Aussage \(i\)](#) \Rightarrow [Aussage \(ii\)](#): Wir definieren zunächst eine Abbildung $\bar{g}: f(X) \rightarrow X$ wie folgt: Wir setzen für $y \in f(X)$ als $\bar{g}(y)$ das wegen der Injektivität eindeutig definierte $x \in X$, für das $y = f(x)$ gilt. Für diese Funktion haben wir also $\bar{g}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$ und damit

$$(\bar{g} \circ f)(x) = \bar{g}(f(x)) = x \quad \text{für alle } x \in X.$$

Damit ist $\bar{g} \circ f = \text{id}_X$ gezeigt. Aufgrund von [Folgerung 6.18](#) ist \bar{g} surjektiv. Wir setzen nun $\bar{g}: f(X) \rightarrow X$ zu $g: X \rightarrow X$ fort. Dazu wählen wir irgendein $x_0 \in X$ und setzen $g(y) := \bar{g}(y)$ für $y \in f(X)$ und $g(y) := x_0$ für $y \in Y \setminus f(X)$. Die Funktion g erbt die Surjektivität von \bar{g} .

Angenommen, $h: Y \rightarrow X$ sei eine andere Linksinverse von f . Dann gilt für $y \in f(X)$ aufgrund der Injektivität von f : Es gibt genau ein $x \in X$ mit der Eigenschaft $y = f(x)$. Wegen $h(y) = h(f(x)) = x$ und ebenso $g(y) = g(f(x)) = x$ müssen g und h auf $f(X)$ übereinstimmen. □

Eine analoge Charakterisierung der Surjektivität folgt erst in [Satz 6.34](#), weil wir dafür interessanterweise das Auswahlaxiom benötigen.

§ 6.3 MÄCHTIGKEIT VON MENGEN

Mit Hilfe von Funktionen können wir Mengen in ihrer Mächtigkeit, das heißt vereinfacht gesagt bzgl. der Anzahl ihrer Elemente, vergleichen.

Definition 6.23 (Gleichmächtigkeit von Mengen).

Es seien X und Y Mengen. Wir sagen, X sei **gleichmächtig** (englisch: *equinumerous*) zu Y , wenn es eine bijektive Abbildung $f: X \rightarrow Y$ gibt. Wir schreiben in diesem Fall $X \sim Y$. \triangle

Die Gleichmächtigkeit von Mengen ist eine Äquivalenzrelation auf der Klasse aller Mengen, siehe [Hausaufgabe I-3.3](#). Die Äquivalenzklassen heißen **Kardinalzahlen** (englisch: *cardinal numbers*).

Definition 6.24 (Endlichkeit, Abzählbarkeit, Überabzählbarkeit).

Es sei X eine Menge.

- (i) X heißt **endlich** (englisch: *finite*), wenn $X \sim \llbracket 1, n \rrbracket$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gilt, ansonsten **unendlich** (englisch: *infinite*).
- (ii) Wenn X endlich ist mit $X \sim \llbracket 1, n \rrbracket$, dann heißt $n \in \mathbb{N}_0$ die **Mächtigkeit** oder **Kardinalität** (englisch: *cardinality*) von X . Wir schreiben dann: $\#X = n$.⁵⁴
- (iii) X heißt **abzählbar unendlich** (englisch: *countably infinite*), wenn $X \sim \mathbb{N}$ gilt.
- (iv) X heißt **abzählbar** (englisch: *countable*), wenn X entweder endlich oder abzählbar unendlich ist, ansonsten **überabzählbar** (englisch: *uncountable*). \triangle

Beachte: Die leere Menge \emptyset ist nur zu sich selbst gleichmächtig. Sie ist die einzige Menge mit Mächtigkeit 0.

Beispiel 6.25 (Gleichmächtigkeit von Mengen, Abzählbarkeit, Überabzählbarkeit).

- (i) Die Menge der ganzen Zahlen \mathbb{Z} ist gleichmächtig zur Menge der geraden ganzen Zahlen $\{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Sie ist abzählbar unendlich.
- (ii) Die Menge der rationalen Zahlen \mathbb{Q} ist abzählbar unendlich.
(Beweis in der Lehrveranstaltung *Analysis*)
- (iii) Die Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Mengen ist wieder abzählbar.
- (iv) Die Menge der reellen Zahlen \mathbb{R} ist überabzählbar.
(Beweis in der Lehrveranstaltung *Analysis*) \triangle

Lemma 6.26 (Veränderung der Kardinalität um 1).

Es sei X eine endliche Menge und $x \in X$. Dann gilt

$$\#X = \#(X \setminus \{x\}) + 1. \quad (6.9)$$

Beweis. Es sei $n = \#(X \setminus \{x\}) \in \mathbb{N}_0$. Es gibt also eine bijektive Abbildung $\widehat{f}: \{1, \dots, n\} \rightarrow X \setminus \{x\}$. Wir definieren $f: \{1, \dots, n+1\} \rightarrow X$ durch $f(i) := \widehat{f}(i)$ für $i = 1, \dots, n$ und $f(n+1) := x$. Dann ist f ebenfalls bijektiv, d. h., $\#X = n+1 = \#(X \setminus \{x\}) + 1$. \square

⁵⁴In dieser Lehrveranstaltung verwenden wir das Symbol $\#$ nur für endliche Mengen.

Satz 6.27 (Funktionen auf endlichen Mengen).

Es seien X und Y **endliche**, gleichmächtige Mengen und $f: X \rightarrow Y$ eine Funktion. Dann sind äquivalent:

- (i) f ist injektiv.
- (ii) f ist surjektiv.
- (iii) f ist bijektiv.

Beweis. **Aussage (i) \Rightarrow Aussage (ii):** Wir führen einen Induktionsbeweis nach der Mächtigkeit $n = \#X = \#Y$. Der Induktionsanfang ist der Fall $n = 0$, also $X = Y = \emptyset$. Dann ist die einzig mögliche Abbildung die leere Abbildung, diese ist bijektiv. Im Induktionsschritt schließen wir von n auf $n + 1$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Es sei also nun $\#X = \#Y = n + 1$. Wir wählen ein $x \in X$ und setzen $y := f(x)$. Dann gilt aufgrund von **Lemma 6.26** $\#X \setminus \{x\} = \#Y \setminus \{y\} = n$.

Wir bezeichnen mit $\widehat{f}: X \setminus \{x\} \rightarrow Y \setminus \{y\}$ die Einschränkung von f . Diese ist aufgrund der vorausgesetzten Injektivität definiert, denn x ist das einzige Element von X , das durch f auf y abgebildet wird. Außerdem erbt \widehat{f} die Injektivität von f . Nach Induktionsvoraussetzung ist \widehat{f} daher auch surjektiv, alle Elemente von $Y \setminus \{y\}$ liegen also im Bild von \widehat{f} und damit im Bild von f . Da auch y im Bild von f liegt, ist f tatsächlich surjektiv.

Aussage (ii) \Rightarrow Aussage (i): Wir führen auch hier einen Induktionsbeweis nach der Mächtigkeit $n = \#X = \#Y$. Der Induktionsanfang beinhaltet die Fälle $n = 0$ und $n = 1$. Im Fall $n = 0$ ist $X = Y = \emptyset$, dann ist die einzig mögliche Abbildung die leere Abbildung, diese ist bijektiv. Im Fall $n = 1$ gibt es nur eine mögliche Abbildung, diese ist ebenfalls bijektiv. Im Induktionsschritt schließen wir von n auf $n + 1$ für $n \in \mathbb{N}$. Es sei also nun $\#X = \#Y = n + 1$. Wir führen einen Widerspruchsbeweis, nehmen also an, dass f surjektiv, aber *nicht* injektiv ist. Dann gibt es ein $\bar{y} \in Y$, sodass das Urbild $f^{-1}(\{\bar{y}\})$ (mindestens) aus zwei verschiedenen Elementen besteht, sagen wir $\bar{x}, \bar{\bar{x}} \in f^{-1}(\{\bar{y}\})$ und $\bar{x} \neq \bar{\bar{x}}$. Wir wählen außerdem ein $\widehat{y} \in Y \setminus \{\bar{y}\}$ aus, was wegen $\#Y = n + 1 \geq 2$ möglich ist. Dazu existiert ein \widehat{x} mit $f(\widehat{x}) = \widehat{y}$. Wegen $\widehat{y} \neq \bar{y}$ ist $\widehat{x} \neq \bar{x}$ und $\widehat{x} \neq \bar{\bar{x}}$.

Wir konstruieren nun eine Funktion $\widehat{f}: X \setminus \{\bar{x}\} \rightarrow Y \setminus \{\bar{y}\}$ durch

$$\widehat{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{im Fall } f(x) \neq \bar{y}, \\ \widehat{y} & \text{im Fall } f(x) = \bar{y}. \end{cases}$$

Dann ist \widehat{f} ebenfalls surjektiv, denn:

- (1) Für jedes $y \in Y \setminus \{\bar{y}, \widehat{y}\}$ existiert aufgrund der Surjektivität von f ein $x \in X$ mit $\widehat{f}(x) = f(x) = y$, und wegen $f(\bar{x}) = \bar{y}$ ist $x \in X \setminus \{\bar{x}\}$.
- (2) Außerdem gilt $f(\bar{\bar{x}}) = \bar{y}$, also $\widehat{f}(\bar{\bar{x}}) = \widehat{y}$.

Aufgrund von **Lemma 6.26** gilt wieder $\#X \setminus \{\bar{x}\} = \#Y \setminus \{\bar{y}\} = n$. Nach Induktionsvoraussetzung ist \widehat{f} daher auch injektiv. Jedoch enthält $\widehat{f}^{-1}(\{\widehat{y}\})$ neben \widehat{x} auch noch mindestens das weitere Element $\bar{\bar{x}} \in f^{-1}(\{\bar{y}\})$. Das steht im Widerspruch zur Injektivität von \widehat{f} .

Wir haben jetzt **Aussage (i) \Leftrightarrow Aussage (ii)** bewiesen. Da die Bijektivität sich aus Surjektivität und Injektivität zusammensetzt, gilt auch **Aussage (i) \Leftrightarrow Aussage (ii) \Leftrightarrow Aussage (iii)**. \square

Beachte: Die Aussage von [Satz 6.27](#) ist falsch, wenn X und Y zwar gleichmächtig, aber nicht endlich sind, siehe [Hausaufgabe I-3.3](#).

Der Begriff der Gleichmächtigkeit von Mengen erlaubt noch keinen Vergleich von Mengen. Dazu dient folgende Definition.

Definition 6.28 (Vergleich der Mächtigkeit von Mengen).

Es seien X und Y Mengen. Wir sagen, X sei **höchstens gleichmächtig** (englisch: *at most equinumerous*) zu Y , wenn es eine bijektive Abbildung von X auf eine Teilmenge von Y gibt. Wir schreiben in diesem Fall $X \lesssim Y$. △

Die Reflexivität und Transitivität der Relation \lesssim sind leicht einzusehen. (**Quizfrage 6.3:** Details?) Der Beweis der Antisymmetrie ist jedoch aufwändig und erfordert den **Satz von Cantor-Bernstein-Schröder**, der äquivalent zum Auswahlaxiom (siehe § 6.5) ist. Unter Zuhilfenahme des Auswahlaxioms kann man außerdem zeigen, dass zwei Mengen bzgl. \lesssim stets vergleichbar sind. Es folgt, dass \lesssim sogar eine totale Ordnung auf der Menge aller Kardinalzahlen ist.

§ 6.4 FAMILIEN UND FOLGEN

Definition 6.29 (Familie von Elementen, Teilfamilie, Oberfamilie, Folge, endliche Folge).

Es seien I und Y Mengen.

(i) Eine Abbildung

$$I \ni i \mapsto y(i) := y_i \in Y$$

heißt eine **Familie von Elementen** (englisch: *family of elements*) aus Y mit der **Indexmenge** (englisch: *index set*) I . Kurz wird diese auch mit $(y_i)_{i \in I}$ bezeichnet.

(ii) Ist $I_0 \subseteq I$, dann heißt $(y_i)_{i \in I_0}$ eine **Teilfamilie** (englisch: *subfamily*) von $(y_i)_{i \in I}$, und $(y_i)_{i \in I}$ heißt eine **Oberfamilie** (englisch: *superfamily*) von $(y_i)_{i \in I_0}$.

(iii) Ist I abzählbar unendlich, gilt also $I \sim \mathbb{N}$, so heißt $(y_i)_{i \in I}$ eine **abzählbar unendliche Familie** (englisch: *countably infinite family*). Ist speziell $I = \mathbb{N}$ oder allgemeiner $I = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq n_0\}$ mit einem Startindex $n_0 \in \mathbb{Z}$, so heißt $(y_i)_{i \in I}$ eine **Folge** (englisch: *sequence*) in Y .

(iv) Ist I endlich, gilt also $I \sim \llbracket 1, n \rrbracket$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$, so heißt $(y_i)_{i \in I}$ eine **endliche Familie** (englisch: *finite family*) der Kardinalität n . Ist speziell $I = \llbracket 1, n \rrbracket$, so heißt $(y_i)_{i \in I}$ eine **endliche Folge** (englisch: *finite sequence*) in Y der Kardinalität n . △

Bemerkung 6.30 (Familien und Mengen).

(i) Im Unterschied zu einer Menge kann eine Familie $(y_i)_{i \in I}$ Elemente mehrfach enthalten.

(ii) Jeder Familie $(y_i)_{i \in I}$ von Elementen aus Y können wir eine Menge $\{y_i \mid i \in I\} \subseteq Y$ zuordnen.

(iii) Wir können eine endliche Folge auch als **n -Tupel** (englisch: *n -tuple*) (y_1, y_2, \dots, y_n) notieren. Während $(y_i)_{i \in I}$ keine Reihenfolge hat (da I als Menge ungeordnet ist), hat ein n -Tupel jedoch eine festgelegte Reihenfolge. △

Beispiel 6.31 (Folge).

Die Abbildung

$$\mathbb{N} \ni n \mapsto y_n := \frac{1}{n} \in \mathbb{R}$$

ist eine Folge in \mathbb{R} mit der Standard-Indexmenge \mathbb{N} . Kurz wird diese Folge auch als $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ bezeichnet. △

§ 6.5 DAS AUSWAHLAXIOM

Das **Auswahlaxiom** (englisch: **axiom of choice**) der axiomatischen Mengenlehre besagt: Ist \mathcal{U} eine Menge von nichtleeren Mengen, dann gibt es eine Funktion $F: \mathcal{U} \rightarrow \bigcup \mathcal{U}$, sodass gilt:

$$\forall U \in \mathcal{U} \quad (F(U) \in U).$$

Eine solche Funktion F heißt **Auswahlfunktion** (englisch: **choice function**) für \mathcal{U} , weil sie aus jedem Element U von \mathcal{U} irgendein Element auswählt. Das Auswahlaxiom besagt also, dass es möglich ist, aus jedem Element von \mathcal{U} ein Element auszuwählen, selbst wenn \mathcal{U} überabzählbar viele Mengen als Elemente enthält und man daher nicht in der Lage ist, ein Verfahren anzugeben, nach dem die Auswahl geschehen soll.

Das Auswahlaxiom ist kein fester Bestandteil der axiomatischen Mengenlehre nach Zermelo und Fraenkel, sondern es kann dazugenommen werden oder auch nicht.⁵⁵ Es wird aber wohl von den meisten Mathematiker:innen akzeptiert. In Fällen, in denen \mathcal{U} nur endlich viele Mengen enthält, wird das Auswahlaxiom nicht benötigt, weil seine Aussage bereits aus den anderen Axiomen folgt. Wir werden in der Vorlesung darauf hinweisen, wenn ein Resultat von der Hinzunahme des Auswahlaxioms abhängt. Einige Beispiele folgen bereits in diesem Abschnitt, siehe [Satz 6.34](#).

Definition 6.32 (allgemeines kartesisches Produkt).

Es sei I eine Indexmenge und $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von Mengen. Dann ist das **kartesische Produkt** (englisch: **Cartesian product**) dieser Familie von Mengen gegeben durch

$$\prod_{i \in I} A_i := \left\{ F: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \mid F(i) \in A_i \text{ für alle } i \in I \right\}. \tag{6.10}$$

△

Das kartesische Produkt einer Familie von Mengen besteht also aus *Funktionen* auf der Indexmenge I , deren Funktionswerte jeweils im richtigen Faktor liegen. Im Fall $I = \emptyset$ besteht das kartesische Produkt (6.10) aus dem einzigen Element $F: \emptyset \rightarrow \emptyset$.

Bemerkung 6.33 (allgemeine kartesische Produkte).

Das **kartesische Produkt** hatten wir bisher nur für endlich viele Mengen definiert, siehe [Definition 4.8](#). Die allgemeine [Definition 6.32](#) erfordert den Funktionenbegriff, der nun zur Verfügung steht. Die [Definition 6.32](#) lässt sich als Verallgemeinerung der [Definition 4.8](#) verstehen: Ist nämlich die Indexmenge $I = \llbracket 1, n \rrbracket$, so ist $\prod_{i \in I} A_i$ nach (6.10) die Menge aller n -elementigen Folgen. Wenn wir eine solche endliche Folge gemäß der natürlichen Kleiner-Gleich-Ordnung der Indexmenge I als n -Tupel (a_1, a_2, \dots, a_n) schreiben, so haben wir ein Element aus $\prod_{i \in I} A_i$ gemäß [Definition 4.8](#). Diese Zuordnung ist bijektiv.

⁵⁵Man spricht von den ZF-Axiomen (ohne das Auswahlaxiom) und von den ZFC-Axiomen (mit Auswahlaxiom).

Wenn alle Mengen $A_i = A$ sind, so schreiben wir statt $\prod_{i \in I} A$ auch A^I . Es ist also beispielsweise

- $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ die Menge aller Folgen mit Werten in \mathbb{R} ,
- $\{0, 1\}^A$ die Menge aller $\{0, 1\}$ -wertigen (binären) Funktionen auf einer Menge A .

Letztere wird manchmal als Schreibweise für die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ verwendet. (**Quizfrage 6.4:** Inwiefern ist diese Schreibweise gerechtfertigt?) △

Das Auswahlaxiom hat eine ganze Menge äquivalenter, teilweise überraschender Charakterisierungen, von denen der nächste Satz (ohne Beweis) einige angibt.

Satz 6.34 (zum Auswahlaxiom äquivalente Aussagen).

Folgende Aussagen sind in der Mengenlehre von Zermelo-Fraenkel äquivalent:

- (i) Es gilt das Auswahlaxiom.
- (ii) Ist I eine beliebige Menge und $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie nichtleerer Mengen, so ist das kartesische Produkt $\prod_{i \in I} A_i$ eine nichtleere Menge.
- (iii) Jede Äquivalenzrelation besitzt ein vollständiges Repräsentantensystem.
- (iv) Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine beliebige Funktion. Dann sind äquivalent:
 - (a) f ist surjektiv.
 - (b) Es existiert eine Abbildung $h: Y \rightarrow X$ mit der Eigenschaft $f \circ h = \text{id}_Y$. Eine solche Abbildung heißt eine **Rechtsinverse** (englisch: **right inverse**) von f . Sie ist notwendig injektiv.
- (v) Es gilt das **Lemma von Zorn 6.35**.

Lemma 6.35 (Lemma von Zorn⁵⁶).

Es sei X mit der Relation \leq eine halbgeordnete Menge. Weiter besitze jede totalgeordnete Teilmenge $A \subseteq X$ eine obere Schranke in X .⁵⁷ Dann existiert in X ein maximales Element.

Wir werden das Auswahlaxiom in Gestalt des **Lemmas von Zorn 6.35** später noch verwenden. Wie angekündigt werden wir darauf hinweisen, wenn ein Resultat von der Hinzunahme des Auswahlaxioms oder der Verwendung eines zu ihm äquivalenten Resultats abhängt.

Die Schwierigkeiten in der intuitiven Erfassung des Auswahlaxioms und des äquivalenten **Lemmas von Zorn 6.35** (sowie des ebenfalls äquivalenten **Wohlordnungssatzes** (englisch: **well-ordering theorem**), den wir hier nicht angeben) werden in folgendem Zitat gut erfasst, das von dem Mathematiker **Jerry Lloyd Bona** stammt:

„The Axiom of Choice is obviously true, the well-ordering theorem is obviously false; and who can tell about Zorn’s Lemma?“

Ende der Vorlesung 6

Ende der Woche 3

⁵⁶englisch: **Zorn’s lemma**

⁵⁷ X kann also nicht die leere Menge sein.

Kapitel 2 Algebraische Strukturen

In diesem Kapitel geht es um die grundlegenden algebraischen Strukturen, Abbildungen zwischen Strukturen und die in ihnen geltenden Rechenregeln.

§ 7 HALBGRUPPEN UND GRUPPEN

Literatur: Beutelspacher, 2014, Kapitel 9, Deiser, 2022b, Kapitel 3.4, Fischer, Springborn, 2020, Kapitel 2.2

Definition 7.1 (Verknüpfung).

Es sei X eine Menge. Eine (**innere**) **Verknüpfung** (englisch: (**inner**) **operation**) auf X ist eine Abbildung $\star: X \times X \rightarrow X$. △

Wir schreiben $a \star b$ statt $\star(a, b)$.

Beispiel 7.2 (Verknüpfung).

- (i) Ist X endlich, so können wir eine Verknüpfung auf X mit Hilfe einer **Verknüpfungstafel** oder **Vernüpfungstabelle** (englisch: **Cayley table**) definieren, zum Beispiel

$$\begin{array}{l} +_2: \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\} \quad \text{mit der Verknüpfungstafel} \\ \cdot_2: \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\} \quad \text{mit der Verknüpfungstafel} \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} +_2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline \cdot_2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Quizfrage 7.1: Wo kommen die Definitionen dieser Verknüpfungen her?

Beachte: Die Konvention ist, dass die Zeile das erste Argument (a) und die Spalte das zweite Argument (b) einer Verknüpfung ($a \star b$) angibt.

- (ii) Die bekannten Verknüpfungen $+$ und \cdot in \mathbb{N}

$$\begin{array}{l} +: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad \text{mit } (x, y) \mapsto x + y \\ \cdot: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad \text{mit } (x, y) \mapsto x \cdot y \end{array}$$

sind Verknüpfungen auf \mathbb{N} . Analoges gilt für die Mengen \mathbb{N}_0 , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} und \mathbb{C} .

(iii) Es sei X eine Menge und $\mathbb{R}^X = \{f \mid f: X \rightarrow \mathbb{R}\}$. Dann sind durch die punktweise Addition und die punktweise Multiplikation

$$\begin{aligned} +: \mathbb{R}^X \times \mathbb{R}^X &\rightarrow \mathbb{R}^X & \text{mit } (f, g) &\mapsto f + g, \text{ definiert durch } (f + g)(x) := f(x) + g(x) \\ \cdot: \mathbb{R}^X \times \mathbb{R}^X &\rightarrow \mathbb{R}^X & \text{mit } (f, g) &\mapsto f \cdot g, \text{ definiert durch } (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x) \end{aligned}$$

Verknüpfungen auf der Menge der Funktionen $X \rightarrow \mathbb{R}$ definiert. (**Quizfrage 7.2:** Was benötigt man als Minimalvoraussetzung, um die Menge Y^X der Funktionen $X \rightarrow Y$ mit einer Verknüpfung ausstatten zu können?)

(iv) Es sei X eine Menge und $X^X = \{f \mid f: X \rightarrow X\}$. Dann ist durch die Komposition

$$\circ: X^X \times X^X \rightarrow X^X \quad \text{mit } (f, g) \mapsto f \circ g, \text{ definiert durch } (f \circ g)(x) := f(g(x))$$

eine Verknüpfung auf der Menge der Funktionen $X \rightarrow X$ definiert. △

§ 7.1 HALBGRUPPEN

Definition 7.3 (Halbgruppe).

Eine **Halbgruppe** (englisch: **semigroup**) (H, \star) ist eine Menge H mit einer **assoziativen Verknüpfung** (englisch: **associative operation**) \star auf H . Das heißt, es gilt $\star: H \times H \rightarrow H$ und

$$(x \star y) \star z = x \star (y \star z) \quad \text{für alle } x, y, z \in H. \tag{7.1}$$

△

Wegen der Assoziativität von \star dürfen wir für die Verknüpfung von drei oder mehr Elementen wie bei $x \star y \star z$ die Klammern weglassen.

Beispiel 7.4 (Halbgruppen).

Beispiele für Halbgruppen sind:

- (i) $(\mathbb{N}, +)$, (\mathbb{N}, \cdot) , $(\mathbb{N}_0, +)$, (\mathbb{N}_0, \cdot) , $(\mathbb{Z}, +)$, (\mathbb{Z}, \cdot) , $(\mathbb{Q}, +)$, (\mathbb{Q}, \cdot) , $(\mathbb{R}, +)$, (\mathbb{R}, \cdot) , $(\mathbb{C}, +)$, (\mathbb{C}, \cdot)
- (ii) $(\{0, 1\}, +_2)$ und $(\{0, 1\}, \cdot_2)$ aus [Beispiel 7.2](#)
- (iii) $(\mathbb{R}^X, +)$ und (\mathbb{R}^X, \cdot) . Sie erben die Assoziativität von $(\mathbb{R}, +)$ und (\mathbb{R}, \cdot) .
- (iv) (X^X, \circ) . Die Assoziativität von \circ wurde in [Lemma 6.16](#) gezeigt.
- (v) Ist X eine Menge, dann sind $(\mathcal{P}(X), \cap)$, $(\mathcal{P}(X), \cup)$ und $(\mathcal{P}(X), \Delta)$ Halbgruppen.
- (vi) Es sei Σ eine nichtleere Menge und $\Sigma^* := \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \Sigma^n$, also die Menge von Tupeln beliebiger Länge. Wir definieren eine Verknüpfung \circ auf Σ^* durch die Konkatenation von Tupeln:

$$(x_1, \dots, x_n) \circ (y_1, \dots, y_m) := (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m).$$

Dann ist (Σ^*, \circ) eine Halbgruppe.¹ △

Beispiel 7.5 (Gegenbeispiele).

Keine Halbgruppen sind:

¹Diese findet Anwendung bei der Definition formaler Sprachen in der Informatik. Dort ist Σ in der Regel endlich und heißt das **Alphabet** (englisch: **alphabet**) und Σ^* die **Kleenesche Hülle** (englisch: **Kleene star**) von Σ . Die Elemente von Σ^* heißen **Worte** über dem Alphabet Σ . Sie werden in der Regel ohne die Klammern notiert, also etwa $ab \circ ba = abba$.

- (i) $(\mathbb{N}, -)$, denn $-$ („Minus“) ist keine Verknüpfung auf \mathbb{N} , da beispielsweise $1 - 1$ kein Wert in \mathbb{N} zugeordnet ist.
- (ii) $(\mathbb{Z}, -)$, denn $-$ („Minus“) ist zwar eine Verknüpfung auf \mathbb{Z} , ist aber nicht assoziativ.
- (iii) (\mathbb{N}, \wedge) mit $a \wedge b := a^b$. Es ist zwar $\wedge: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine Verknüpfung, sie ist aber nicht assoziativ. Beispielsweise ist

$$2 \wedge (3 \wedge 2) = 2^9 \quad \text{aber} \quad (2 \wedge 3) \wedge 2 = 8^2. \quad \triangle$$

Definition 7.6 (neutrales Element).

Es sei (H, \star) eine Halbgruppe. Ein Element $e \in H$ heißt **neutrales Element** (englisch: **neutral element**) von (H, \star) , wenn gilt:

$$e \star x = x \star e = x \quad \text{für alle } x \in H. \quad (7.2)$$

Falls in (H, \star) ein neutrales Element existiert, dann heißt (H, \star) auch ein **Monoid** (englisch: **monoid**). \triangle

Lemma 7.7 (neutrale Elemente sind eindeutig).

Es sei (H, \star) eine Halbgruppe. Sind e_1 und e_2 beides neutrale Elemente von (H, \star) , dann gilt $e_1 = e_2$.

Beweis. Es gilt

$$e_1 = e_1 \star e_2 = e_2. \quad \square$$

Beispiel 7.8 (Halbgruppen mit und ohne neutrale Elemente).

- (i) $(\mathbb{N}_0, +)$, $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$ haben alle das neutrale Element 0.
- (ii) $(\mathbb{N}, +)$ besitzt kein neutrales Element.
- (iii) (\mathbb{N}, \cdot) , (\mathbb{N}_0, \cdot) , (\mathbb{Z}, \cdot) , (\mathbb{Q}, \cdot) , (\mathbb{R}, \cdot) , (\mathbb{C}, \cdot) haben alle das neutrale Element 1.
- (iv) $(\{0, 1\}, +_2)$ aus [Beispiel 7.2](#) besitzt das neutrale Element 0.
- (v) $(\{0, 1\}, \cdot_2)$ aus [Beispiel 7.2](#) besitzt das neutrale Element 1.
- (vi) $(\mathcal{P}(X), \cap)$ besitzt das neutrale Element X .
- (vii) $(\mathcal{P}(X), \cup)$ besitzt das neutrale Element \emptyset .
- (viii) $(\mathcal{P}(X), \Delta)$ besitzt das neutrale Element \emptyset .
- (ix) (Σ^*, \circ) aus [Beispiel 7.4](#) besitzt das neutrale Element $()$, genannt das **leere Tupel** (englisch: **empty tuple**) oder das **leere Wort** (englisch: **empty word**). \triangle

Definition 7.9 (Rechts- und Linkstranslation).

Es sei (H, \star) eine Halbgruppe. Für festes $a \in H$ heißt die Abbildung

$$\star_a: H \ni x \mapsto x \star a \in H \quad \text{die **Rechtstranslation** (englisch: **right translation**) mit } a, \quad (7.3a)$$

$${}_a\star: H \ni x \mapsto a \star x \in H \quad \text{die **Linkstranslation** (englisch: **left translation**) mit } a. \quad \triangle \quad (7.3b)$$

Beispiel 7.10 (Rechts- und Linkstranslation).

- (i) In $(\mathbb{R}, +)$ ist die Rechtstranslation mit $a = \sqrt{2}$ gegeben durch die Abbildung $x \mapsto x + \sqrt{2}$. Sie ist wegen der Kommutativität von $+$ identisch zur Linkstranslation mit a .

(ii) In $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \circ)$ und $g = x \mapsto 2x$ ist die Rechtstranslation mit g gegeben durch

$$\circ_g: \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \ni f \mapsto f \circ g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \quad \text{wobei } f(g(x)) = f(2x),$$

während die Linkstranslation mit g gegeben ist durch

$${}_g\circ: \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \ni f \mapsto g \circ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \quad \text{wobei } g(f(x)) = 2f(x). \quad \triangle$$

Quizfrage 7.3: Wie lässt sich der Begriff **neutrales Element** in einer Halbgruppe mit Hilfe der Begriffe **Rechtstranslation** und **Linkstranslation** ausdrücken?

Definition 7.11 (invertierbare Elemente).

Es sei (H, \star) eine Halbgruppe mit neutralem Element e . Ein Element $a \in H$ heißt **invertierbar** (englisch: **invertible**) oder eine **Einheit** (englisch: **unit**) von (H, \star) , wenn ein $b \in H$ existiert mit

$$a \star b = b \star a = e. \quad (7.4)$$

In diesem Fall heißt b ein zu a **inverses Element** (englisch: **inverse element**) oder ein **Inverses** zu a . △

Beachte: b ist Inverses zu a genau dann, wenn a Inverses zu b ist!

Lemma 7.12 (inverse Elemente sind eindeutig).

Es sei (H, \star) eine Halbgruppe mit neutralem Element e . Ist $a \in H$ invertierbar und sind b_1 und b_2 beides Inverse zu a , dann gilt $b_1 = b_2$.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} b_1 &= b_1 \star e \\ &= b_1 \star (a \star b_2) \\ &= (b_1 \star a) \star b_2 \\ &= e \star b_2 \\ &= b_2. \end{aligned} \quad \square$$

Quizfrage 7.4: Welches Element eines Monoids ist immer invertierbar? Was ist sein Inverses?

Bemerkung 7.13 (abkürzende Schreibweisen).

(i) Das inverse Element von a wird oft mit a' bezeichnet.

(ii) Bezeichnet man die Verknüpfung \star einer Halbgruppe H als „Addition“ und notiert sie als „+“ o. ä., so nennt man ein eventuell existierendes neutrales Element auch **Nullelement** (englisch: **additive identity**) „ 0_H “.

Für $n \in \mathbb{N}$ und $a \in H$ ist na eine Abkürzung für $a + \dots + a$ (n -mal). (**Quizfrage 7.5:** Warum ist $a + \dots + a$ auch ohne Setzen von Klammern wohldefiniert?)

Besitzt H das neutrale Element 0_H , so definieren wir auch $0a := 0_H$.

Ist weiter $a \in H$ invertierbar, so notieren wir die Inverse als $-a$. Dann ist auch na invertierbar für $n \in \mathbb{N}_0$, und wir setzen $(-n)a := -(na)$. Insbesondere ist $(-1)a := -a$ und $(-0)a := -(0a) = -0_H = 0_H$.

Es gilt

$$n(ma) = (n \cdot m)a \quad \text{und} \quad (n+m)a = na + ma \quad (7.5)$$

für alle $n, m \in \mathbb{N}$ bzw. $n, m \in \mathbb{N}_0$ bzw. $n, m \in \mathbb{Z}$.

Die Bezeichnung $a - b$ steht für $a + (-b)$, vorausgesetzt, b ist invertierbar.

- (iii) Bezeichnet man die Verknüpfung dagegen als „Multiplikation“ und notiert sie als „ \cdot “, so nennt man ein eventuell existierendes neutrales Element auch **Einselement** (englisch: **multiplicative identity**) „ 1_H “.

Für $n \in \mathbb{N}$ und $a \in H$ ist a^n eine Abkürzung für $a \cdot \dots \cdot a$ (n -mal).

Besitzt H das neutrale Element 1_H , so definieren wir auch $a^0 := 1_H$.

Ist weiter $a \in H$ invertierbar, so notieren wir die Inverse als a^{-1} . Dann ist auch a^n invertierbar für $n \in \mathbb{N}_0$, und wir setzen $a^{-n} = (a^n)^{-1}$. Insbesondere ist $a^{-0} = (a^0)^{-1} = 1_H^{-1} = 1_H$.

Es gilt

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} \quad \text{und} \quad a^{n+m} = a^n \cdot a^m \quad (7.6)$$

für alle $n, m \in \mathbb{N}$ bzw. $n, m \in \mathbb{N}_0$ bzw. $n, m \in \mathbb{Z}$.

- (iv) Bezeichnet man die Verknüpfung dagegen als „Komposition“ und notiert sie als „ \circ “, so nennt man ein eventuell existierendes neutrales Element auch **Identität** (englisch: **identity**) „ id “. In diesem Fall verwenden wir ebenfalls die multiplikative Notation, z. B. ist a^n eine Abkürzung für $a \circ \dots \circ a$ (n -mal). △

Beispiel 7.14 (invertierbare Elemente).

- (i) In $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{C}, +)$ sind alle Elemente invertierbar. Das Inverse von a wird mit $-a$ bezeichnet.
- (ii) In (\mathbb{Q}, \cdot) , (\mathbb{R}, \cdot) und (\mathbb{C}, \cdot) sind alle Elemente bis auf 0 invertierbar. Das Inverse von a wird mit a^{-1} oder $1/a$ bezeichnet.
- Die Bezeichnung $\frac{a}{b}$ steht für ab^{-1} , vorausgesetzt, b ist invertierbar.
- (iii) In $(\mathbb{N}_0, +)$ ist nur das Element 0 invertierbar. Die Inverse von 0 ist wiederum 0.
- (iv) In (\mathbb{Z}, \cdot) sind nur 1 und -1 invertierbar. Beide sind zu sich selbst invers.
- (v) In $(\{0, 1\}, +_2)$ aus [Beispiel 7.2](#) sind beide Elemente invertierbar. Beide sind zu sich selbst invers.
- (vi) In $(\{0, 1\}, \cdot_2)$ aus [Beispiel 7.2](#) ist nur das Element 1 invertierbar. Es ist zu sich selbst invers.
- (vii) In (X^X, \circ) sind genau die bijektiven Funktionen $X \rightarrow X$ invertierbar. △

Quizfrage 7.6: Welches sind die invertierbaren Elemente in den Monoiden $(\mathcal{P}(X), \cap)$, $(\mathcal{P}(X), \cup)$ und $(\mathcal{P}(X), \Delta)$?

§ 7.2 GRUPPEN

Definition 7.15 (Gruppe).

Es sei (H, \star) ein Monoid. (H, \star) heißt **Gruppe** (englisch: **group**), wenn jedes Element aus H ein Inverses besitzt. \triangle

Beachte: Es gilt also: (G, \star) Gruppe \Rightarrow (G, \star) Monoid \Rightarrow (G, \star) Halbgruppe.

Beispiel 7.16 (Gruppen und Gegenbeispiele).

(i) Es sei (H, \star) ein Monoid. Dann ist die Teilmenge der invertierbaren Elemente

$$E(H, \star) := \{a \in H \mid a \text{ ist invertierbar}\} \quad (7.7)$$

eine Gruppe, genannt die **Einheitengruppe** (englisch: **unit group, group of units**) $E(H, \star)$ von (H, \star) .

(ii) $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine Gruppe mit neutralem Element 0. Das Inverse zu $a \in \mathbb{Z}$ ist $-a \in \mathbb{Z}$, denn $a + (-a) = 0 = (-a) + a$. Dasselbe gilt für $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{C}, +)$.

(iii) (\mathbb{Z}, \cdot) ist ein Monoid, aber keine Gruppe, da nur 1 und -1 invertierbar sind.

(iv) $(\mathbb{Q}_{\neq 0}, \cdot)$ ist eine Gruppe mit neutralem Element 1. Das Inverse zu $a \in \mathbb{Q}_{\neq 0}$ ist $1/a \in \mathbb{Q}_{\neq 0}$. Dasselbe gilt für $(\mathbb{R}_{\neq 0}, \cdot)$ und $(\mathbb{C}_{\neq 0}, \cdot)$.

(v) Für $m \in \mathbb{N}$ bildet die Menge $\mathbb{Z}_m := \{0, 1, \dots, m-1\}$ mit der Verknüpfung $+_m$ eine abelsche Gruppe (siehe [Definition 7.19](#)). Dabei ist $+_m$ die **Addition modulo m** (englisch: **addition modulo m**) definiert als²

$$a +_m b := \begin{cases} a + b, & \text{falls } a + b \leq m - 1 \\ a + b - m, & \text{falls } a + b \geq m \end{cases} \quad (7.8)$$

= der natürliche Repräsentant von $a + b$ in der Restklasse $[a + b]$ modulo m
= Rest von $a + b$ bei ganzzahliger Division durch m .

Diese Gruppe heißt die **additive Gruppe von \mathbb{Z} modulo m** (englisch: **additive group of \mathbb{Z} modulo m**), geschrieben $(\mathbb{Z}_m, +_m)$.

Den Fall $m = 2$ kennen wir bereits als $(\{0, 1\}, +_2)$ aus [Beispiel 7.2](#).

(vi) Für $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, bildet die Menge \mathbb{Z}_m mit der Verknüpfung \cdot_m ein kommutatives Monoid. Dabei ist \cdot_m die **Multiplikation modulo m** (englisch: **multiplication modulo m**) definiert als³

$$a \cdot_m b := \text{der natürliche Repräsentant von } a \cdot b \text{ in der Restklasse } [a \cdot b] \text{ modulo } m \quad (7.9)$$

= Rest von $a \cdot b$ bei ganzzahliger Division durch m .

Dieses Monoid heißt das **multiplikative Monoid von \mathbb{Z} modulo m** (englisch: **multiplicative monoid of \mathbb{Z} modulo m**), geschrieben (\mathbb{Z}_m, \cdot_m) .

(\mathbb{Z}_m, \cdot_m) ist genau dann eine Gruppe, wenn $m = 1$ ist, also wenn $\mathbb{Z}_m = \{0\}$ gilt. In diesem Fall ist (\mathbb{Z}_1, \cdot_1) isomorph ([Definition 8.1](#)) zu $(\mathbb{Z}_1, +_1)$.

Den Fall $m = 2$ kennen wir bereits als $(\{0, 1\}, \cdot_2)$ aus [Beispiel 7.2](#).

²Beispielsweise ist $3 +_6 5 = 2$, weil $3 + 5 = 8$ ist und $8 \stackrel{6}{\equiv} 2$ gilt.

³Beispielsweise ist $3 \cdot_6 5 = 3$, weil $3 \cdot 5 = 15$ ist und $15 \stackrel{6}{\equiv} 3$ gilt.

- (vii) $(\mathbb{R}^X, +)$ ist eine Gruppe.
- (viii) (\mathbb{R}^X, \cdot) ist keine Gruppe, wenn $X \neq \emptyset$ ist, da die Funktionen, die irgendwo den Wert 0 annehmen, keine invertierbaren Elemente sind. $(\mathbb{R}_{\neq 0}^X, \cdot)$ ist jedoch für jede Menge X eine Gruppe.
- (ix) (X^X, \circ) ist keine Gruppe, sobald X zwei oder mehr Elemente enthält, denn dann gibt es Funktionen $X \rightarrow X$, die nicht bijektiv sind. Wenn X jedoch null- oder einelementig ist, dann ist (X^X, \circ) eine Gruppe. \triangle

Quizfrage 7.7: Können Sie die Additions- und Multiplikationstabellen für \mathbb{Z}_m im Fall $m = 5$ und $m = 8$ aufstellen? Haben Sie eine Vermutung, welche Elemente in (\mathbb{Z}_m, \cdot_m) invertierbar sind?

Satz 7.17 (Rechenregeln für Inverse).

Es sei (G, \star) eine Gruppe mit neutralem Element e .

- (i) Es gelten die **Kürzungsregeln** (englisch: **cancellation rules**)

$$a \star b_1 = a \star b_2 \quad \Rightarrow \quad b_1 = b_2 \quad (7.10a)$$

$$b_1 \star a = b_2 \star a \quad \Rightarrow \quad b_1 = b_2 \quad (7.10b)$$

für $a, b_1, b_2 \in G$.

- (ii) In einer **Gruppe** reicht es für den Nachweis, dass $a \in G$ und $b \in G$ Inverse voneinander sind, aus, diese in einer der beiden Reihenfolgen miteinander zu verknüpfen:

$$a \star b = e \quad \Rightarrow \quad b = a', \quad (7.11a)$$

$$a \star b = e \quad \Rightarrow \quad a = b'. \quad (7.11b)$$

- (iii) Die Invertierung ist **involutorisch** (englisch: **involutory**), d. h., für alle $a \in G$ gilt

$$(a')' = a. \quad (7.12)$$

- (iv) Für das inverse Element zu $a \star b$ für $a, b \in G$ gilt

$$(a \star b)' = b' \star a'. \quad (7.13)$$

Beweis. **Aussage (i):**

$$\begin{aligned} & a \star b_1 = a \star b_2 \\ \Rightarrow & a' \star (a \star b_1) = a' \star (a \star b_2) \quad a' \text{ existiert in der Gruppe } (G, \star) \\ \Rightarrow & (a' \star a) \star b_1 = (a' \star a) \star b_2 \quad \text{wegen der Assoziativität von } \star \\ \Rightarrow & e \star b_1 = e \star b_2 \quad \text{da } a' \text{ invers zu } a \text{ ist} \\ \Rightarrow & b_1 = b_2 \quad \text{wegen der Eigenschaften von } e. \end{aligned}$$

Die Aussage (7.10b) folgt analog.

Aussage (ii): Es gilt $a \star b = e$ und ebenso $a \star a' = e$. Nach (7.10a) muss also $b = a'$ gelten. Weiter gilt $a \star b = e$ und ebenso $b' \star b = e$. Nach (7.10b) muss also $a = b'$ gelten.

Aussage (iii): Wir müssen nachweisen, dass a die Inverse zu a' ist. Wegen $a \star a' = a' \star a = e$ ist das aber der Fall.

Aussage (iv): Wir müssen nachweisen, dass $b' \star a'$ die Inverse zu $a \star b$ ist. Wir haben

$$\begin{aligned}
 (a \star b) \star (b' \star a') &= a \star (b \star b') \star a' && \text{wegen der Assoziativität von } \star \\
 &= a \star e \star a' && \text{da } b' \text{ invers zu } b \text{ ist} \\
 &= a \star a' && \text{wegen der Eigenschaften von } e \\
 &= e && \text{da } a' \text{ invers zu } a \text{ ist.}
 \end{aligned}$$

□

Das folgende Lemma gibt mit Hilfe von Rechts- und Linkstranslationen eine notwendige und eine hinreichende Bedingung dafür an, wann eine Halbgruppe sogar eine Gruppe ist.

Lemma 7.18 (Gruppenkriterium mit Rechts- und Linkstranslationen („**Sudoku-Kriterium**“)).

- (i) Ist (G, \star) eine Gruppe und ist $a \in G$ beliebig, so sind die Rechts- und Linkstranslation \star_a und ${}_a\star$ bijektive Abbildungen $G \rightarrow G$.
- (ii) Ist (H, \star) eine nichtleere Halbgruppe und gilt für alle $a \in H$, dass die Rechts- und Linkstranslationen \star_a und ${}_a\star$ surjektive Abbildungen sind, dann ist (H, \star) eine Gruppe.

Beweis. Dieser Beweis ist Teil von [Hausaufgabe I-4.3](#).

□

Definition 7.19 (kommutative Halbgruppe, kommutatives Monoid, kommutative Gruppe).

Eine Halbgruppe bzw. ein Monoid bzw. eine Gruppe (H, \star) heißt **kommutativ** (englisch: *commutative*) oder **abelsch** (englisch: *Abelian*), wenn

$$x \star y = y \star x \quad \text{für alle } x, y \in H \tag{7.14}$$

gilt.

△

Beispiel 7.20 (kommutative Halbgruppen und Gruppen).

$(\mathbb{N}, +)$, (\mathbb{N}, \cdot) , $(\mathbb{N}_0, +)$, (\mathbb{N}_0, \cdot) , $(\mathbb{Z}, +)$, (\mathbb{Z}, \cdot) , $(\mathbb{Q}, +)$, (\mathbb{Q}, \cdot) , $(\mathbb{R}, +)$, (\mathbb{R}, \cdot) , $(\mathbb{C}, +)$, (\mathbb{C}, \cdot) sind alle kommutativ. Beispielsweise ist $(\mathbb{N}, +)$ eine kommutative Halbgruppe (aber kein Monoid), $(\mathbb{N}_0, +)$ ein kommutatives Monoid (aber keine Gruppe) und $(\mathbb{Z}, +)$ eine kommutative Gruppe. △

Weitere Beispiele folgen in der Übung.

§ 7.3 DIE SYMMETRISCHE GRUPPE

Definition 7.21 (symmetrische Gruppe).

Es sei X eine nichtleere Menge und $S(X) := \{f: X \rightarrow X \mid f \text{ ist bijektiv}\}$. Dann heißt $(S(X), \circ)$ die **symmetrische Gruppe** (englisch: *symmetric group*) auf X . Jedes Element von $S(X)$ heißt eine **Permutation** (englisch: *permutation*) von X .

Ist $X = \llbracket 1, n \rrbracket$ für $n \in \mathbb{N}$, so schreiben wir auch S_n und sprechen von der **symmetrischen Gruppe vom Grad n** (englisch: *symmetric group of degree n*). Jedes $\sigma \in S_n$ heißt eine **Permutation** (englisch: *permutation*) von $\llbracket 1, n \rrbracket$. △

Beachte: Nach [Beispiel 7.14 \(vii\)](#) ist $S(X)$ tatsächlich eine Gruppe. Das neutrale Element ist id_X . Wenn X drei oder mehr Elemente enthält, dann ist $(S(X), \circ)$ nicht kommutativ, ansonsten kommutativ.

Eine Permutation $\sigma \in S_n$ können wir in der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

notieren. Die Anzahl der Elemente von S_n für $n \in \mathbb{N}$ ist gleich $n!$ („ n Fakultät“).

Beispiel 7.22 (symmetrische Gruppe vom Grad 3).

Die symmetrische Gruppe S_3 hat $3! = 6$ Elemente:

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, & \sigma_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, & \sigma_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \text{(Drehungen),} \\ \sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, & \sigma_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, & \sigma_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \text{(Spiegelungen).} \end{aligned}$$

Sie lassen sich identifizieren mit den Kongruenzabbildungen, die ein gleichseitiges Dreieck mit den Eckpunkten 1, 2 und 3 auf sich selbst überführen. Wegen

$$\begin{aligned} \sigma_4 \circ \sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \sigma_2 \\ \sigma_3 \circ \sigma_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \sigma_1 \end{aligned}$$

ist S_3 wie erwartet tatsächlich nicht kommutativ. △

Definition 7.23 (Transposition).

Eine Permutation $\sigma \in S_n$, $n \in \mathbb{N}$, heißt eine **Transposition** (englisch: **transposition**), wenn es Zahlen $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ mit $i \neq j$ gibt, sodass gilt:

$$\sigma(k) = \begin{cases} j & \text{für } k = i, \\ i & \text{für } k = j, \\ k & \text{sonst.} \end{cases} \quad (7.15)$$

Wir notieren σ dann auch als $\tau(i, j)$. △

Eine Transposition vertauscht also genau zwei Elemente von $\llbracket 1, n \rrbracket$ und lässt den Rest unverändert. Offenbar gilt für jede Transposition

$$\tau^2 = \tau \circ \tau = \text{id}, \quad \text{also } \tau^{-1} = \tau. \quad (7.16)$$

Transpositionen sind also selbstinvers.

In S_1 gibt es keine Transpositionen. (**Quizfrage 7.8:** Wieviele verschiedene Transpositionen gibt es in S_n ?)

Satz 7.24 (Darstellung von Permutationen als Komposition von Transpositionen).

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Jede Permutation $\sigma \in S_n$ lässt sich als Komposition von $0 \leq r \leq n - 1$ Transpositionen schreiben.

Beweis. Wir zeigen die Behauptung für $n \geq 1$ durch vollständige Induktion. Induktionsanfang: Das einzige Element von

$$S_1 = \{\text{id}_{\{1\}}\}$$

ist eine Komposition von $r = 0$ Transpositionen.

Induktionsannahme: Die Behauptung sei für $n \in \mathbb{N}$ bereits bewiesen. Induktionsschritt: Wir betrachten eine Permutation $\sigma \in S_{n+1}$.

Fall 1: Falls $\sigma(n+1) = n+1$ gilt, dann gilt für die Einschränkung $\widehat{\sigma}: \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$ von σ die Eigenschaft $\widehat{\sigma} \in S_n$. Aufgrund der Induktionsannahme besitzt $\widehat{\sigma}$ die Darstellung $\widehat{\sigma} = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_r$ mit $0 \leq r \leq n-1$ mit Transpositionen τ_i auf S_n . Setzen wir diese Transpositionen durch $n+1 \mapsto n+1$ zu Transpositionen auf S_{n+1} fort, die wir weiterhin mit τ_i bezeichnen, so ergibt sich die Darstellung $\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_r$.

Fall 2: Falls $\sigma(n+1) = m$ für ein $1 \leq m \leq n$ gilt, dann betrachte die Transposition $\tau(m, n+1) \in S_{n+1}$. Für $\widetilde{\sigma} := \tau(m, n+1) \circ \sigma \in S_{n+1}$ gilt dann $\widetilde{\sigma}(n+1) = n+1$. Aufgrund von **Fall 1** gilt $\widetilde{\sigma} = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_r$ mit $0 \leq r \leq n-1$. Schließlich zeigt $\sigma = \tau(m, n+1) \circ \widetilde{\sigma} = \tau(m, n+1) \circ \tau_1 \circ \dots \circ \tau_r$ die Behauptung. \square

Die Darstellung einer Permutation als Komposition von Transpositionen ist nicht eindeutig. Jedoch ist Anzahl der benötigten Transpositionen entweder immer gerade oder immer ungerade, wie wir gleich beweisen werden (**Folgerung 7.30**).

Definition 7.25 (Fehlstand, Signum einer Permutation).

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und σ eine Permutation in S_n .

- (i) Ein Indexpaar $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ heißt ein **Fehlstand** (englisch: **inversion**) von σ , wenn $i < j$ und $\sigma(i) > \sigma(j)$ gilt.
- (ii) Die Zahl⁴

$$\text{sgn } \sigma := \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} \quad (7.17)$$

heißt das **Signum** (englisch: **sign**, lateinisch: **signum**: Zeichen) von σ . \triangle

Beispiel 7.26 (Fehlstand, Signum einer Permutation).

Die Permutation

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

von S_3 hat genau zwei Fehlstände, nämlich $(1, 3)$ und $(2, 3)$. Es gilt

$$\begin{aligned} \text{sgn } \sigma_1 &= \frac{\sigma(2) - \sigma(1)}{2 - 1} \frac{\sigma(3) - \sigma(1)}{3 - 1} \frac{\sigma(3) - \sigma(2)}{3 - 2} \\ &= \frac{3 - 2}{2 - 1} \frac{1 - 2}{3 - 1} \frac{1 - 3}{3 - 2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Die Permutation

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

⁴Definitionsgemäß wird das im Fall $n = 1$ leere Produkt als 1 interpretiert.

hat genau drei Fehlstände, nämlich $(1, 2)$, $(1, 3)$ und $(2, 3)$. Es gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} \sigma_4 &= \frac{\sigma(2) - \sigma(1)}{2 - 1} \frac{\sigma(3) - \sigma(1)}{3 - 1} \frac{\sigma(3) - \sigma(2)}{3 - 2} \\ &= \frac{2 - 3}{2 - 1} \frac{1 - 3}{3 - 1} \frac{1 - 2}{3 - 2} \\ &= -1. \end{aligned} \quad \triangle$$

Bemerkung 7.27 (zu Definition 7.25).

Da in den Faktoren des Produkts in (7.17) dieselben ganzen Zahlen – abgesehen vom Vorzeichen – jeweils einmal im Zähler und einmal im Nenner vorkommen, ist das Signum einer Permutation immer entweder $+1$ oder -1 . Das Signum einer Permutation gibt die **Parität** (englisch: *parity*) der Anzahl der Fehlstände an, also ob diese gerade oder ungerade ist, da wir für jedes Indexpaar (i, j) mit $i < j$ den Faktor -1 erhalten, wenn es sich um ein Fehlstand handelt, und ansonsten den Faktor $+1$. Es gilt also

$$\operatorname{sgn} \sigma = (-1)^{\text{Anzahl der Fehlstände von } \sigma}. \quad (7.18)$$

Dementsprechend nennen wir $\sigma \in S_n$ eine **gerade Permutation** (englisch: *even permutation*), wenn $\operatorname{sgn} \sigma = 1$ ist und eine **ungerade Permutation** (englisch: *odd permutation*), wenn $\operatorname{sgn} \sigma = -1$ gilt. \triangle

Lemma 7.28 (Signum einer Transposition).

Ist $\tau \in S_n$, $n \in \mathbb{N}$, eine Transposition, so gilt $\operatorname{sgn} \tau = -1$.

Beweis. Wir betrachten eine beliebige Transposition $\tau(i, j)$ in S_n , wobei notwendigerweise $n \geq 2$ gilt. O. B. d. A. können wir $i < j$ voraussetzen, also haben wir

$$\tau(i, j) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i-1 & i & i+1 & \cdots & j-1 & j & j+1 & \cdots & n \\ 1 & \cdots & i-1 & j & i+1 & \cdots & j-1 & i & j+1 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

$\tau(i, j)$ hat also genau die Fehlstände

$$\begin{array}{ll} (i, i+1), \dots, (i, j) & \text{Anzahl: } j-i \\ (i+1, j), \dots, (j-1, j) & \text{Anzahl: } j-i-1. \end{array}$$

Daher gilt $\operatorname{sgn} \tau(i, j) = (-1)^{2(j-i)-1} = -1$. \square

Satz 7.29 (Signum ist verträglich mit Komposition von Permutationen).

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und σ_1, σ_2 zwei Permutationen in S_n . Dann gilt

$$\operatorname{sgn}(\sigma_1 \circ \sigma_2) = (\operatorname{sgn} \sigma_1) \cdot (\operatorname{sgn} \sigma_2). \quad (7.19)$$

Beweis. Wir führen den Beweis in drei Schritten.

Schritt 1: Wir beweisen den Satz zunächst für den Spezialfall, dass σ_1 eine Transposition benachbarter Elemente ist, sagen wir $\sigma_1 = \tau(k, k+1)$ für ein $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

Wenn $\sigma_2^{-1}(k) < \sigma_2^{-1}(k+1)$ gilt, dann ist $(\sigma_2^{-1}(k), \sigma_2^{-1}(k+1))$ kein Fehlstand von σ_2 , jedoch ein Fehlstand von $\tau(k, k+1) \circ \sigma_2$. Wenn andererseits $\sigma_2^{-1}(k) > \sigma_2^{-1}(k+1)$ gilt, dann ist $(\sigma_2^{-1}(k), \sigma_2^{-1}(k+1))$ ein Fehlstand von σ_2 , aber kein Fehlstand von $\tau(k, k+1) \circ \sigma_2$. Die anderen Fehlstände von σ_2 und $\tau(k, k+1) \circ \sigma_2$ sind dieselben. Daher ist die Anzahl der Fehlstände von σ_2 und von $\tau(k, k+1) \circ \sigma_2$ um 1 verschieden. Damit ist

$$\operatorname{sgn}(\tau(k, k+1) \circ \sigma_2) = -\operatorname{sgn} \sigma_2 = (\operatorname{sgn} \tau(k, k+1)) \cdot (\operatorname{sgn} \sigma_2)$$

gezeigt.

Schritt 2: Wir beweisen den Satz für den Spezialfall, dass $\tau(k, \ell)$ eine beliebige Transposition ist. Wir haben o. B. d. A. $\ell > k$, daher können wir $\tau(k, \ell)$ in der Form

$$\tau(k, \ell) = \underbrace{\tau(k, k+1) \circ \cdots \circ \tau(\ell-2, \ell-1)} \circ \underbrace{\tau(\ell, \ell-1) \circ \cdots \circ \tau(k+1, k)},$$

also als Komposition von $(2(\ell - k) - 1)$ Transpositionen benachbarter Elemente schreiben. Aufgrund von **Schritt 1** und der Assoziativität der Komposition haben wir nun also

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(\tau(k, \ell) \circ \sigma_2) &= \operatorname{sgn}(\tau(k, k+1) \circ \cdots \circ \tau(\ell-2, \ell-1) \circ \tau(\ell, \ell-1) \circ \cdots \circ \tau(k+1, k) \circ \sigma_2) \\ &= (\operatorname{sgn} \tau(k, k+1)) \cdot \operatorname{sgn}(\cdots \circ \tau(\ell-2, \ell-1) \circ \tau(\ell, \ell-1) \circ \cdots \circ \tau(k+1, k) \circ \sigma_2) \\ &= \cdots \\ &= (\operatorname{sgn} \tau(k, k+1)) \cdots (\operatorname{sgn} \tau(\ell-2, \ell-1)) (\operatorname{sgn} \tau(\ell, \ell-1)) \cdots (\operatorname{sgn} \tau(k+1, k)) (\operatorname{sgn} \sigma_2) \\ &= \cdots \\ &= (\operatorname{sgn} \tau(k, \ell)) \cdot (\operatorname{sgn} \sigma_2). \end{aligned}$$

Schritt 3: Schließlich können wir den allgemeinen Fall zeigen.

Ist $\sigma_1 \in S_n$ eine beliebige Permutation, so können wir sie nach **Satz 7.24** als Komposition von Transpositionen $\sigma_1 = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_r$ schreiben.

Unter Benutzung von **Schritt 2** und der Assoziativität der Komposition folgt nun ähnlich wie im Beweis von **Schritt 2**:

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(\sigma_1 \circ \sigma_2) &= \operatorname{sgn}(\tau_1 \circ \cdots \circ \tau_r \circ \sigma_2) \\ &= (\operatorname{sgn} \tau_1) \cdot \operatorname{sgn}(\cdots \circ \tau_r \circ \sigma_2) \\ &= \cdots \\ &= (\operatorname{sgn} \tau_1) \cdots (\operatorname{sgn} \tau_r) (\operatorname{sgn} \sigma_2) \\ &= \cdots \\ &= \operatorname{sgn}(\tau_1 \circ \cdots \circ \tau_r) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma_2). \end{aligned}$$

□

Folgerung 7.30 (zu **Satz 7.29**).

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und σ eine Permutation in S_n .

- (i) Ist $\sigma = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_s$ dargestellt als Komposition⁵ von $s \in \mathbb{N}_0$ Permutationen $\sigma_i \in S_n$, so gilt $\operatorname{sgn} \sigma = (\operatorname{sgn} \sigma_1) \cdots (\operatorname{sgn} \sigma_s)$.
- (ii) Ist insbesondere $\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_r$ dargestellt als Komposition von $r \in \mathbb{N}$ Transpositionen in S_n , so gilt $\operatorname{sgn} \sigma = (-1)^r$.
- (iii) Es gilt $\operatorname{sgn} \operatorname{id} = 1$.
- (iv) Es gilt $\operatorname{sgn} \sigma = \operatorname{sgn} \sigma^{-1}$.

⁵Vereinbarungsgemäß ist die Verknüpfung von null Permutationen das neutrale Element in S_n , also die identische Abbildung id .

Beweis. Nach [Satz 7.29](#) ist das Signum einer Komposition von zwei Permutationen gleich dem Produkt der Signa der beiden Faktoren. Wie im Beweis von [Satz 7.29](#) können wir die Aussage leicht auf mehr als zwei Faktoren ausdehnen. Die Fälle $s = 0$ und $s = 1$ sind trivial. Das zeigt [Aussage \(i\)](#).

Das Signum einer Transposition ist nach [Lemma 7.28](#) gleich -1 . [Aussage \(ii\)](#) folgt damit aus [Aussage \(i\)](#).

Die identische Abbildung ist Produkt von null Transpositionen, also gilt $\text{sgn id} = (-1)^0 = 1$, also [Aussage \(iii\)](#).

Schließlich gilt

$$1 = \text{sgn id} = \text{sgn}(\sigma \circ \sigma^{-1}) = (\text{sgn } \sigma) \cdot (\text{sgn } \sigma^{-1}),$$

also $\text{sgn } \sigma^{-1} = 1/\text{sgn } \sigma = \text{sgn } \sigma$, da $\text{sgn } \sigma \in \{\pm 1\}$ ist. Das zeigt [Aussage \(iv\)](#). □

Ende der Vorlesung 8

Ende der Woche 4

§ 7.4 UNTERGRUPPEN

Definition 7.31 (Untergruppe).

Es sei (G, \star) eine Gruppe.

- (i) Eine Teilmenge $U \subseteq G$ heißt **abgeschlossen** (englisch: *closed*) bzgl. \star , wenn $\star: G \times G \rightarrow G$ eingeschränkt werden kann zu $\star_U: U \times U \rightarrow U$. In diesem Fall heißt \star_U die auf U **induzierte (innere) Verknüpfung** (englisch: *induced operation*, lateinisch: *inducere*: hineinführen).
- (ii) Eine bzgl. \star abgeschlossene Teilmenge $U \subseteq G$ heißt eine **Untergruppe** (englisch: *subgroup*) von (G, \star) , wenn (U, \star_U) selbst wieder eine Gruppe ist. Manchmal schreibt man dies als $(U, \star_U) \leq (G, \star)$.
- (iii) Eine Untergruppe (U, \star_U) von (G, \star) heißt **echt** (englisch: *proper subgroup*), wenn $U \subsetneq G$ gilt. △

Beachte: Die Assoziativität wird von \star auf \star_U vererbt. Ist (G, \star) abelsch, dann auch (U, \star) .

Lemma 7.32 (neutrale und inverse Elemente in einer Untergruppe).

Es sei (U, \star_U) eine Untergruppe der Gruppe (G, \star) . Dann ist das neutrale Element e_U von (U, \star_U) gleich dem neutralen Element e von (G, \star) . Außerdem gilt für alle $a \in U$, dass das Inverse von a in U übereinstimmt mit dem Inversen von a in G .

Beweis. Dieser Beweis ist Gegenstand von [Hausaufgabe I-5.1](#). □

Aufgrund dieser Erkenntnis benötigen wir also keine neue Notation für das neutrale Element und die Inversen in einer Untergruppe. Außerdem schreiben wir ab jetzt einfach \star statt \star_U .

Die Prüfung einer Teilmenge $U \subseteq G$ auf die Untergruppen-Eigenschaft lässt sich mit folgendem Kriterium abkürzen:

Satz 7.33 (Untergruppenkriterium).

Es sei (G, \star) eine Gruppe und $U \subseteq G$. Dann sind äquivalent:

- (i) (U, \star) ist eine Untergruppe von (G, \star) .
- (ii) $U \neq \emptyset$, und für alle $a, b \in U$ gilt $a \star b' \in U$.

Beweis. **Aussage (i) \Rightarrow Aussage (ii):** Es sei (U, \star) eine Untergruppe von (G, \star) . Dann enthält U notwendigerweise das neutrale Element e von (G, \star) , da es nach **Lemma 7.32** auch das neutrale Element in (U, \star) ist. Für $a, b \in U$ gilt $b' \in U$ nach **Lemma 7.32**. Da U bzgl. \star abgeschlossen ist, folgt $a \star b' \in U$.

Aussage (ii) \Rightarrow Aussage (i):

Schritt 1: U enthält das neutrale Element e von (G, \star) :

Da U nichtleer ist, existiert ein $a \in U$. Mit dem dazu inversen Element a' gilt aufgrund der Voraussetzung $a \star a' \in U$, also $e \in U$ für das neutrale Element e von (G, \star) .

Schritt 2: U enthält die Inversen seiner Elemente:

Es sei $a \in U$, dann gilt $a' = e \star a'$, und aufgrund der Voraussetzung liegt $a' \in U$.

Schritt 3: U ist abgeschlossen bzgl. \star :

Für $a, b \in U$ liegt auch $b' \in U$, also ist $a \star b = a \star (b')'$ aufgrund der Voraussetzung ebenfalls ein Element von U .

Zusammenfassend haben wir also gezeigt, dass U bzgl. \star abgeschlossen ist (**Schritt 3**), also bildet (U, \star) eine Halbgruppe. Weiter zeigt **Schritt 1**, dass (U, \star) ein Monoid mit dem neutralen Element e von (G, \star) ist. Schließlich zeigt **Schritt 2**, dass alle Elemente von U ein Inverses in U besitzen, also ist (U, \star) eine Gruppe und wegen $U \subseteq G$ eine Untergruppe von (G, \star) . \square

Quizfrage 7.9: Könnte man an Stelle von **Aussage (ii)** in **Satz 7.33** äquivalent auch $U \neq \emptyset$, und für alle $a, b \in U$ gilt $a' \star b \in U$ fordern?

Beispiel 7.34 (Untergruppen).

- (i) Es sei (G, \star) eine Gruppe mit neutralem Element e . Dann sind $(\{e\}, \star)$ und (G, \star) Untergruppen von (G, \star) . Diese heißen die **trivialen Untergruppe** (englisch: **trivial subgroups**).
- (ii) $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{R}_{\neq 0}, \cdot)$.
- (iii) Für jede Zahl $m \in \mathbb{N}$ ist $m\mathbb{Z} := \{mz \mid z \in \mathbb{Z}\}$ mit der Verknüpfung $+$ eine Untergruppe der Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$.
- (iv) Für $n \geq 2$ ist

$$\begin{aligned} A_n &:= \{\sigma \in S_n \mid \sigma \text{ ist Komposition einer geraden Anzahl von Transpositionen}\} \\ &= \{\sigma \in S_n \mid \text{sgn } \sigma = 1\} \end{aligned} \tag{7.20}$$

eine Untergruppe von S_n , genannt die **alternierende Gruppe** (englisch: **alternating group**) vom Grad n . Sie hat $\frac{1}{2}n!$ Elemente.

- (v) In S_3 besteht die alternierende Untergruppe A_3 in der Notation von **Beispiel 7.22** gerade aus $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2\}$. Diese entsprechen bei Interpretation als Kongruenzabbildungen eines gleichseitigen Dreiecks auf sich selbst gerade den Drehungen. \triangle

Quizfrage 7.10: Können Sie eine Gruppe finden, die außer den trivialen Untergruppen keine weiteren Untergruppen besitzt?

Beachte: Die Menge der Untergruppen einer Gruppe (G, \star) sind bzgl. der Eigenschaft „ist Untergruppe von“ partiell geordnet.

Lemma 7.35 (Durchschnitt von Untergruppen).

Es sei (G, \star) eine Gruppe und $(U_i, \star)_{i \in I}$ eine Familie von Untergruppen mit der nichtleeren Indexmenge I . Dann ist auch $\bigcap_{i \in I} U_i$ mit \star eine Untergruppe von (G, \star) .

Beweis. Dieser Beweis ist Gegenstand von [Hausaufgabe I-5.1](#). □

Definition 7.36 (erzeugte Untergruppe, Erzeugendensystem, zyklische Gruppe, Ordnung eines Elements).

Es sei (G, \star) eine Gruppe und $E \subseteq G$.

(i) Dann heißt

$$\langle E \rangle := \bigcap \{U \mid (U, \star) \text{ ist Untergruppe von } (G, \star) \text{ und } E \subseteq U\} \quad (7.21)$$

die von E **erzeugte Untergruppe** (englisch: *subgroup generated by E*) in (G, \star) .

Beachte: Bezeichnen wir mit \mathcal{R} die Menge auf rechten Seite von (7.21), über die der Durchschnitt gebildet wird, dann ist $\langle E \rangle$ das Minimum der Menge \mathcal{R} bzgl. der Inklusionshalbordnung und sogar das Minimum der Menge \mathcal{R} bzgl. der Halbordnung „ist Untergruppe von“.

Ist speziell $E = \{a\}$ für ein $a \in G$, so schreiben wir auch $\langle a \rangle$ statt $\langle \{a\} \rangle$ und nennen $\langle a \rangle$ die **von a erzeugte zyklische Untergruppe** (englisch: *cyclic subgroup*) von (G, \star) .

(ii) Gilt $\langle E \rangle = G$, dann heißt E ein **Erzeugendensystem** (englisch: *generating set*) von (G, \star) . Falls ein endliches Erzeugendensystem von G existiert, so heißt G **endlich erzeugt** (englisch: *finitely generated*).

(iii) Die Gruppe (G, \star) heißt **zyklisch** (englisch: *cyclic*), wenn es ein $a \in G$ gibt, sodass gilt: $\langle a \rangle = G$. In diesem Fall heißt a ein **Erzeuger** (englisch: *generator*) von G .

(iv) Ein Element $a \in G$ heißt von **Ordnung $n \in \mathbb{N}$** (englisch: *order*), wenn $n \in \mathbb{N}$ die kleinste Zahl ist, für die (in multiplikativer Notation) $a^n = 1$ gilt. Falls kein $n \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $a^n = 1$ ist, so heißt a von **unendlicher Ordnung** (englisch: *infinite order*). Wir schreiben $\text{ord}(a) = n$ bzw. $\text{ord}(a) = \infty$. △

Satz 7.37 (Darstellung der erzeugten Untergruppe).

Es sei (G, \star) eine Gruppe und $E \subseteq G$. Dann gilt für die von E erzeugte Untergruppe:

$$\langle E \rangle = \{a_1 \star \cdots \star a_n \mid \exists n \in \mathbb{N}_0 \forall i = 1, \dots, n (a_i \in E \cup E')\}, \quad (7.22)$$

wobei E' die Menge der Inversen von E bezeichnet. (Im Fall $n = 0$ interpretieren wir wie üblich die Verknüpfung von null Elementen in der rechten Menge als das neutrale Element e . Insbesondere im Fall $E = \emptyset$ ist also $\langle E \rangle = \{e\}$.)

Beweis. Zur Abkürzung bezeichnen wir die Menge auf der rechten Seite von (7.22) mit M . Wir führen den Beweis in zwei Schritten.

Schritt 1: $\langle E \rangle \supseteq M$: Es sei U eine beliebige Untergruppe von G , die im Durchschnitt (7.21) vorkommt. U enthält also E als Teilmenge. Da U eine Untergruppe ist, enthält U auch E' . Da schließlich U abgeschlossen bzgl. \star ist, enthält U auch alle Verknüpfungen endlich vieler Elemente aus $E \cup E'$. Also gilt $U \supseteq M$. Da dies für jede beliebige Untergruppe aus dem Durchschnitt in (7.21) gilt, gilt auch $\langle E \rangle \supseteq M$.

Schritt 2: $\langle E \rangle \subseteq M$: Wir zeigen zunächst, dass M selbst eine Untergruppe von G ist. Dazu überprüfen wir das Untergruppenkriterium (Satz 7.33). Offensichtlich ist $M \neq \emptyset$, denn M enthält mindestens e . Sind $a_1 \star \cdots \star a_n$ und $b_1 \star \cdots \star b_m$ zwei Elemente aus M , so ist auch $(a_1 \star \cdots \star a_n) \star (b_1 \star \cdots \star b_m)'$ ein Element aus M . Also ist M eine Untergruppe von G . Zusätzlich ist klar, dass $E \subseteq M$ gilt. (**Quizfrage 7.11:** Details?) Das heißt, M ist eine derjenigen Untergruppen von G , über die in der Definition von $\langle E \rangle$ der Durchschnitt gebildet wird. Folglich gilt $\langle E \rangle \subseteq M$. \square

Beispiel 7.38 (erzeugte Untergruppe, Erzeugendensystem, zyklische Gruppe, Ordnung eines Elements).

- (i) In der Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ erzeugt das Element $m \in \mathbb{Z}$ die zyklische Untergruppe $\langle m \rangle = m\mathbb{Z}$.
- (ii) Die Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ ist zyklisch. Sie hat die Erzeuger 1 und -1 , es gilt also $\langle 1 \rangle = \langle -1 \rangle = \mathbb{Z}$.
- (iii) In S_3 gilt mit den Bezeichnungen aus Beispiel 7.22, also

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, & \sigma_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, & \sigma_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \text{(Drehungen)} \\ \sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, & \sigma_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, & \sigma_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \text{(Spiegelungen)} \end{aligned}$$

die Beziehung

$$\sigma_1^2 = \sigma_2 \quad \text{und} \quad \sigma_1^3 = \sigma_0 = \text{id}_{\{1,2,3\}}.$$

Folglich ist

$$\langle \sigma_1 \rangle = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2\} = A_3$$

die alternierende Untergruppe, vgl. Beispiel 7.34. Wegen $\sigma_2^2 = \sigma_1$ und $\sigma_2^3 = \sigma_0$ gilt auch $\langle \sigma_2 \rangle = A_3$. Wegen $\sigma_3^2 = \sigma_4 = \sigma_5 = \text{id}_{\{1,2,3\}}$ gilt $\langle \sigma_3 \rangle = \{\sigma_0, \sigma_3\}$, $\langle \sigma_4 \rangle = \{\sigma_0, \sigma_4\}$ und $\langle \sigma_5 \rangle = \{\sigma_0, \sigma_5\}$. Wollen wir ganz S_3 erzeugen, so müssen wir mindestens zwei Permutationen auswählen. Beispielsweise ist $\{\sigma_1, \sigma_3\}$ (eine Drehung, eine Spiegelung) ein Erzeugendensystem von S_3 . \triangle

Bemerkung 7.39 (abkürzende Schreibweisen).

Es sei (H, \star) eine Halbgruppe, $a \in H$ sowie $A, B \subseteq H$. Zur Abkürzung vereinbaren wir folgende Schreibweisen:

$$a \star B := \{a \star b \mid b \in B\}, \tag{7.23a}$$

$$B \star a := \{b \star a \mid b \in B\}, \tag{7.23b}$$

$$A \star B := \{a \star b \mid a \in A, b \in B\}, \tag{7.23c}$$

$$A' := \{a' \mid a \in A \text{ ist invertierbar}\}. \tag{7.23d}$$

Wenn A bzw. B die leere Menge ist, ist das Ergebnis in allen obigen Fällen die leere Menge. Mit Hilfe dieser Abkürzungen können wir z. B. das Untergruppenkriterium Satz 7.33 (ii) als $U \neq \emptyset$ und $U \star U' \subseteq U$ formulieren. \triangle

§ 7.5 UNTERGRUPPEN INDUZIEREN ÄQUIVALENZRELATIONEN

Lemma 7.40 (von Untergruppe induzierte Äquivalenzrelationen).

Es sei (G, \star) eine Gruppe und (U, \star) eine Untergruppe. Dann sind durch

$$a \sim^U b \Leftrightarrow b \in a \star U \Leftrightarrow a' \star b \in U \quad (7.24a)$$

$$a \sim^{U\sim} b \Leftrightarrow a \in U \star b \Leftrightarrow a \star b' \in U \quad (7.24b)$$

für $a, b \in G$ zwei Äquivalenzrelationen auf G erklärt.⁶ Für die Äquivalenzklassen gilt:

$$[a]_{\sim^U} = a \star U \quad (7.25a)$$

$$[a]_{\sim^{U\sim}} = U \star a. \quad (7.25b)$$

Jede der Äquivalenzklassen $[a]_{\sim^U}$ und $[a]_{\sim^{U\sim}}$ ist gleichmächtig zu U .

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass die beiden angegebenen Bedingungen in (7.24) tatsächlich äquivalent sind. Wir haben

$$\begin{aligned} & b \in a \star U \\ \Leftrightarrow & \exists c \in U (b = a \star c) \\ \Leftrightarrow & \exists c \in U (a' \star b = a' \star a \star c) \quad \text{„}\Leftarrow\text{“ folgt aus der Kürzungsregel (7.10a)} \\ \Leftrightarrow & \exists c \in U (a' \star b = c) \\ \Leftrightarrow & a' \star b \in U. \end{aligned}$$

Wir weisen nun für $a \sim^U b$ die Eigenschaften einer Äquivalenzrelation nach. Das neutrale Element von U und G wird wieder mit e bezeichnet.

Schritt 1: \sim^U ist reflexiv:

Es sei $a \in G$, dann ist $a' \star a = e \in U$, da U Untergruppe ist.

Schritt 2: \sim^U ist symmetrisch:

Es gelte $a \sim^U b$, also $a' \star b \in U$. Dann ist auch das Inverse $(a' \star b)' \in U$, da U Untergruppe ist. Für das Inverse gilt nach Satz 7.17 (iii) und (iv):

$$(a' \star b)' = b' \star (a')' = b' \star a \in U.$$

Das heißt aber $b \sim^U a$.

Schritt 3: \sim^U ist transitiv:

Es gelte $a \sim^U b$ und $b \sim^U c$, also $a' \star b \in U$ und $b' \star c \in U$. Aufgrund der Untergruppeneigenschaft von U ist auch $a' \star b \star b' \star c = a' \star c \in U$. Das heißt aber $a \sim^U c$.

Die Darstellung der Äquivalenzklasse (7.25a) folgt sofort aus (7.24a).

Um zu zeigen, dass U und $[a]_{\sim^U} = a \star U$ gleichmächtig sind (Definition 6.23), betrachten wir die Abbildung $U \ni b \mapsto a \star b \in a \star U$. Diese Abbildung ist nach Definition von $a \star U$ surjektiv. Außerdem ist sie injektiv, denn aus $a \star b = a \star c$ folgt mit der Kürzungsregel (7.10a) $b = c$.

Der Beweis für (7.24b) und (7.25b) geht analog. □

⁶Für diese Relationen gibt es in der Literatur keine einheitliche Notation.

Die Äquivalenzklasse $[a]_{\sim^U} = a \star U$ heißt auch die **Linksnebenklasse** (englisch: **left coset**) von U nach a .⁷ Weil \sim^U eine Äquivalenzrelation ist, bilden die Linksnebenklassen der Untergruppe U eine Partition der Gruppe G (Satz 5.19). Man notiert die Quotientenmenge als G / \sim^U oder auch als G / U .

Die Äquivalenzklasse $[a]_{U \sim} = U \star a$ heißt auch die **Rechtsnebenklasse** (englisch: **right coset**) von U nach a . Weil auch $U \sim$ eine Äquivalenzrelation ist, bilden auch die Rechtsnebenklassen der Untergruppe U eine Partition der Gruppe G . Man notiert die Quotientenmenge als $G / U \sim$ oder auch als $U \backslash G$.

Folgerung 7.41 (zu Lemma 7.40).

Es sei (G, \star) eine **abelsche** Gruppe und (U, \star) eine Untergruppe. Dann sind die Äquivalenzrelationen $a \sim^U b$ und $a U \sim b$ identisch. Entsprechend gilt für die Nebenklassen $a \star U = U \star a$ für alle $a \in G$.

Beweis. Der Beweis ist Gegenstand von [Hausaufgabe I-5.3](#). □

Wann immer $a \sim^U b$ und $a U \sim b$ identisch sind, schreiben wir auch einfach $a \sim b$ und sprechen von **Nebenklassen** (englisch: **cosets**) $[a]_{U \sim} = U \star a = a \star U$ von U .

Beispiel 7.42 (Nebenklassen).

- (i) In der abelschen Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ erzeugt die Untergruppe $m\mathbb{Z}$ für $m \in \mathbb{N}$ gerade die Kongruenzrelation modulo m , d. h., $\sim^{m\mathbb{Z}}$ und \equiv^m stimmen überein. Die Nebenklassen von $m\mathbb{Z}$ gilt (auch **Restklassen modulo m** genannt, vgl. [Beispiel 5.16](#))

$$[a] = \{a + nm \mid n \in \mathbb{Z}\} = a + m\mathbb{Z}$$

partitionieren die ganzen Zahlen \mathbb{Z} in m gleichmächtige Restklassen, $[0], [1], \dots, [m-1]$.

- (ii) Die Standardkonstruktion einer nicht messbaren Teilmenge von \mathbb{R} ([Satz von Vitali](#)) verwendet die Nebenklassen von \mathbb{Q} in der abelschen Gruppe $(\mathbb{R}, +)$, zusammen mit dem Auswahlaxiom. △

Aus [Lemma 7.40](#) folgt der folgende wichtige **Satz von Lagrange** (englisch: **Lagrange's theorem**) der Gruppentheorie:

Satz 7.43 (Satz von Lagrange).

Es sei (G, \star) eine endliche Gruppe und (U, \star) eine Untergruppe. Dann gilt $\#U \mid \#G$, d. h., die Kardinalität der Untergruppe ist ein Teiler der Kardinalität der Gruppe.

Beweis. Der Beweis ist Gegenstand von [Hausaufgabe I-5.3](#). □

⁷Merke: Bei den *Linksnebenklassen* $a \star U$ steht der Repräsentant a *links* vom U . Im Relationszeichen \sim^U steht die Tilde \sim ebenfalls links vom U .

§ 8 HOMOMORPHISMEN VON HALBGRUPPEN UND GRUPPEN

Literatur: Beutelspacher, 2014, Kapitel 9.2.3, Fischer, Springborn, 2020, Kapitel 2.2

Homomorphismen (englisch: **homomorphisms**, altgriechisch: *ομος*: gemeinsam, altgriechisch: *μορφη*: Form) sind die **strukturverträglichen Abbildungen** (englisch: **structurally compatible maps**) zwischen algebraischen Strukturen. In diesem Abschnitt geht es speziell um Homomorphismen von Halbgruppen und Gruppen.

Definition 8.1 (Halbgruppenhomomorphismus).

Es seien (H_1, \star) und (H_2, \square) zwei Halbgruppen.

- (i) Eine Abbildung $f: H_1 \rightarrow H_2$ heißt **strukturverträglich** oder ein **(Halbgruppen-)Homomorphismus** (englisch: **semigroup homomorphism**) von (H_1, \star) in (H_2, \square) , wenn gilt:

$$f(a \star b) = f(a) \square f(b) \quad \text{für alle } a, b \in H_1. \tag{8.1}$$

- (ii) Im Fall $(H_1, \star) = (H_2, \square)$ sprechen wir auch von einem **(Halbgruppen-)Endomorphismus** (englisch: **semigroup endomorphism**, altgriechisch: *ἐνδον*: innen).
- (iii) Ist $f: H_1 \rightarrow H_2$ bijektiv, so heißt f auch **strukturerhaltend** oder ein **(Halbgruppen-)Isomorphismus** (englisch: **semigroup isomorphism**, altgriechisch: *ίσος*: gleich). In diesem Fall nennen wir (H_1, \star) und (H_2, \square) auch zueinander **isomorphe Halbgruppen** (englisch: **isomorphic semigroups**) und schreiben

$$(H_1, \star) \cong (H_2, \square).$$

- (iv) Im Fall $(H_1, \star) = (H_2, \square)$ und $f: H_1 \rightarrow H_2$ bijektiv sprechen wir auch von einem **(Halbgruppen-)Automorphismus** (englisch: **semigroup automorphism**, altgriechisch: *αυτος*: selbst).⁸ △

Quizfrage 8.1: Welche Art von Relation ist die Isomorphie auf der Klasse aller Halbgruppen?

Bemerkung 8.2 (Halbgruppenhomomorphismus als kommutatives Diagramm).

Wir können den Sachverhalt, dass $f: (H_1, \star) \rightarrow (H_2, \square)$ ein Halbgruppenhomomorphismus ist, durch das folgende **kommutative Diagramm** (englisch: **commutative diagram**) ausdrücken:⁹

$$\begin{array}{ccc} H_1 \times H_1 & \xrightarrow{f \times f} & H_2 \times H_2 \\ \downarrow \star & & \downarrow \square \\ H_1 & \xrightarrow{f} & H_2 \end{array}$$

Ein solches Diagramm heißt **kommutativ** (englisch: **commutative diagram**), wenn alle Pfade mit demselben Ausgangs- und demselben Endpunkt dasselbe Ergebnis produzieren. △

⁸Ein Automorphismus ist somit ein bijektiver Endomorphismus oder auch ein Isomorphismus von einer Halbgruppe/Monoid/Gruppe auf sich selbst.

⁹Die Abbildung $f \times f$ ist dabei definiert durch $f \times f: H_1 \times H_1 \ni (a, b) \mapsto (f(a), f(b)) \in H_2 \times H_2$.

Wenn (M_1, \star) und (M_2, \square) beides Monoide sind, so können wir ganz analog zu [Definition 8.1](#) die Begriffe **(Monoid-)Homomorphismus**, **-Endomorphismus**, **-Isomorphismus** und **-Automorphismus** (englisch: *monoid homomorphism, endomorphism, isomorphism, automorphism*) definieren. Zusätzlich zu (8.1) fordert man dabei aber noch, dass für die Einselemente gilt:

$$f(e_1) = e_2. \quad (8.2)$$

Die Monoide (M_1, \star) und (M_2, \square) heißen zueinander **isomorph**, wenn es zwischen ihnen einen Monoidisomorphismus gibt. Wir schreiben dann $(M_1, \star) \cong (M_2, \square)$.

Sind (G_1, \star) und (G_2, \square) beides Gruppen, so ergeben sich die Begriffe **(Gruppen-)Homomorphismus**, **-Endomorphismus**, **-Isomorphismus** und **-Automorphismus** (englisch: *group homomorphism, endomorphism, isomorphism, automorphism*). Hier wiederum muss man die Bedingung (8.2) nicht separat fordern, denn sie folgt aus (8.1); siehe [Lemma 8.5](#). Die Gruppen (G_1, \star) und (G_2, \square) heißen zueinander **isomorph**, wenn es zwischen ihnen einen Gruppenisomorphismus gibt. Wir schreiben dann $(G_1, \star) \cong (G_2, \square)$.

Bemerkung 8.3 (zu [Definition 8.1](#)).

Zwei zueinander **isomorphe** Halbgruppen/Monoide/Gruppen können und müssen, was ihre algebraischen Eigenschaften als Halbgruppen/Monoide/Gruppen angeht, nicht unterschieden werden. \triangle

Beispiel 8.4 (Homomorphismen von Halbgruppen und Gruppen).

- (i) Es sei Σ eine nichtleere Menge und (Σ^*, \circ) die Halbgruppe der Tupel über Σ mit der Konkatination \circ , siehe [Beispiel 7.4](#). Die Abbildung $\#: (\Sigma^*, \circ) \rightarrow (\mathbb{N}_0, +)$, die die Kardinalität eines Tupels angibt, ist ein Monoidhomomorphismus, denn es gilt

$$\begin{aligned} \#((x_1, \dots, x_n) \circ (y_1, \dots, y_m)) &= \#(x_1, \dots, x_n) + \#(y_1, \dots, y_m) = n + m \\ \text{und } \#() &= 0. \end{aligned}$$

Genau dann, wenn Σ einelementig ist, ist $\#$ auch bijektiv, also ein Monoidisomorphismus.

- (ii) Für $a > 0$, $a \neq 1$ ist $\log_a: (\mathbb{R}_{>0}, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}, +)$ ist wegen

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

ein Gruppenhomomorphismus. Weiter ist \log_a bijektiv, also sogar ein Gruppenisomorphismus.

- (iii) Zwischen beliebigen Gruppen (G_1, \star) und (G_2, \square) gibt es immer den **trivialen Homomorphismus** (englisch: *trivial homomorphism*) $f: G_1 \ni a \mapsto f(a) := e_2 \in G_2$. Für einige Paare von Gruppen ist das auch der einzig mögliche Homomorphismus.

- (iv) Für festes $n \in \mathbb{Z}$ ist die Abbildung (vgl. (7.6))

$$G \ni a \mapsto a^n \in G$$

in einer *abelschen* Gruppe (G, \cdot) ein Gruppenendomorphismus.

- (v) Die sgn-Abbildung ist ein Gruppenhomomorphismus von der symmetrischen Gruppe S_n (für festes $n \in \mathbb{N}$) in die Gruppe $(\{\pm 1\}, \cdot)$, denn es gilt nach [Satz 7.29](#)

$$\text{sgn}(\sigma_1 \circ \sigma_2) = (\text{sgn } \sigma_1) \cdot (\text{sgn } \sigma_2).$$

Genau für $n = 2$ ist sgn auch bijektiv, also ein Gruppenisomorphismus.

(vi) Die in [Beispiel 7.22](#) vorgenommene „Identifikation“ der symmetrischen Gruppe S_3 mit der Gruppe der Kongruenzabbildungen eines gleichseitigen Dreiecks stellt einen Gruppenisomorphismus dar.

(vii) Die Abbildung

$$\mathbb{R} \ni f(x) := \exp(ix) = \cos(x) + i \sin(x) \in \mathbb{C}$$

ist ein Gruppenhomomorphismus $(\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{C}, \cdot)$, denn es gilt $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$, also

$$\begin{aligned} \exp(i(x + y)) &= \exp(ix) \cdot \exp(iy) \\ \Leftrightarrow \cos(x + y) + i \sin(x + y) &= (\cos(x) + i \sin(x)) \cdot (\cos(y) + i \sin(y)). \end{aligned}$$

Nehmen wir den Real- bzw. Imaginärteil der linken und der rechten Seite, so ergeben sich die **Additionstheoreme** für die Winkelsumme

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y) \quad (8.3a)$$

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y). \quad (8.3b)$$

△

Lemma 8.5 (Eigenschaften von Gruppenhomomorphismen).

Es seien (G_1, \star) und (G_2, \square) Gruppen mit den neutralen Elementen e_1 bzw. e_2 . Weiter sei $f: G_1 \rightarrow G_2$ ein Homomorphismus. Dann gilt:

(i) $f(e_1) = e_2$.

(ii) $(f(a))' = f(a')$.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} f(e_1) \square e_2 &= f(e_1) && \text{da } e_2 \text{ neutrales Element in } (H_2, \square) \text{ ist} \\ &= f(e_1 \star e_1) && \text{da } e_1 \text{ neutrales Element in } (H_1, \star) \text{ ist} \\ &= f(e_1) \square f(e_1) && \text{da } f \text{ Homomorphismus ist.} \end{aligned}$$

Die Verknüpfung dieses Ausdrucks von links mit dem Inversen von $f(e_1)$, also die Anwendung der Kürzungsregel ([7.10a](#)), zeigt $e_2 = f(e_1)$, also [Aussage \(i\)](#).

Die [Aussage \(ii\)](#) folgt aus

$$\begin{aligned} f(a') \square f(a) &= f(a' \star a) && \text{da } f \text{ Homomorphismus ist} \\ &= f(e_1) && \text{da } e_1 \text{ neutrales Element in } (H_1, \star) \text{ ist} \\ &= e_2 && \text{wegen } \text{Aussage (i)}. \end{aligned}$$

Aus ([7.11b](#)) folgt nun $f(a') = (f(a))'$. □

Beachte: Gruppenhomomorphismen bilden neutrale Elemente auf neutrale Element ab und inverse Elemente auf inverse Elemente. Das [Lemma 8.5](#) gilt i. A. nicht, wenn (G_2, \square) keine Gruppe, sondern nur ein Monoid ist!

Quizfrage 8.2: Kann $f: (\mathbb{Z}, +) \ni n \mapsto n + 1 \in (\mathbb{Z}, +)$ ein Gruppenhomomorphismus sein?

Wir wollen nun Gruppenhomomorphismen genauer studieren.

Definition 8.6 (Bild und Kern eines Gruppenhomomorphismus).

Es seien (G_1, \star) und (G_2, \square) Gruppen mit den neutralen Elementen e_1 bzw. e_2 . Weiter sei $f: G_1 \rightarrow G_2$ ein Homomorphismus.

(i) Das **Bild** (englisch: **image**) von f ist definiert als

$$\text{Bild}(f) := \{f(x) \in G_2 \mid x \in G_1\} = f(G_1). \quad (8.4)$$

(ii) Der **Kern** (englisch: **kernel**) von f ist definiert als

$$\text{Kern}(f) := \{x \in G_1 \mid f(x) = e_2\} = f^{-1}(\{e_2\}). \quad (8.5)$$

△

Lemma 8.7 (Bild und Kern sind Untergruppen).

Es seien (G_1, \star) und (G_2, \square) Gruppen mit den neutralen Elementen e_1 bzw. e_2 . Weiter sei $f: G_1 \rightarrow G_2$ ein Homomorphismus.

(i) $\text{Bild}(f)$ ist eine Untergruppe von (G_2, \square) .

(ii) $\text{Kern}(f)$ ist eine Untergruppe von (G_1, \star) .

Beweis. **Aussage (i):** Wir überprüfen das Untergruppenkriterium (**Satz 7.33**). Es gilt $e_2 = f(e_1)$ nach **Lemma 8.5**, also $e_2 \in \text{Bild}(f)$ und $\text{Bild}(f) \neq \emptyset$. Weiter seien a_2, b_2 irgendwelche Elemente in $\text{Bild}(f)$. Wir müssen zeigen: $a_2 \square b_2' \in \text{Bild}(f)$.

Nach Definition von $\text{Bild}(f)$ gibt es $a_1, b_1 \in G_1$ mit $f(a_1) = a_2$ und $f(b_1) = b_2$. Daher ist

$$\begin{aligned} a_2 \square b_2' &= f(a_1) \square (f(b_1))' && \text{nach Voraussetzung} \\ &= f(a_1) \square f(b_1') && \text{nach Lemma 8.5} \\ &= f(a_1 \star b_1') && \text{da } f \text{ Homomorphismus ist} \end{aligned}$$

und damit $a_2 \square b_2' \in \text{Bild}(f)$.

Aussage (ii): Wir überprüfen wiederum das Untergruppenkriterium. Es gilt $f(e_1) = e_2$, also $e_1 \in \text{Kern}(f)$ und $\text{Kern}(f) \neq \emptyset$. Weiter seien a, b irgendwelche Elemente in $\text{Kern}(f)$. Wir müssen zeigen: $a \star b' \in \text{Kern}(f)$.

$$\begin{aligned} f(a \star b') &= f(a) \square f(b') && \text{da } f \text{ Homomorphismus ist} \\ &= f(a) \square (f(b))' && \text{nach Lemma 8.5} \\ &= e_2 \square e_2' && \text{da } a, b \in \text{Kern}(f) \text{ liegen} \\ &= e_2 && \text{da } e_2' = e_2 \text{ ist.} \end{aligned}$$

Damit ist $a \star b' \in \text{Kern}(f)$ gezeigt. □

Beispiel 8.8 (Bild und Kern sind Untergruppen).

(i) Für die Abbildung $\#: (\Sigma^*, \circ) \rightarrow (\mathbb{N}_0, +)$ aus **Beispiel 8.4** gilt:

$$\text{Bild}(\#) = \mathbb{N}_0 \quad \text{und} \quad \text{Kern}(\#) = \{()\},$$

wobei $()$ das leere Tupel kennzeichnet.

(ii) Für die Abbildung $\text{sgn}: (S_n, \circ) \rightarrow (\{\pm 1\}, \cdot)$ aus [Beispiel 8.4](#) gilt im Fall $n \geq 2$:

$$\text{Bild}(\text{sgn}) = \{\pm 1\} \quad \text{und} \quad \text{Kern}(\text{sgn}) = A_n,$$

die alternierende Gruppe, vgl. (7.20).

(iii) Für die Abbildung $f: (\mathbb{R}_{\neq 0}, \cdot) \ni x \mapsto x^2 (\mathbb{R}_{\neq 0}, \cdot)$ gilt

$$\text{Bild}(f) = \mathbb{R}_{>0} \quad \text{und} \quad \text{Kern}(f) = \{\pm 1\}. \quad \triangle$$

Lemma 8.9 (Charakterisierung der Injektivität).

Es seien (G_1, \star) und (G_2, \square) Gruppen mit den neutralen Elementen e_1 bzw. e_2 . Weiter sei $f: G_1 \rightarrow G_2$ ein Homomorphismus. Dann sind äquivalent:

- (i) f ist injektiv.
- (ii) $\text{Kern}(f) = \{e_1\}$.
- (iii) Die einzige Lösung der Gleichung $f(a) = e_2$ ist $a = e_1$.

Beachte: Um die Injektivität einer *beliebigen* Abbildung zu zeigen, müssen wir sicherstellen, dass niemals zwei verschiedene Elemente der Definitionsmenge auf dasselbe Element in der Zielmenge abgebildet werden ([Definition 6.10](#)). Wenn wir aber wissen, dass diese Abbildung ein Gruppenhomomorphismus ist, vereinfacht sich dieser Nachweis erheblich. Wir müssen dann nur noch zeigen, dass neben dem neutralen Element e_1 kein weiteres Element auf das neutrale Element e_2 abgebildet wird.

Beweis. [Aussage \(i\) \$\Rightarrow\$ Aussage \(ii\)](#): Nach [Lemma 8.5](#) gilt $f(e_1) = e_2$. Ist f injektiv, dann wird kein weiteres Element von G_1 auf e_2 abgebildet, also gilt $\text{Kern}(f) = \{e_1\}$.

[Aussage \(ii\) \$\Rightarrow\$ Aussage \(i\)](#): Umgekehrt gelte $\text{Kern}(f) = \{e_1\}$. Es seien weiter $a, b \in G_1$ mit $f(a) = f(b)$. Dann folgt

$$\begin{aligned} f(a \star b') &= f(a) \square f(b') \\ &= f(a) \square (f(b))' \\ &= f(a) \square (f(a))' \\ &= e_2, \end{aligned}$$

also $a \star b' \in \text{Kern}(f) = \{e_1\}$. Daher muss $a \star b' = e_1$ gelten, also wegen der Eindeutigkeit inverser Elemente $a = b$. Das zeigt die Injektivität von f .

Die Äquivalenz von [Aussage \(ii\)](#) und [Aussage \(iii\)](#) ist einfach zu sehen, weil $\text{Kern}(f)$ gerade aus den Lösungen der Gleichung $f(a) = e_2$ besteht und nach [Lemma 8.5](#) $f(e_1) = e_2$ gilt. \square

§ 8.1 NORMALTEILER

Wir hatten in [Lemma 7.40](#) gesehen, dass jede Untergruppe (U, \star) einer Gruppe (G, \star) zwei Äquivalenzrelationen \sim^U und ${}^U\sim$ auf G induziert, deren Äquivalenzklassen durch $a \star U$ bzw. $U \star a$ gegeben und die i. A. verschieden sind.

Definition 8.10 (Normalteiler).

Es sei (G, \star) eine Gruppe. Eine Untergruppe (N, \star) heißt eine **normale Untergruppe** (englisch: **normal subgroup**) oder **Normalteiler** von (G, \star) , wenn gilt:

$$a \star N = N \star a \quad \text{für alle } a \in G. \quad (8.6)$$

Manchmal notiert man die Eigenschaft, dass (N, \star) ein Normalteiler der Gruppe (G, \star) ist, als $(N, \star) \trianglelefteq (G, \star)$. △

Anders ausgedrückt ist (N, \star) genau dann eine normale Untergruppe, wenn die durch sie induzierten Äquivalenzrelationen \sim^N und ${}^N\sim$ (siehe [Lemma 7.40](#)) übereinstimmen.

Beachte: Die Relation „ist Normalteiler von“ ist zwar reflexiv und antisymmetrisch, aber im Gegensatz zur Relation „ist Untergruppe von“ i. A. nicht transitiv!

Beispiel 8.11 (Normalteiler).

- (i) In jeder Gruppe (G, \star) sind die trivialen Untergruppen $(\{e\}, \star)$ und (G, \star) Normalteiler.
- (ii) In einer abelschen Gruppe (G, \star) ist jede Untergruppe ein Normalteiler ([Folgerung 7.41](#)). △

Lemma 8.12 (Kerne von Gruppenhomomorphismen sind Normalteiler).

Es seien (G_1, \star) und (G_2, \square) Gruppen mit den neutralen Elementen e_1 bzw. e_2 . Weiter sei $f: G_1 \rightarrow G_2$ ein Homomorphismus. Dann gilt:

- (i) Für alle $a \in G_1$ gilt:

$$f^{-1}(\{f(a)\}) = a \star \text{Kern}(f) = \text{Kern}(f) \star a.$$

- (ii) $\text{Kern}(f)$ ist ein Normalteiler von G_1 .

Beachte: Das Urbild eines Elements in der Bildmenge $f(G_1)$ ist also immer eine Nebenklasse von $\text{Kern}(f)$.

Beweis. Wir zeigen zunächst die [Aussage \(i\)](#) in mehreren Schritten.

Schritt 1: $f^{-1}(\{f(a)\}) \subseteq \text{Kern}(f) \star a$:

Es sei $b \in f^{-1}(\{f(a)\})$, also $f(b) = f(a)$. Dann gilt also

$$\begin{aligned} e_2 &= f(b) \square (f(a))' \\ &= f(b) \square f(a') \quad \text{nach Lemma 8.5} \\ &= f(b \star a') \quad \text{da } f \text{ Homomorphismus ist.} \end{aligned}$$

Das heißt aber, dass $b \star a' \in f^{-1}(\{e_2\}) = \text{Kern}(f)$ liegt. Mit anderen Worten: $b \in \text{Kern}(f) \star a$.

Schritt 2: $f^{-1}(\{f(a)\}) \subseteq a \star \text{Kern}(f)$:

Ganz analog zu **Schritt 1** gilt auch

$$\begin{aligned} e_2 &= (f(a))' \square f(b) \\ &= f(a') \square f(b) && \text{nach Lemma 8.5} \\ &= f(a' \star b) && \text{da } f \text{ Homomorphismus ist.} \end{aligned}$$

Das heißt aber $a' \star b \in f^{-1}(\{e_2\}) = \text{Kern}(f)$ und daher $b \in a \star \text{Kern}(f)$.

Schritt 3: $\text{Kern}(f) \star a \subseteq f^{-1}(\{f(a)\})$:

Es sei $b \in \text{Kern}(f)$. Wir müssen $b \star a \in f^{-1}(\{f(a)\})$ zeigen, also $f(b \star a) = f(a)$. Das folgt aber sofort aus

$$\begin{aligned} f(b \star a) &= f(b) \square f(a) && \text{da } f \text{ Homomorphismus ist} \\ &= e_2 \square f(a) && \text{da } b \in \text{Kern}(f) \text{ ist} \\ &= f(a). \end{aligned}$$

Schritt 4: $a \star \text{Kern}(f) \subseteq f^{-1}(\{f(a)\})$:

Es sei $b \in \text{Kern}(f)$. Wir müssen $a \star b \in f^{-1}(\{f(a)\})$ zeigen, also $f(a \star b) = f(a)$. Das folgt aber sofort aus

$$\begin{aligned} f(a \star b) &= f(a) \square f(b) && \text{da } f \text{ Homomorphismus ist} \\ &= f(a) \square e_2 && \text{da } b \in \text{Kern}(f) \text{ ist} \\ &= f(a). \end{aligned}$$

Aus **Lemma 8.7** wissen wir, dass $\text{Kern}(f)$ eine Untergruppe von G_1 ist. Aus **Aussage (i)** folgt $a \star \text{Kern}(f) = \text{Kern}(f) \star a$ für alle $a \in G_1$, also ist $\text{Kern}(f)$ ein Normalteiler von G_1 . Das zeigt **Aussage (ii)**. \square

Wenn (N, \star) ein Normalteiler einer Gruppe (G, \star) ist, dann können wir die Faktormenge $G / \overset{N}{\sim} = G / N$ mit einer Gruppenverknüpfung $\tilde{\star}$ ausstatten. Aus der Faktormenge wird damit die **Faktorgruppe** (englisch: **factor group**) oder **Quotientengruppe** (englisch: **quotient group**) von G nach N . Man sagt auch: „Aus der Gruppe (G, \star) wird der Normalteiler N ausfaktoriert.“

Satz 8.13 (Faktorgruppe).

Es sei (G, \star) eine Gruppe mit neutralem Element e und (N, \star) einer ihrer Normalteiler. Dann gilt:

(i) Auf der Faktormenge

$$G / N = \{[a] = a \star N \mid a \in G\}$$

ist $\tilde{\star}$, definiert als

$$[a] \tilde{\star} [b] := [a \star b] \quad \text{für } a, b \in G, \tag{8.7}$$

eine assoziative Verknüpfung, bzgl. der $(G / N, \tilde{\star})$ eine Gruppe bildet. Das neutrale Element ist $[e] = N$, und für die Inversen gilt $[a]' = [a']$.

(ii) Die Abbildung

$$\pi: \begin{cases} G \rightarrow G/N \\ a \mapsto [a], \end{cases} \quad (8.8)$$

die jedem Element $a \in G$ seine Nebenklasse $[a]$ zuordnet, ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Sie heißt die **kanonische Surjektion** (englisch: **canonical surjection**) von G auf G/N . Es gilt $\text{Kern}(\pi) = N$.

(iii) Wenn (G, \star) abelsch ist, dann auch $(G/N, \tilde{\star})$.

Beweis. **Aussage (i):** Wir müssen zunächst zeigen, dass $\tilde{\star}$ überhaupt eine Verknüpfung auf G/N darstellt, also dass (8.7) wohldefiniert ist, da wir dort ja Bezug auf konkrete Repräsentanten $a, b \in G$ nehmen. Es seien also $a_1, a_2, b_1, b_2 \in G$ gegeben, wobei $a_1 \stackrel{N}{\sim} a_2$ und $b_1 \stackrel{N}{\sim} b_2$ angenommen wird, d. h., $a_1 \star N = a_2 \star N$ und $b_1 \star N = b_2 \star N$. Dann gilt

$$\begin{aligned} [a_2] \tilde{\star} [b_2] &= [a_2 \star b_2] \\ &= (a_2 \star b_2) \star N && \text{nach (7.25)} \\ &= a_2 \star (b_2 \star N) && \text{da } \star \text{ assoziativ ist} \\ &= a_2 \star (N \star b_2) && \text{da } N \text{ Normalteiler ist} \\ &= a_2 \star N \star b_2 && \text{da } \star \text{ assoziativ ist} \\ &= a_2 \star N \star N \star b_2 && \text{da } N \text{ Untergruppe ist} \\ &= (a_2 \star N) \star (N \star b_2) && \text{da } \star \text{ assoziativ ist} \\ &= (a_1 \star N) \star (N \star b_1) && \text{da } a_1 \stackrel{N}{\sim} a_2 \text{ und } b_1 \stackrel{N}{\sim} b_2 \\ &= (a_1 \star N) \star (b_1 \star N) && \text{da } N \text{ Normalteiler ist} \\ &= [a_1] \tilde{\star} [b_1]. \end{aligned}$$

Damit ist $\tilde{\star}$ als Verknüpfung auf G/N wohldefiniert. Die Assoziativität von $\tilde{\star}$ ergibt sich aus der Assoziativität von \star und der Normalteilereigenschaft, denn es gilt:

$$\begin{aligned} ([a] \tilde{\star} [b]) \tilde{\star} [c] &= [a \star b] \tilde{\star} [c] = (a \star b \star N) \star (c \star N) = (a \star b \star N) \star (N \star c) \\ &= a \star b \star N \star c = a \star b \star c \star N \\ [a] \tilde{\star} ([b] \tilde{\star} [c]) &= [a] \tilde{\star} [b \star c] = (a \star N) \star (b \star c \star N) = (a \star N) \star (N \star b \star c) \\ &= a \star N \star b \star c = a \star b \star c \star N \end{aligned}$$

Damit haben wir zunächst $(G/N, \tilde{\star})$ als Halbgruppe bestätigt.

Als nächstes zeigen wir, dass $[e] = e \star N = N$ das neutrale Element von $(G/N, \tilde{\star})$ ist. Dazu sei $a \in G$ beliebig. Dann gilt gemäß Definition (8.7)

$$[e] \tilde{\star} [a] = [e \star a] = [a] \quad \text{sowie} \quad [a] \tilde{\star} [e] = [a \star e] = [a].$$

Also ist $(G/N, \tilde{\star})$ ein Monoid mit neutralem Element $[e]$.

Nun zeigen wir, dass jedes $[a] \in G/N$ invertierbar ist mit Inverser $[a]' = [a']$:

$$[a] \tilde{\star} [a'] = [a \star a'] = [e] \quad \text{sowie} \quad [a'] \tilde{\star} [a] = [a' \star a] = [e].$$

Aussage (ii): Die Eigenschaft, ein Gruppenhomomorphismus zu sein, bedeutet $\pi(a \star b) = \pi(a) \tilde{\star} \pi(b)$. Nach Definition von π heißt das aber gerade $[a \star b] = [a] \tilde{\star} [b]$, was gerade die Definition von $\tilde{\star}$ war.

Die Surjektivität von π ist klar, denn ein beliebiges Element $[a]$ von G/N ist gerade das Bild von a unter π . Es gilt $\text{Kern}(\pi) = \pi^{-1}([e]) = N$.

Aussage (iii): Falls (G, \star) abelsch ist, dann gilt

$$[a] \tilde{\star} [b] = [a \star b] = [b \star a] = [b] \tilde{\star} [a],$$

also ist auch $(G/N, \tilde{\star})$ abelsch. □

Bemerkung 8.14 (Faktorgruppe).

Praktisch können wir die Faktorgruppe $(G/N, \tilde{\star})$ benutzen, um wie in der Gruppe (G, \star) zu „rechnen“, wobei jedoch Elemente a, b in derselben Äquivalenzklasse (für die also $a \star b' \in N$ gilt) nicht mehr unterschieden werden. Die Faktorgruppe $(G/N, \tilde{\star})$ ist also eine „gröbere Version“ der Gruppe (G, \star) . △

Beispiel 8.15 (Faktorgruppe).

- (i) Es sei (G, \star) eine beliebige Gruppe. Dann ist die triviale Untergruppe $\{e\}$ nach [Beispiel 8.11](#) ein Normalteiler. Die zugehörige Faktorgruppe $(G/\{e\}, \tilde{\star})$ ist isomorph zur Ausgangsgruppe (G, \star) selbst.
- (ii) Es sei (G, \star) eine beliebige Gruppe. Dann ist die triviale Untergruppe G nach [Beispiel 8.11](#) ein Normalteiler. Die zugehörige Faktorgruppe $(G/G, \tilde{\star})$ ist isomorph zu $(\{e\}, \star)$.
- (iii) In der abelschen Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ ist jede Untergruppe der Form $m\mathbb{Z}$ mit $m \in \mathbb{N}$ ein Normalteiler. Die Elemente der Faktorgruppe $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \tilde{+})$ sind die Nebenklassen von $m\mathbb{Z}$, also die Mengen der Form $[a] = a + m\mathbb{Z}$, vgl. [Beispiel 7.42](#). Es gilt

$$[a] \tilde{+} [b] = [a + b].$$

Die Faktorgruppe $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \tilde{+})$ ist isomorph zu einer uns bereits bekannten Gruppe, nämlich zur additiven Gruppe modulo m $(\mathbb{Z}_m, +_m)$ aus [Beispiel 7.16](#) mittels des Isomorphismus $[a] \mapsto$ natürlicher Repräsentant von a in \mathbb{Z}_m . Beispielsweise können wir für $m = 5$ wie folgt rechnen:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{in } (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \tilde{+}) & [-21] & \tilde{+} & [9] & = & [-12] \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{in } (\mathbb{Z}_5, +_5) & 4 & +_5 & 4 & = & 3 \end{array}$$

- (iv) In der abelschen Gruppe $(\mathbb{R}_{\neq 0}, \cdot)$ ist die Untergruppe $(\{\pm 1\}, \cdot)$ ein Normalteiler. Die Elemente der Faktorgruppe sind die Nebenklassen

$$[a] = a \cdot \{\pm 1\} = \{a, -a\}$$

für $a \in \mathbb{R}_{\neq 0}$. Ein mögliches Repräsentantensystem ist $\mathbb{R}_{>0}$. △

Bemerkung 8.16 (Normalteiler sind genau die Kerne von Gruppenhomomorphismen).

Es sei (G_1, \star) eine Gruppe. Nach [Lemma 8.12](#) ist für jeden beliebigen Gruppenhomomorphismus $f: G_1 \rightarrow G_2$ in irgendeine Gruppe (G_2, \square) die Untergruppe $\text{Kern}(f)$ immer ein Normalteiler von (G_1, \star) .

Umgekehrt kann man zeigen, dass jeder Normalteiler von dieser Form ist. Also gilt: Jeder Normalteiler von (G_1, \star) ist der Kern eines geeignet gewählten Gruppenhomomorphismus von (G_1, \star) in eine geeignet gewählte Gruppe (G_2, \square) . △

§ 8.2 DER HOMOMORPHIESATZ FÜR GRUPPEN

Mit Hilfe des Wissens aus § 8.1 können wir nun die Struktur von Gruppenhomomorphismen analysieren. Der folgende Struktursatz besagt, dass ein Gruppenhomomorphismus $f: G_1 \rightarrow G_2$ „nebenklassenweise“ wirkt. Er bildet also eine gesamte Nebenklasse von $\text{Kern}(f)$ auf ein- und dasselbe Element von G_2 ab und verschiedene Nebenklassen auf verschiedene Elemente. Das geschieht zudem strukturverträglich. Dadurch ist das $\text{Bild}(f)$ eines solchen Gruppenhomomorphismus bereits im Wesentlichen (d. h. bis auf Isomorphie) festgelegt ist durch (G_1, \star) und die Untergruppe $\text{Kern}(f)$.

Satz 8.17 (Homomorphiesatz für Gruppen¹⁰).

Es seien (G_1, \star) und (G_2, \square) Gruppen. Weiter sei $f: G_1 \rightarrow G_2$ ein Homomorphismus. Dann gilt

$$G_1 / \text{Kern}(f) \cong \text{Bild}(f) \quad (8.9a)$$

mit dem Isomorphismus

$$I([a]) := f(a) \quad \text{für } [a] = a \star \text{Kern}(f) \in G_1 / \text{Kern}(f). \quad (8.9b)$$

Beweis. Wir bezeichnen die neutralen Elemente von G_1 und G_2 mit e_1 bzw. e_2 .

Wir definieren $I: G_1 / \text{Kern}(f) \rightarrow \text{Bild}(f)$ wie in (8.9).

Schritt 1: Wir müssen zunächst zeigen, dass I als Abbildung wohldefiniert ist, da wir in der Definition (8.9b) Bezug auf den konkreten Repräsentanten $a \in G_1$ nehmen.

Es seien dazu $a, b \in G_1$ gegeben mit $a \stackrel{\text{Kern}(f)}{\sim} b$, d. h., $a \star \text{Kern}(f) = b \star \text{Kern}(f)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(a \star \text{Kern}(f)) &= f(a) \square f(\text{Kern}(f)) && \text{da } f \text{ Homomorphismus ist} \\ &= \{f(a)\} && \text{da } f(\text{Kern}(f)) = \{e_2\} \text{ gilt} \end{aligned}$$

und analog $f(b \star \text{Kern}(f)) = \{f(b)\}$. Aus $a \star \text{Kern}(f) = b \star \text{Kern}(f)$ folgt also $f(a) = f(b)$. Außerdem ist nach Definition von I klar, dass I in $\text{Bild}(f)$ abbildet. Damit ist I wohldefiniert.

Schritt 2: Als nächstes zeigen wir, dass I ein Homomorphismus ist. In der Tat gilt

$$\begin{aligned} I([a] \tilde{\star} [b]) &= I([a \star b]) && \text{nach Definition (8.7) von } \tilde{\star} \\ &= f(a \star b) && \text{nach Definition von } I \\ &= f(a) \square f(b) && \text{da } f \text{ Homomorphismus ist} \\ &= I([a]) \square I([b]) && \text{nach Definition von } I. \end{aligned}$$

Schritt 3: Es bleibt zu zeigen, dass I surjektiv und injektiv ist. Wenn $a_2 \in \text{Bild}(f)$ ist, dann existiert $a_1 \in G_1$ mit

$$a_2 = f(a_1) = I([a_1]).$$

Das zeigt die Surjektivität von I .

¹⁰englisch: fundamental theorem on group homomorphisms

Für die Injektivität genügt es nach [Lemma 8.9](#) zu zeigen, dass $\text{Kern}(I)$ nur aus dem neutralen Element des Definitionsbereiches $G_1 / \text{Kern}(f)$ besteht, d. h., aus $[e_1] = \text{Kern}(f)$, vgl. [Satz 8.13](#). Es gilt

$$\begin{aligned} \text{Kern}(I) &= \{[a] \in G_1 / \text{Kern}(f) \mid I([a]) = e_2\} && \text{nach Definition von } \text{Kern}(I) \\ &= \{[a] \in G_1 / \text{Kern}(f) \mid f(a) = e_2\} && \text{nach Definition von } I \\ &= \{[a] \in G_1 / \text{Kern}(f) \mid a \in \text{Kern}(f)\} && \text{nach Definition von } \text{Kern}(f) \\ &= \{a \star \text{Kern}(f) \mid a \in \text{Kern}(f)\} && \text{wegen } [a] = a \star \text{Kern}(f), \text{ siehe (7.25)} \\ &= \{\text{Kern}(f)\} && \text{, denn } \text{Kern}(f) \text{ ist Untergruppe von } (G_2, \star) \\ &&& \text{nach Lemma 8.7.} \quad \square \end{aligned}$$

Beispiel 8.18 (Homomorphiesatz für Gruppen).

- (i) Wir betrachten für festes $n \in \mathbb{N}$ die Abbildung $\text{sgn}: S_n \rightarrow (\{\pm 1\}, \cdot)$, vgl. [Beispiele 8.4](#) und [8.8](#). Es gilt $\text{Kern}(\text{sgn}) = A_n$. Für $n \geq 2$ sind die Elemente der Faktorgruppe $S_n / \text{Kern}(\text{sgn}) = S_n / A_n$ die beiden Nebenklassen

$$\begin{aligned} [\text{id}] &= \text{id} \circ A_n = \{\sigma \in S_n \mid \text{sgn}(\sigma) = 1\} && \text{(gerade Permutationen),} \\ [\tau] &= \tau \circ A_n = \{\sigma \in S_n \mid \text{sgn}(\sigma) = -1\} && \text{(ungerade Permutationen),} \end{aligned}$$

wobei τ irgendeine Transposition in S_n ist. Gemäß [Homomorphiesatz 8.17](#) ist

$$S_n / \text{Kern}(\text{sgn}) = S_n / A_n \cong \text{Bild}(\text{sgn}) = \{\pm 1\}.$$

Es werden alle geraden Permutationen $A_n = \text{Kern}(\text{sgn})$ ausfaktoriert.

Im Fall $n = 1$ gilt $A_1 = S_1$, daher gibt es nur die eine Nebenklasse

$$[\text{id}] = \text{id} \circ S_1 = \{\text{id}\}.$$

Der [Homomorphiesatz 8.17](#) besagt daher in diesem Fall

$$S_1 / \text{Kern}(\text{sgn}) = S_1 / A_1 \cong \text{Bild}(\text{sgn}) = \{1\}.$$

- (ii) Für die Abbildung $f: (\mathbb{R}_{\neq 0}, \cdot) \ni x \mapsto x^2 \in (\mathbb{R}_{\neq 0}, \cdot)$ aus [Beispiel 8.8](#) und [Beispiel 8.15](#) gilt

$$\mathbb{R}_{\neq 0} / \text{Kern}(f) = \mathbb{R}_{\neq 0} / \{\pm 1\} \cong \text{Bild}(f) = \mathbb{R}_{>0}.$$

Durch $\text{Kern}(f) = \{\pm 1\}$ wird das Vorzeichen ausfaktoriert. △

§ 9 RINGE

Literatur: [Bosch, 2014](#), Kapitel 5.1, [Fischer, Springborn, 2020](#), Kapitel 2.3

Ein Ring ist eine algebraische Struktur mit zwei Verknüpfungen, die gewissen Gesetzmäßigkeiten folgen. In Anlehnung an die wichtigen Beispiele \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} und \mathbb{C} mit den Verknüpfungen „Addition“ und „Multiplikation“ bezeichnen wir diese Verknüpfungen mit $+$ und \cdot .

Definition 9.1 (Ring).

Ein **Ring** (englisch: **ring**) $(R, +, \cdot)$ ist eine Menge R mit zwei (inneren) Verknüpfungen $+$ („Addition“) und \cdot („Multiplikation“), die die folgenden Bedingungen erfüllen:

- (i) $(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe.
- (ii) (R, \cdot) ist eine Halbgruppe.
- (iii) Es gelten die **Distributivgesetze** (englisch: **distributive laws**)

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \quad (9.1a)$$

$$(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c) \quad (9.1b)$$

für alle $a, b, c \in R$.

Ein Ring $(R, +, \cdot)$ heißt **kommutativ** (englisch: **commutative ring**), wenn die Halbgruppe (R, \cdot) kommutativ ist.¹¹ △

Wie üblich vereinbaren wir, dass \cdot stärker bindet als $+$ („Punkt- vor Strichrechnung“), also könnten wir die rechte Seite in (9.1a) auch in der Form $a \cdot b + a \cdot c$ schreiben.

Wie in Gruppen in additiver Notation üblich (**Bemerkung 7.13**), bezeichnen wir das neutrale Element bzgl. $+$ als **Nullelement** (englisch: **additive identity**) und schreiben dafür zunächst „ 0_R “. Außerdem bezeichnen wir das bzgl. $+$ inverse Element von $a \in R$ mit $-a$. Die Bezeichnung $a - b$ steht für $a + (-b)$.

Falls (R, \cdot) ein Monoid ist, so bezeichnen wir das neutrale Element bzgl. \cdot als **Einselement** (englisch: **multiplicative identity**) und schreiben dafür zunächst „ 1_R “. In diesem Fall heißt $(R, +, \cdot)$ auch ein **Ring mit Eins** (englisch: **ring with unity**) oder ein **unitärer Ring** (englisch: **unitary ring**). Existiert dann zu $a \in R$ bzgl. \cdot ein inverses Element, so bezeichnen wir dieses mit a^{-1} .

Wir vereinbaren, dass \cdot stärker bindet als $+$ und $-$, sodass wir beispielsweise statt $(a \cdot b) + (a \cdot c)$ auch $a \cdot b + a \cdot c$ schreiben können. Außerdem können wir $-a \cdot b$ schreiben statt $-(a \cdot b)$.

Beispiel 9.2 (Ring).

- (i) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ sind kommutative Ringe mit Eins.
- (ii) Der **Nullring** (englisch: **zero ring**) ist der (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmte Ring mit $R = \{0_R\}$ und den dadurch eindeutig bestimmten Verknüpfungen $0_R + 0_R = 0_R$ und $0_R \cdot 0_R = 0_R$. Da 0_R auch das neutrale Element bzgl. \cdot ist, ist der Nullring ein Ring mit Eins, und es gilt $1_R = 0_R$. Er ist der einzige Ring, in dem das Nullelement und das Einselement identisch sind, siehe **Lemma 9.3**.
- (iii) Für $m \in \mathbb{N}$ ist $(m\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring. Im Fall $m \neq 1$ besitzt er kein Einselement. Im Fall $m = 1$ ist $1 \in \mathbb{Z}$ das Einselement.
- (iv) Für $m \in \mathbb{N}$ ist $(\mathbb{Z}_m, +_m, \cdot_m)$ ein kommutativer Ring mit Einselement 1, denn nach **Beispiel 7.16** ist $(\mathbb{Z}_m, +_m)$ eine abelsche Gruppe und (\mathbb{Z}_m, \cdot_m) ein kommutatives Monoid. Er wird der **Ring von \mathbb{Z} modulo m** (englisch: **ring of \mathbb{Z} modulo m**) genannt. Im Fall $m = 1$ ist $(\mathbb{Z}_m, +_m, \cdot_m)$ der Nullring.

¹¹In diesem Fall fallen die beiden Distributivgesetze (9.1a) und (9.1b) zusammen. Es reicht also, eines von beiden zu prüfen.

(v) Es sei $(G, +)$ eine abelsche Gruppe. Wir definieren

$$\text{End}(G) := \{f: G \rightarrow G \mid f \text{ ist Endomorphismus}\} \quad (9.2)$$

und statt $\text{End}(G)$ mit den Verknüpfungen

$+$: $\text{End}(G) \times \text{End}(G) \rightarrow \text{End}(G)$ mit $(f, g) \mapsto f + g$, definiert durch $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$

\circ : $\text{End}(G) \times \text{End}(G) \rightarrow \text{End}(G)$ mit $(f, g) \mapsto f \circ g$, definiert durch $(f \circ g)(x) := f(g(x))$

aus. Dann ist $(\text{End}(G), +, \circ)$ ein Ring mit Einselement id_G , genannt der **Endomorphismenring** (englisch: **ring of endomorphisms**) der abelschen Gruppe $(G, +)$. Er ist i. A. nicht kommutativ.

Quizfrage 9.1: Warum definieren wir den Endomorphismenring nur für Endomorphismen auf abelschen Gruppen und nicht allgemeiner für Endomorphismen auf beliebigen Gruppen? \triangle

Lemma 9.3 (Rechenregeln in Ringen).

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit dem Nullelement 0_R . Für $a, b \in R$ gilt:

(i) $0_R \cdot a = 0_R = a \cdot 0_R$

(ii) $a \cdot (-b) = -a \cdot b = (-a) \cdot b$

(iii) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

(iv) Ist $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit Einselement 1_R , aber nicht der Nullring, dann gilt $1_R \neq 0_R$.

Beachte: Hat R das Einselement 1_R , dann folgt aus **Aussage (ii)** insbesondere $-b = (-1_R) \cdot b$.

Beweis. **Aussage (i):** Es gilt

$$\begin{aligned} 0_R + 0_R \cdot a &= 0_R \cdot a && \text{da } 0_R \text{ das neutrale Element von } (R, +) \text{ ist} \\ &= (0_R + 0_R) \cdot a && \text{da } 0_R \text{ das neutrale Element von } (R, +) \text{ ist} \\ &= 0_R \cdot a + 0_R \cdot a && \text{wegen des Distributivgesetzes (9.1b).} \end{aligned}$$

Die Anwendung der Kürzungsregel (7.10a) in der Gruppe $(R, +)$, also die Addition von $-(0_R \cdot a)$ zu beiden Seiten der Gleichung, zeigt $0_R \cdot a = 0_R \cdot a$. Das zweite Resultat, $a \cdot 0_R = 0_R$, folgt analog.

Aussage (ii): Wir zeigen zunächst, dass $a \cdot (-b) = -a \cdot b$ gilt, also dass $a \cdot (-b)$ das Inverse zu $a \cdot b$ in der Gruppe $(R, +)$ ist. Gemäß (7.11) reicht dafür der Nachweis von $a \cdot (-b) + a \cdot b = 0_R$ aus, also der einseitige Test. In der Tat haben wir

$$\begin{aligned} a \cdot (-b) + a \cdot b &= a \cdot (-b + b) && \text{wegen des Distributivgesetzes (9.1a)} \\ &= a \cdot 0_R \\ &= 0_R && \text{nach Aussage (i).} \end{aligned}$$

Die Aussage $(-a) \cdot b = -a \cdot b$ folgt analog.

Aussage (iii): Wir haben

$$\begin{aligned} (-a) \cdot (-b) &= -(a \cdot (-b)) && \text{nach Aussage (ii)} \\ &= -(-a \cdot b) && \text{nach Aussage (ii)} \\ &= a \cdot b && \text{nach (7.12) (doppelte Invertierung).} \end{aligned}$$

Aussage (iv): Es sei R ein Ring mit Einselement 1_R . Wir führen den Beweis durch Kontraposition. Wir nehmen also $1_R = 0_R$ an. Nun sei $a \in R$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} a &= a \cdot 1_R && \text{da } 1_R \text{ das neutrale Element von } (R, \cdot) \text{ ist} \\ &= a \cdot 0_R && \text{da } 1_R = 0_R \text{ angenommen wurde} \\ &= 0_R && \text{nach Aussage (i).} \end{aligned}$$

Der Ring R besteht also nur aus dem Nullelement 0_R , d. h., R ist der Nullring. □

Wir verwenden auch in Ringen $(R, +, \cdot)$ und insbesondere in der Gruppe $(R, +)$ die Schreibweise aus **Bemerkung 7.13**. Es gilt also für $n \in \mathbb{N}$

$$n a := a + \cdots + a.$$

Besitzt $(R, +, \cdot)$ das Einselement 1_R , dann gilt nach Distributivgesetz weiter

$$n a = a + \cdots + a = 1_R \cdot a + \cdots + 1_R \cdot a = (1_R + \cdots + 1_R) \cdot a = (n 1_R) \cdot a.$$

Weiter ist $(-n) a := -(n a)$ und $0 a := 0_R$.

Definition 9.4 (Charakteristik eines Ringes).

Es sei R ein Ring mit Einselement 1_R .

(i) Wenn es eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $n 1_R = 0_R$ gilt, so nennen wir die kleinste solche Zahl

$$\min\{n \in \mathbb{N} \mid n 1_R = 0_R\}$$

die **Charakteristik** (englisch: *characteristic*) von R , kurz $\text{char}(R)$.

(ii) Gilt hingegen $n 1_R \neq 0_R$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so sagen wir, R habe die **Charakteristik** (englisch: *characteristic*) 0 und schreiben $\text{char}(R) = 0$. △

Beispiel 9.5 (Charakteristik eines Ringes).

(i) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ haben Charakteristik 0.

(ii) Der Nullring ist (bis auf Isomorphie) der einzige Ring mit Charakteristik 1, also der einzige Ring, in dem $1_R = 0_R$ gilt, vgl. **Lemma 9.3**.

(iii) Der Ring von \mathbb{Z} modulo m $(\mathbb{Z}_m, +_m, \cdot_m)$ hat Charakteristik $m \in \mathbb{N}$.

(iv) Der Restklassenring modulo m $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \tilde{+}, \tilde{\cdot})$ aus dem folgenden **Beispiel 9.6** hat ebenfalls Charakteristik $m \in \mathbb{N}$. △

Beispiel 9.6 (Restklassenring modulo m).

Es sei $m \in \mathbb{N}$. Wir erinnern an die Faktorgruppe $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ aus **Beispiel 8.15** mit den Elementen $[a] = a+m\mathbb{Z}$ (für $a \in \mathbb{Z}$), der kommutativen Verknüpfung $[a] \tilde{+} [b] = [a+b]$ und dem neutralen Element $[0]$. $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \tilde{+})$ bildet eine kommutative Gruppe.

Weiter bildet $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \tilde{\cdot})$ mit der Verknüpfung $[a] \tilde{\cdot} [b] = [a \cdot b]$ ein kommutatives Monoid mit dem neutralen Element $[1]$, siehe auch **Hausaufgabe I-6.1**.

Schließlich können wir zeigen, dass die Distributivgesetze (9.1a) und (9.1b) gelten, denn:

$$\begin{aligned}
 [a] \tilde{+} ([b] \tilde{+} [c]) &= [a] \tilde{+} [b + c] && \text{nach Definition von } \tilde{+} \\
 &= [a \cdot (b + c)] && \text{nach Definition von } \tilde{\cdot} \\
 &= [a \cdot b + a \cdot c] && \text{nach Distributivgesetz in } \mathbb{Z} \\
 &= [a \cdot b] \tilde{+} [a \cdot c] && \text{nach Definition von } \tilde{+} \\
 &= [a] \tilde{+} [b] \tilde{+} [a] \tilde{+} [c] && \text{nach Definition von } \tilde{\cdot}.
 \end{aligned}$$

Das zweite Distributivgesetz (9.1b) ist wegen der Kommutativität der Halbgruppe $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \tilde{+}, \tilde{\cdot})$ automatisch erfüllt. Daher bildet $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \tilde{+}, \tilde{\cdot})$ einen kommutativen Ring mit Eins, genannt der **Restklassenring modulo m** . Im Fall $m = 1$ ist $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \tilde{+}, \tilde{\cdot})$ der Nullring.

Die Verknüpfungstabellen für $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ für $m \in \{1, 2, 3, 4\}$ lauten:

$\tilde{+}$ [0]	[0]	$\tilde{\cdot}$ [0]	[0]
[0] [0]	[0]	[0] [0]	[0]
$\tilde{+}$ [0] [1]	[0] [1]	$\tilde{\cdot}$ [0] [1]	[0] [1]
[0] [0] [1]	[0] [1]	[0] [0] [0]	[0] [0]
[1] [1] [0]	[1] [0]	[1] [0] [1]	[0] [1]
$\tilde{+}$ [0] [1] [2]	[0] [1] [2]	$\tilde{\cdot}$ [0] [1] [2]	[0] [1] [2]
[0] [0] [1] [2]	[0] [1] [2]	[0] [0] [0] [0]	[0] [0] [0]
[1] [1] [2] [0]	[1] [2] [0]	[1] [0] [1] [2]	[0] [1] [2]
[2] [2] [0] [1]	[2] [0] [1]	[2] [0] [2] [1]	[0] [2] [1]
$\tilde{+}$ [0] [1] [2] [3]	[0] [1] [2] [3]	$\tilde{\cdot}$ [0] [1] [2] [3]	[0] [1] [2] [3]
[0] [0] [1] [2] [3]	[0] [1] [2] [3]	[0] [0] [0] [0] [0]	[0] [0] [0] [0]
[1] [1] [2] [3] [0]	[1] [2] [3] [0]	[1] [0] [1] [2] [3]	[0] [1] [2] [3]
[2] [2] [3] [0] [1]	[2] [3] [0] [1]	[2] [0] [2] [0] [2]	[0] [2] [0] [2]
[3] [3] [0] [1] [2]	[3] [0] [1] [2]	[3] [0] [3] [2] [1]	[0] [3] [2] [1]

△

Die für $m = 4$ in $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ erstmalig auftretende Situation $[2] \tilde{\cdot} [2] = [0]$ wollen wir benennen:

Definition 9.7 (Nullteiler, Nullteilerfreiheit, Integritätsring).

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring.

- (i) Das Element $a \in R$ heißt ein **Linksnullteiler** (englisch: **left zero divisor**), wenn es ein $b \in R \setminus \{0_R\}$ gibt, sodass $a \cdot b = 0_R$ gilt. Das Element b heißt ein **Rechtsnullteiler** (englisch: **right zero divisor**), wenn es ein $a \in R \setminus \{0_R\}$ gibt, sodass $a \cdot b = 0_R$ gilt.
- (ii) Der Ring $(R, +, \cdot)$ heißt **nullteilerfrei** (englisch: **ring with no zero divisors**), wenn es außer dem Nullelement 0_R keine weiteren Links- oder Rechtsnullteiler gibt, wenn also gilt:

$$\forall a, b \in R (a \cdot b = 0_R \Rightarrow a = 0_R \text{ oder } b = 0_R). \tag{9.3}$$

(Anders gesagt: Aus $a \neq 0_R$ und $b \neq 0_R$ folgt $a \cdot b \neq 0_R$.)

- (iii) Ein Ring $(R, +, \cdot)$ heißt **Integritätsring** oder **Integritätsbereich** (englisch: *integral domain*), wenn gilt: $(R, +, \cdot)$ ist ein kommutativer, nullteilerfreier Ring mit Eins ungleich dem Nullring. \triangle

Quizfrage 9.2: Ist der Nullring nullteilerfrei?

Beispiel 9.8 (Integritätsringe und Gegenbeispiele).

- (i) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ sind Integritätsringe.
- (ii) Der Restklassenring modulo m $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \tilde{+}, \tilde{\cdot})$ ist ein Integritätsring genau dann, wenn $m \in \mathbb{N}$ eine Primzahl ist; siehe [Satz 9.9](#).
- (iii) Es sei X eine Menge, $(R, +, \cdot)$ ein Ring und $R^X = \{f \mid f: X \rightarrow R\}$. Definieren wir ähnlich wie in [Beispiel 7.2](#) die Verknüpfungen $+$ und \cdot auf R^X als

$$\begin{aligned} +: R^X \times R^X &\rightarrow R^X & \text{mit } (f, g) &\mapsto f + g, \text{ definiert durch } (f + g)(x) := f(x) + g(x), \\ \cdot: R^X \times R^X &\rightarrow R^X & \text{mit } (f, g) &\mapsto f \cdot g, \text{ definiert durch } (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x), \end{aligned}$$

dann ist $(R^X, +, \cdot)$ ein Ring. $(R^X, +, \cdot)$ ist kommutativ genau dann, wenn $(R, +, \cdot)$ kommutativ ist. $(R^X, +, \cdot)$ besitzt ein Einselement genau dann, wenn $(R, +, \cdot)$ ein Einselement besitzt.

Beachte: Wenn $(R, +, \cdot)$ nicht der Nullring ist, dann ist $(R^X, +, \cdot)$ nicht nullteilerfrei, sobald X zwei oder mehr Elemente enthält! (**Quizfrage 9.3:** Wie sieht man das?) \triangle

Satz 9.9 (Nullteilerfreiheit des Restklassenringes).

Der Restklassenring modulo m $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \tilde{+}, \tilde{\cdot})$ ist ein Integritätsring genau dann, wenn $m \in \mathbb{N}$ eine Primzahl ist.

Beweis. Für $m = 1$ ist $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \tilde{+}, \tilde{\cdot})$ der Nullring und damit kein Integritätsring. Wir betrachten also im Weiteren nur den Fall $m \geq 2$, für den $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \tilde{+}, \tilde{\cdot})$ ein kommutativer Ring ungleich dem Nullring und mit dem Einselement $[1]$ ist. Die Frage, ob dieser Ring ein Integritätsring ist, hängt also genau an der Nullteilerfreiheit. Das Nullelement von $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \tilde{+}, \tilde{\cdot})$ ist $[0]$.

Es sei $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 4$, keine Primzahl, lässt sich also schreiben als $m = a \cdot b$ für Zahlen $a, b \in \llbracket 2, m-1 \rrbracket$. Die zugehörigen Restklassen $[a]$ und $[b]$ sind ungleich $[0]$ (**Quizfrage 9.4:** Warum?) Es gilt

$$\begin{aligned} [0] &= [m] && \text{da } 0 \stackrel{m}{\equiv} m \\ &= [a \cdot b] && \text{da } m = a \cdot b \\ &= [a] \tilde{\cdot} [b] && \text{nach Definition von } \tilde{\cdot}. \end{aligned}$$

Damit ist $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \tilde{+}, \tilde{\cdot})$ nicht nullteilerfrei.

Es sei nun umgekehrt $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, eine Primzahl. Wir nehmen an, $[a]$ und $[b]$ seien Elemente aus $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ mit $[0] = [a] \tilde{\cdot} [b] = [a \cdot b]$. Das heißt aber, da 0 und $a \cdot b$ in derselben Restklasse modulo m liegen, dass $a \cdot b = mz$ gilt für irgendein $z \in \mathbb{Z}$. Da m eine Primzahl ist, kommt m in der (vorzeichenbehafteten) Primfaktorzerlegung von $a \cdot b$ vor. Das heißt, dass a oder b den Primfaktor m enthält, also gilt $m \mid a$ oder $m \mid b$, woraus $[a] = [0]$ oder $[b] = [0]$ folgt. Damit ist $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \tilde{+}, \tilde{\cdot})$ nullteilerfrei. \square

Definition 9.10 (Unterring, vgl. [Definition 7.31](#) einer Untergruppe).

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring.

- (i) Eine Teilmenge $U \subseteq R$ heißt ein **Unterring** (englisch: **subring**) von $(R, +, \cdot)$, wenn U bzgl. $+$ und bzgl. \cdot abgeschlossen ist und wenn $(U, +, \cdot)$ selbst wieder ein Ring ist.

Beachte: Das ist genau dann erfüllt, wenn $(U, +)$ eine Untergruppe von $(R, +)$ ist und wenn U bzgl. \cdot abgeschlossen ist.

- (ii) Ist $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit Einselement 1_R , dann fordern wir für einen **Unterring mit Eins** (englisch: **subring with unity**) $(U, +, \cdot)$ zusätzlich zu **Eigenschaft (i)**, dass $1_R \in U$ liegt.¹²

Beachte: Es reicht nicht aus, zu fordern, dass (U, \cdot) irgendein neutrales Element besitzt.

- (iii) Ein Unterring $(U, +, \cdot)$ von $(R, +, \cdot)$ heißt **echt** (englisch: **proper subring**), wenn $U \subsetneq R$ gilt. Δ

Definition 9.11 (Ringhomomorphismus, vgl. **Definition 8.1** eines Halbgruppenhomomorphismus).

Es seien $(R_1, +_1, \cdot_1)$ und $(R_2, +_2, \cdot_2)$ zwei Ringe.

- (i) Eine Abbildung $f: R_1 \rightarrow R_2$ heißt **strukturverträglich** oder ein **(Ring-)Homomorphismus** (englisch: **ring homomorphism**) von $(R_1, +_1, \cdot_1)$ in $(R_2, +_2, \cdot_2)$, wenn gilt:

$$f(a +_1 b) = f(a) +_2 f(b) \quad \text{für alle } a, b \in R_1, \quad (9.4a)$$

$$f(a \cdot_1 b) = f(a) \cdot_2 f(b) \quad \text{für alle } a, b \in R_1. \quad (9.4b)$$

Besitzen beide Ringe ein Einselement 1_{R_1} bzw. 1_{R_2} und fordern wir zusätzlich

$$f(1_{R_1}) = 1_{R_2} \quad (9.4c)$$

dann nennen wir f genauer einen **Homomorphismus von Ringen mit Eins** (englisch: **homomorphism of rings with unity**).

- (ii) Wie in **Definition 8.1** sprechen wir im Fall $(R_1, +_1, \cdot_1) = (R_2, +_2, \cdot_2)$ von einem **(Ring-)Endomorphismus** (englisch: **ring endomorphism**) bzw. von einem **Endomorphismus eines Ringes mit Eins** (englisch: **endomorphism of a ring with unity**).
- (iii) Ist $f: R_1 \rightarrow R_2$ bijektiv, so heißt f auch **strukturertretend** oder ein **(Ring-)Isomorphismus** (englisch: **ring isomorphism**) bzw. ein **Isomorphismus von Ringen mit Eins** (englisch: **endomorphism of a ring with unity**). In diesem Fall nennen wir $(R_1, +_1, \cdot_1)$ und $(R_2, +_2, \cdot_2)$ auch zueinander **isomorphe Ringe** (englisch: **isomorphic rings**) bzw. zueinander **isomorphe Ringe mit Eins** (englisch: **isomorphic rings with unity**) und schreiben

$$(R_1, +_1, \cdot_1) \cong (R_2, +_2, \cdot_2).$$

- (iv) Im Fall $(R_1, +_1, \cdot_1) = (R_2, +_2, \cdot_2)$ und $f: R_1 \rightarrow R_2$ bijektiv sprechen wir auch von einem **(Ring-)Automorphismus** (englisch: **ring automorphism**) bzw. von einem **Automorphismus eines Ringes mit Eins** (englisch: **automorphism of a ring with unity**).

- (v) Das **Bild** (englisch: **image**) und der **Kern** (englisch: **kernel**) eines Ringhomomorphismus $f: R_1 \rightarrow R_2$ sind definiert als

$$\text{Bild}(f) := \{f(x) \in R_2 \mid x \in R_1\} = f(R_1), \quad (9.5)$$

$$\text{Kern}(f) := \{x \in R_1 \mid f(x) = 0_{R_2}\} = f^{-1}(\{0_{R_2}\}). \quad \Delta$$

¹²Dadurch ist der Unterring $(U, +, \cdot)$ dann natürlich selbst wieder ein Ring mit dem Einselement 1_R .

Die Beziehung (9.4a) besagt, dass $f: (R_1, +_1) \rightarrow (R_2, +_2)$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Aus Lemma 8.5 folgt damit für die Nullelemente 0_{R_1} bzw. 0_{R_2} notwendigerweise

$$f(0_{R_1}) = 0_{R_2}. \quad (9.6)$$

Weiter bedeutet (9.4b), dass $f: (R_1, \cdot_1) \rightarrow (R_2, \cdot_2)$ ein Halbgruppenhomomorphismus ist. (9.4b) und (9.4c) zusammen bedeuten, dass $f: (R_1, \cdot_1) \rightarrow (R_2, \cdot_2)$ ein Monoidhomomorphismus ist.

Beispiel 9.12 (Ringhomomorphismen).

(i) Die Abbildung

$$f: (\mathbb{Z}, +, \cdot) \ni a \mapsto [a] = a + m\mathbb{Z} \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \tilde{+}, \tilde{\cdot})$$

ist ein surjektiver Ringhomomorphismus zwischen zwei kommutativen Ringen mit Eins, denn: f ist als kanonische Surjektion der Faktorgruppe nach Satz 8.13 und Beispiel 8.15 ein surjektiver Gruppenhomomorphismus $f: (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \tilde{+})$, und außerdem ist $f: (\mathbb{Z}, \cdot) \rightarrow (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \tilde{\cdot})$ ein Monoidhomomorphismus, siehe Beispiel 9.6 und Hausaufgabe I-6.1.

Es gilt

$$\begin{aligned} \text{Bild}(f) &= \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \\ \text{Kern}(f) &= f^{-1}([0]) = m\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

(ii) Für $m \in \mathbb{N}$ ist die Abbildung

$$f: (\mathbb{Z}_m, +_m, \cdot_m) \ni a \mapsto [a] = a + m\mathbb{Z} \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \tilde{+}, \tilde{\cdot})$$

ein Ringisomorphismus zwischen dem Ring von \mathbb{Z} modulo m (Beispiel 9.2) und dem Restklassenring modulo m (Beispiel 9.6), beides kommutative Ringe mit Eins, denn: f ist nach Beispiel 8.15 ein Gruppenisomorphismus $f: (\mathbb{Z}_m, +_m) \rightarrow (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \tilde{+})$, und außerdem ist $f: (\mathbb{Z}_m, \cdot_m) \rightarrow (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \tilde{\cdot})$ nach Hausaufgabe I-6.1 ein Monoidisomorphismus.

Es gilt

$$\begin{aligned} \text{Bild}(f) &= \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \\ \text{Kern}(f) &= f^{-1}([0]) = \{0\}. \end{aligned} \quad \triangle$$

Ende der Vorlesung 12

Ende der Woche 6

§ 10 KÖRPER

Literatur: Beutelspacher, 2014, Kapitel 2, Bosch, 2014, Kapitel 1.3, Fischer, Springborn, 2020, Kapitel 2.3, Deiser, 2022b, Kapitel 2.2

Ein Körper ist – wie ein Ring – eine algebraische Struktur mit zwei Verknüpfungen. In Anlehnung an die wichtigen Beispiele \mathbb{Q} , \mathbb{R} und \mathbb{C} mit den Verknüpfungen „Addition“ und „Multiplikation“ bezeichnen wir diese Verknüpfungen wieder mit $+$ und \cdot .

Definition 10.1 (Körper).

Ein **Körper** (englisch: **field**) $(K, +, \cdot)$ ist eine Menge K mit zwei (inneren) Verknüpfungen $+$ („Addition“) und \cdot („Multiplikation“), die die folgenden Bedingungen erfüllen:

- (i) $(K, +)$ ist eine abelsche Gruppe. Das Nullelement bezeichnen wir mit 0_K .
- (ii) $(K \setminus \{0_K\}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe. Das Einselement bezeichnen wir mit 1_K .
- (iii) Es gelten die **Distributivgesetze** (englisch: **distributive laws**)

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \quad (10.1a)$$

$$(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c) \quad (10.1b)$$

für alle $a, b, c \in K$.¹³

△

Oft wird $K \setminus \{0_K\}$ als K^* oder als K^\times abgekürzt. Wir verwenden diese Bezeichnungen jedoch hier nicht.

Beispiel 10.2 (Körper und Gegenbeispiele).

- (i) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ sind Körper mit dem Nullelement 0 und dem Einselement 1.
- (ii) $(\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$ aus **Beispiel 7.16** mit den Verknüpfungstafeln aus **Beispiel 7.2** ist ein Körper mit dem Nullelement 0 und dem Einselement 1.
- (iii) Der Restklassenring $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \tilde{+}, \tilde{\cdot})$ mit dem Nullelement $[0]$ und dem Einselement $[1]$ aus **Beispiel 9.6** ist *kein* Körper, da $[2]$ nicht das Nullelement ist und $[2] \tilde{\cdot} [a] \neq [1]$ für alle $a \in \mathbb{Z}$ gilt und damit $[2]$ kein multiplikatives Inverses besitzt.
- (iv) Es sei X eine Menge. Für die bisher besprochenen algebraischen Strukturen S (Halbgruppe, Monoid, Gruppe, Ring) galt, dass S^X , ausgestattet punktweise mit der oder den Verknüpfung(en) von S , die algebraische Struktur erbt, also ebenfalls Halbgruppe, Monoid, Gruppe oder Ring ist.

Wenn jedoch $(K, +, \cdot)$ ein Körper ist, dann ist $(K^X, +, \cdot)$ i. A. *kein* Körper, sondern nur ein kommutativer Ring mit Eins. (**Quizfrage 10.1**: Woran liegt das?) △

Lemma 10.3 (Eigenschaften eines Körpers).

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper mit dem Nullelement 0_K und dem Einselement 1_K . Dann gilt:

- (i) $0_K \neq 1_K$. Ein Körper hat also mindestens zwei Elemente.
- (ii) $(K, +, \cdot)$ ist ein kommutativer, nullteilerfreier Ring mit dem Einselement 1_K ungleich dem Nullring, also ein Integritätsring.
- (iii) Es gelten die **Kürzungsregeln** (englisch: **cancellation rules**)

$$a \cdot b_1 = a \cdot b_2 \quad \Rightarrow \quad b_1 = b_2 \quad (10.2a)$$

$$b_1 \cdot a = b_2 \cdot a \quad \Rightarrow \quad b_1 = b_2 \quad (10.2b)$$

für $a, b_1, b_2 \in K$ mit $a \neq 0_K$.

¹³Wie bereits in kommutativen Ringen fallen die beiden Distributivgesetze (10.1a) und (10.1b) zusammen. Es reicht also, eines von beiden zu prüfen.

Beweis. **Aussage (i):** Nach [Definition 10.1](#) ist $K \setminus \{0_K\}$ eine Gruppe mit dem Einselement 1_K , also muss $0_K \neq 1_K$ gelten.

Aussage (ii): Nach [Definition 10.1](#) ist $(K, +)$ eine abelsche Gruppe mit dem Nullelement 0_K . Wenn wir zeigen können, dass (K, \cdot) ein abelsches Monoid mit dem Einselement 1_K ist, dann ist $(K, +, \cdot)$ per [Definition 9.1](#) ein abelscher Ring mit dem Einselement 1_K . Dieser ist nach [Aussage \(i\)](#) nicht der Nullring. Wenn wir anschließend zeigen können, dass $(K, +, \cdot)$ nullteilerfrei ist, dann ist [Aussage \(ii\)](#) gezeigt.

Schritt 1: Wir zeigen: $0_K \cdot a = 0_K = a \cdot 0_K$ für alle $a \in K$.

Dieses Ergebnis folgt wie im Beweis von [Lemma 9.3](#), [Aussage \(i\)](#): $0_K + 0_K \cdot a = 0_K \cdot a = (0_K + 0_K) \cdot a = 0_K \cdot a + 0_K \cdot a$ und daher $0_K \cdot a = 0_K$. Analog können wir $a \cdot 0_K = 0_K$ zeigen.

Schritt 2: Wir zeigen: \cdot ist eine *assoziative* Verknüpfung auf ganz K :

Per Definition ist \cdot eine Verknüpfung auf ganz K . Die Assoziativität $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ ist klar, wenn nur Elemente $a, b, c \in K \setminus \{0_K\}$ verknüpft werden, da $(K \setminus \{0_K\}, \cdot)$ eine Gruppe ist. Wenn eines oder mehrere Elemente a, b, c aber das Nullelement 0_K sind, dann gilt wegen [Schritt 1](#), dass sowohl $a \cdot (b \cdot c)$ als auch $(a \cdot b) \cdot c$ gleich 0_K sind. Die Assoziativität von \cdot gilt also auf ganz K .

Schritt 3: Wir zeigen: \cdot ist eine *kommutative* Verknüpfung auf ganz K :

Die Kommutativität $a \cdot b = b \cdot a$ ist klar, wenn nur Elemente $a, b \in K \setminus \{0_K\}$ verknüpft werden, da $(K \setminus \{0_K\}, \cdot)$ eine kommutative Gruppe ist. Wenn eines oder mehrere Elemente a, b aber das Nullelement 0_K sind, dann gilt wegen [Schritt 1](#), dass sowohl $a \cdot b$ als auch $b \cdot a$ gleich 0_K sind. Die Kommutativität von \cdot gilt also auf ganz K .

Schritt 4: Wir zeigen: 1_K ist neutrales Element bzgl. \cdot auf ganz K :

Wir wissen bereits $1_K \cdot a = a \cdot 1_K$ für alle $a \in K \setminus \{0_K\}$. Ist nun $a = 0_K$, so gilt wegen [Schritt 1](#) $1_K \cdot a = a \cdot 1_K = 0_K$. Damit ist 1_K neutrales Element bzgl. \cdot auf ganz K .

Damit haben wir bisher gezeigt, dass (K, \cdot) ein abelsches Monoid mit dem Einselement 1_K ist, also ist $(K, +, \cdot)$ per [Definition 9.1](#) ein abelscher Ring mit dem Einselement 1_K , der [Aussage \(i\)](#) nicht der Nullring ist.

Schritt 5: Wir zeigen: Der Ring $(K, +, \cdot)$ ist nullteilerfrei.

Wenn $a, b \in K \setminus \{0_K\}$ sind, dann ist auch $a \cdot b \in K \setminus \{0_K\}$, da per Definition $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ eine Gruppe und damit insbesondere $K \setminus \{0\}$ abgeschlossen bzgl. \cdot ist. Das heißt, $(K, +, \cdot)$ ist nullteilerfrei.

Aussage (iii): Für $a, b_1, b_2 \in K \setminus \{0\}$ sind die Kürzungsregeln ([10.2](#)) nichts anderes als die Kürzungsregeln ([7.10](#)) in der Gruppe $(K \setminus \{0\}, \cdot)$. Wir zeigen ([10.2a](#)) in den verbleibenden Fällen. Ist $b_1 = 0_K$, dann folgt aus [Aussage \(i\)](#) und der Voraussetzung $0_K = a \cdot b_1 = a \cdot b_2$. Wegen der Nullteilerfreiheit und $a \neq 0_K$ folgt weiter $b_2 = 0_K$, also $b_1 = b_2$. Ist andererseits $b_2 = 0_K$, dann folgt aus [Aussage \(i\)](#) und der Voraussetzung $0_K = a \cdot b_2 = a \cdot b_1$. Wegen der Nullteilerfreiheit und $a \neq 0_K$ folgt weiter $b_1 = 0_K$, also wiederum $b_1 = b_2$.

Die Aussage ([10.2b](#)) können wir analog beweisen. □

Beachte: Die Rechenregeln in Ringen aus [Lemma 9.3](#) gelten also auch in Körpern.

Die [Definition 9.4](#) der Charakteristik eines Ringes wird auch auf Körper angewendet. Für Körper ist die Charakteristik entweder 0 oder eine Primzahl.

Satz 10.4 (Wann ist ein Ring ein Körper?).

Es sei K eine Menge mit zwei (inneren) Verknüpfungen $+$ und \cdot . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) $(K, +, \cdot)$ ist ein Körper, dessen Nullelement mit 0_K und dessen Einselement mit 1_K bezeichnet werden.
- (ii) $(K, +, \cdot)$ ist ein kommutativer Ring mit dem Einselement 1_K und dem Nullelement $0_K \neq 1_K$, wobei zu jedem $a \in K \setminus \{0_K\}$ ein Inverses bzgl. \cdot in K existiert.

Beweis. [Aussage \(i\) \$\Rightarrow\$ Aussage \(ii\)](#): Nach [Lemma 10.3](#) ist $(K, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit dem Einselement 1_K und dem Nullelement $0_K \neq 1_K$. Da $(K \setminus \{0_K\}, \cdot)$ eine Gruppe ist, existiert zu jedem $a \in K \setminus \{0_K\}$ ein Inverses bzgl. \cdot .

[Aussage \(ii\) \$\Rightarrow\$ Aussage \(i\)](#): Nach Voraussetzung ist $(K, +)$ eine abelsche Gruppe mit dem Nullelement 0_K . Weiter gelten die Distributivgesetze ([10.1](#)) nach Voraussetzung. Es bleibt zu zeigen, dass $(K \setminus \{0_K\}, \cdot)$ eine abelsche Gruppe mit dem Einselement 1_K ist.

Nach Voraussetzung ist (K, \cdot) ein abelsches Monoid mit neutralem Element 1_K . Aus der Eigenschaft $\forall a \in K \setminus \{0\} \exists a^{-1} \in K (a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1_K)$ folgt die Nullteilerfreiheit:

$$a \cdot b = 0_K \quad \wedge \quad a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad b = a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot 0_K = 0_K.$$

Also ist $K \setminus \{0_K\}$ bzgl. \cdot abgeschlossen. Damit erbt $(K \setminus \{0_K\}, \cdot)$ die Eigenschaft, ein abelsches Monoid mit dem Einselement 1_K zu sein, von (K, \cdot) . Da jedes Element $a \in K \setminus \{0_K\}$ nach Voraussetzung ein Inverses a^{-1} bzgl. \cdot mit $a^{-1} \in K$ besitzt und a^{-1} wegen $a \cdot 0_K = 0_K \neq 1_K$ sogar in $K \setminus \{0_K\}$ liegen muss, ist $(K \setminus \{0_K\}, \cdot)$ als abelsche Gruppe bestätigt. Das heißt, $(K, +, \cdot)$ ist ein Körper. \square

Satz 10.5 (endliche Integritätsringe sind Körper).

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Integritätsring mit endlich vielen Elementen. Dann ist $(R, +, \cdot)$ ein Körper.

Beweis. Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Integritätsring, also ein kommutativer, nullteilerfreier Ring mit dem Einselement 1_R ungleich dem Nullring. Wir wissen also bereits: $(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe mit dem Nullelement 0_R , und (R, \cdot) ist eine abelsche Halbgruppe mit dem Einselement $1_R \neq 0_R$ ([Lemma 9.3](#)). Aus der Nullteilerfreiheit folgt, dass $R \setminus \{0_R\}$ bzgl. \cdot abgeschlossen ist, also ist auch $(R \setminus \{0_R\}, \cdot)$ ein abelsches Monoid mit dem Einselement 1_R .

Es bleibt zu zeigen, dass $(R \setminus \{0_R\}, \cdot)$ sogar eine Gruppe ist. Dazu nutzen wir das Gruppenkriterium [Lemma 7.18](#). Zu beliebigem $a \in R \setminus \{0\}$ betrachten wir die Rechtstranslation \cdot_a auf dem Monoid $R \setminus \{0\}$. Diese ist injektiv, denn nach Distributivgesetz ([9.1b](#)) gilt

$$b \cdot a = c \cdot a \quad \Rightarrow \quad b \cdot a - c \cdot a = 0_R \quad \Rightarrow \quad (b - c) \cdot a = 0_R,$$

und da R nullteilerfrei und $a \neq 0_R$ ist, folgt $b = c$. Da nun R und damit $R \setminus \{0\}$ eine endliche Menge ist, gilt nach [Satz 6.27](#), dass \cdot_a auch surjektiv.

Ein analoges Argument zeigt, dass auch alle Linkstranslationen auf $R \setminus \{0\}$ surjektiv sind. Aus dem Gruppenkriterium [Lemma 7.18](#) folgt nun, dass $(R \setminus \{0\}, \cdot)$ eine Gruppe ist. \square

Folgerung 10.6 (Körpereigenschaft des Restklassenringes und des Ringes von \mathbb{Z} modulo m , vgl. Satz 9.9).

Der Restklassenring modulo m $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \tilde{+}, \tilde{\cdot})$ sowie der zu ihm isomorphe Ring (Beispiel 9.12) von \mathbb{Z} modulo m $(\mathbb{Z}_m, +_m, \cdot_m)$ sind Körper genau dann, wenn $m \in \mathbb{N}$ eine Primzahl ist. In diesem Fall nennen wir sie auch **Restklassenkörper modulo m** oder **Körper von \mathbb{Z} modulo m** (englisch: *field of \mathbb{Z} modulo m*).

Beweis. In Satz 9.9 haben wir gezeigt, dass $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \tilde{+}, \tilde{\cdot})$ genau dann ein Integritätsbereich ist, wenn $m \in \mathbb{N}$ eine Primzahl ist. Da aber $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ nur endlich viele (nämlich m) Elemente hat, ist Integritätsbereich zu sein gleichbedeutend mit der Körpereigenschaft.

Nach Beispiel 9.12 sind $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \tilde{+}, \tilde{\cdot})$ und $(\mathbb{Z}_m, +_m, \cdot_m)$ als Ringe isomorph, also gelten dieselben Eigenschaften auch für $(\mathbb{Z}_m, +_m, \cdot_m)$. \square

Definition 10.7 (Unterkörper, vgl. Definition 9.10 eines Unterringes).

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper.

- (i) Eine Teilmenge $U \subseteq K$ heißt ein **Teilkörper** oder **Unterkörper** (englisch: *subfield*) von $(K, +, \cdot)$, wenn U bzgl. $+$ und bzgl. \cdot abgeschlossen ist und wenn $(U, +, \cdot)$ selbst wieder ein Körper ist.

Beachte: Das ist genau dann erfüllt, wenn $(U, +)$ eine Untergruppe von $(K, +)$ ist und wenn $(U \setminus \{0\}, \cdot)$ eine Untergruppe von $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ ist.

- (ii) Ein Unterkörper $(U, +, \cdot)$ von $(K, +, \cdot)$ heißt **echt** (englisch: *proper subfield*), wenn $U \subsetneq K$ gilt. \triangle

Beispiel 10.8 (Unterkörper).

- (i) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist ein Unterkörper von $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

- (ii) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist ein Unterkörper von $(\mathbb{C}, +, \cdot)$. \triangle

Definition 10.9 (Körperhomomorphismus, vgl. Definition 9.11 eines Ringhomomorphismus).

Es seien $(K_1, +_1, \cdot_1)$ und $(K_2, +_2, \cdot_2)$ zwei Körper.

- (i) Eine Abbildung $f: K_1 \rightarrow K_2$ heißt **strukturverträglich** oder ein **(Körper-)Homomorphismus** (englisch: *field homomorphism*) von $(K_1, +_1, \cdot_1)$ in $(K_2, +_2, \cdot_2)$, wenn gilt:

$$f(a +_1 b) = f(a) +_2 f(b) \quad \text{für alle } a, b \in K_1, \quad (10.3a)$$

$$f(a \cdot_1 b) = f(a) \cdot_2 f(b) \quad \text{für alle } a, b \in K_1, \quad (10.3b)$$

$$f(1_{K_1}) = 1_{K_2}. \quad (10.3c)$$

- (ii) Wie in Definition 8.1 sprechen wir im Fall $(K_1, +_1, \cdot_1) = (K_2, +_2, \cdot_2)$ von einem **(Körper-)Endomorphismus** (englisch: *field endomorphism*).

- (iii) Ist $f: K_1 \rightarrow K_2$ bijektiv, so heißt f auch **strukturhaltend** oder ein **(Körper-)Isomorphismus** (englisch: *field isomorphism*). In diesem Fall nennen wir $(K_1, +_1, \cdot_1)$ und $(K_2, +_2, \cdot_2)$ auch zueinander **isomorphe Körper** (englisch: *isomorphic fields*) und schreiben

$$(K_1, +_1, \cdot_1) \cong (K_2, +_2, \cdot_2).$$

- (iv) Im Fall $(K_1, +_1, \cdot_1) = (K_2, +_2, \cdot_2)$ und $f: K_1 \rightarrow K_2$ bijektiv sprechen wir auch von einem **(Körper-)Automorphismus** (englisch: *field automorphism*). \triangle

Da die Bedingungen (10.3) mit denen aus (9.4) übereinstimmen, ist ein Körperhomomorphismus nichts anderes als ein Ringhomomorphismus, der speziell zwischen Körpern eingesetzt wird. Insbesondere haben wir auch hier wie in (9.6) wieder

$$f(0_{K_1}) = 0_{K_2}. \quad (10.4)$$

Interessanterweise gilt weiter, dass Körperhomomorphismen automatisch injektiv sind, denn nehmen wir $a \neq b$, aber $f(a) = f(b)$ an, so ergibt sich der Widerspruch

$$\begin{aligned} 1_{K_2} &= f(1_{K_1}) && \text{wegen (10.3c)} \\ &= f((a -_1 b)^{-1} \cdot_1 (a -_1 b)) && \text{da } a -_1 b \neq 0_{K_1} \text{ vorausgesetzt wurde} \\ &= f((a -_1 b)^{-1}) \cdot_2 f(a -_1 b) && \text{wegen (10.3a)} \\ &= f((a -_1 b)^{-1}) \cdot_2 (f(a) -_2 f(b)) && \text{wegen (10.3b)} \\ &= f((a -_1 b)^{-1}) \cdot_2 0_{K_2} && \text{da } f(a) = f(b) \text{ vorausgesetzt wurde} \\ &= 0_{K_2} && \text{nach Lemma 9.3.} \end{aligned}$$

§ 11 POLYNOME

Literatur: Beutelspacher, 2014, Kapitel 6, Bosch, 2014, Kapitel 5, Fischer, Springborn, 2020, Kapitel 2.3, Jänich, 2008, Kapitel 9.4

Definition 11.1 (Polynom).

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring.¹⁴ Ein **Polynom** (englisch: *polynomial*, altgriechisch: *πολύ*: viel, altgriechisch: *νόμος*: Name) über R in der Variablen t ist ein formaler Ausdruck der Gestalt

$$a_n \cdot t^n + a_{n-1} \cdot t^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot t + a_0 \quad \text{oder auch} \quad \sum_{i=0}^n a_i \cdot t^i. \quad (11.1)$$

Dabei ist $n \in \mathbb{N}_0$. Die Zahlen $a_i \in R$ heißen die **Koeffizienten** (englisch: *coefficients*) des Polynoms. \triangle

Bemerkung 11.2 (Polynom).

- (i) Die Variable t ist ein willkürlich gewähltes Symbol. Später werden wir für t geeignete Objekte einsetzen. Da zunächst un spezifiziert ist, welche Objekte für die Variable t eingesetzt werden können, ist die Bedeutung der „Potenzen“ t^j , deren „Multiplikation“ mit den Koeffizienten $a_j \in R$ sowie die „Addition“ der daraus entstehenden Terme im Moment unklar. Daher verstehen wir (11.1) zunächst als formalen Ausdruck.
- (ii) $a_1 \cdot t$ ist eine abkürzende Schreibweise für $a_1 \cdot t^1$, und a_0 ist eine abkürzende Schreibweise für $a_0 \cdot t^0$.
- (iii) Die Reihenfolge der „Summanden“ in (11.1) ist unerheblich. Die Polynome $3 \cdot t^2 + 2 \cdot t$ und $2 \cdot t + 3 \cdot t^2$ werden also miteinander identifiziert.
- (iv) Ist ein Koeffizient $a_i = 0_R \in R$, so lässt man häufig den entsprechenden „Summanden“ in der Darstellung (11.1) einfach weg. Die Polynome $3 \cdot t^2 + 0 \cdot t$ und $3 \cdot t^2$ werden also miteinander identifiziert.

¹⁴Tatsächlich ist R oft sogar ein Körper.

- (v) Ist ein Koeffizient $a_i = 1_R$ in einem Ring mit dem Einselement 1_R , so lässt man den Koeffizienten 1_R in der Darstellung (11.1) manchmal weg, sofern es sich nicht um a_0 handelt. Die Polynome $1_R \cdot t^2$ und t^2 werden also miteinander identifiziert.
- (vi) Die Menge aller Polynome über dem kommutativen Ring R in der Variablen t wird mit $R[t]$ bezeichnet.
- (vii) Zwei Polynome sind gleich, wenn die entsprechenden Koeffizienten gleich sind.
- (viii) Sind alle Koeffizienten gleich $0_R \in R$, so heißt das Polynom das **Nullpolynom** (englisch: **zero polynomial**), geschrieben 0_R .
- (ix) Ist R ein Ring mit dem Einselement 1_R und sind alle Koeffizienten gleich $0_R \in R$ bis auf $a_0 = 1_R \in R$, so heißt das Polynom das **Einspolynom** (englisch: **constant one polynomial**), geschrieben 1_R .
- (x) Ist R ein Ring mit dem Einselement 1_R , dann heißt ein Polynom der Form t^n das **Monom** (englisch: **monomial**) **vom Grad** $n \in \mathbb{N}_0$.¹⁵
- (xi) Ein Polynom der Form $a_0 \in R \subseteq R[t]$ heißt ein **konstantes Polynom** (englisch: **constant polynomial**).
- (xii) Ein Polynom der Form $a_0 + a_1 \cdot t \in R[t]$ mit $a_1 \neq 0_R$ heißt ein **lineares Polynom** (englisch: **linear polynomial**). △

Beispiel 11.3 (Polynome).

- (i) $p = \frac{3}{4} \cdot t^2 - 7 \cdot t + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot t^2 - 7 \cdot t \in \mathbb{Q}[t]$ ist ein Polynom über dem Körper \mathbb{Q} .
- (ii) $p = s^5 - \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot s + \frac{2}{5} \in \mathbb{R}[s]$ ist ein Polynom über dem Körper \mathbb{R} .
- (iii) $p = [1] \cdot X^3 + [3] \cdot X^2 + [2] \cdot X \in (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})[X]$ ist ein Polynom über dem Restklassenring $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. △

Wir definieren nun zwei Verknüpfungen $+$ („Addition“) und \cdot („Multiplikation“) auf der Menge $R[t]$ der Polynome über dem kommutativen Ring $(R, +, \cdot)$.¹⁶ Es seien $p, q \in R[t]$ gegeben mit den Darstellungen

$$p = a_m \cdot t^m + \cdots + a_1 \cdot t + a_0 = \sum_{i=0}^m a_i \cdot t^i \quad (11.2a)$$

$$q = b_n \cdot t^n + \cdots + b_1 \cdot t + b_0 = \sum_{i=0}^n b_i \cdot t^i \quad (11.2b)$$

und $m, n \in \mathbb{N}_0$. Zur Abkürzung setzen wir außerdem $N := \max\{m, n\}$ und füllen in (11.2) nicht notierte Terme mit Nullkoeffizienten auf. Dann definieren wir die **Addition von Polynomen** (englisch: **addition of polynomials**)

$$p + q := (a_N + b_N) \cdot t^N + \cdots + (a_1 + b_1) \cdot t + (a_0 + b_0) = \sum_{i=0}^{\max\{m, n\}} (a_i + b_i) \cdot t^i \quad (11.3a)$$

¹⁵Der Begriff des Grades für beliebige Polynome wird in Definition 11.8 eingeführt.

¹⁶Es ist Absicht, dass die Verknüpfungen in $R[t]$ genauso benannt werden wie die Verknüpfungen im Koeffizientenring R . Dadurch wird $(R, +, \cdot)$ zu einem Unterring von $(R[t], +, \cdot)$, nämlich dem Unterring der konstanten Polynome.

sowie die **Multiplikation von Polynomen** (englisch: *multiplication of polynomials*)

$$p \cdot q := c_{m+n} \cdot t^{m+n} + \dots + c_1 \cdot t + c_0 = \sum_{k=0}^{m+n} c_k \cdot t^k, \tag{11.3b}$$

wobei c_k für $k \in \mathbb{N}_0$ als

$$c_k := \sum_{i=0}^k a_i \cdot b_{k-i} = \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j=k}}^k a_i \cdot b_j \tag{11.3c}$$

gesetzt wird. Man nennt die aus (11.3c) entstehende Folge $(c_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$, also

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 \cdot b_0 \\ c_1 &= a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0 \\ c_2 &= a_0 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_0 \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

die **Faltung** (englisch: *convolution*, lateinisch: *convolvere*: zusammenrollen) der Folgen $(a_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ und $(b_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$.

Quizfrage 11.1: Wie kann man sich die Faltung der Koeffizientenfolgen $(a_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ und $(b_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ grafisch vorstellen?

Definition 11.4 (Polynomring).

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring. Mit den zwei Verknüpfungen (11.3) wird $(R[t], +, \cdot)$ zu einem kommutativen Ring, genannt der **Polynomring** (englisch: *polynomial ring*) **über** R in der Variablen t . R heißt der **Koeffizientenring** (englisch: *coefficient ring, ring of coefficients*) von $R[t]$. \triangle

Das Nullelement von $R[t]$ ist das Nullpolynom 0_R . Besitzt R das Einselement 1_R , dann ist $(R[t], +, \cdot)$ ebenfalls ein Ring mit Einselement 1_R , dem Einspolynom. Das Symbol $+$ aus (11.1) ist die gleichnamige Verknüpfung (11.3a) aus dem Polynomring. Das Symbol \cdot aus (11.1) ist die gleichnamige Verknüpfung (11.3b) aus dem Polynomring, wobei ein Faktor ein Polynom der Form $a_i \in R$ ist und der andere Faktor ein Monom.

Bemerkung 11.5 (Polynomring als Erweiterung von $(R, +, \cdot)$).

Wenn R ein Ring mit Eins, aber nicht der Nullring ist, so können wir den Polynomring $(R[t], +, \cdot)$ algebraisch auch verstehen als die (bis auf Ring-Isomorphie eindeutige) kleinstmögliche Erweiterung des kommutativen Ringes von $(R, +, \cdot)$ zu einem kommutativen Ring, der zusätzlich das freie Element $t \notin R$ enthält. Dadurch wird $(R, +, \cdot)$ zu ein Unterring von $(R[t], +, \cdot)$, dem Unterring der konstanten Polynome. \triangle

Quizfrage 11.2: Wie sieht der Polynomring $R[t]$ aus, wenn R der Nullring ist?

Bemerkung 11.6 (Polynomring als Folgenring).

Wir können ein Polynom identifizieren mit der Folge $\mathbb{N}_0 \rightarrow R$ (vgl. Definition 6.29) seiner in aufsteigender Reihenfolge der „Potenzen“ sortierten Koeffizienten, von denen nur endlich viele ungleich $0_R \in R$ sind. Man sagt, eine solche Folge habe **endlichen Träger**¹⁷ (englisch: *finite support*). Diese Teilmenge von $R^{\mathbb{N}_0}$ notieren wir in dieser Lehrveranstaltung als $(R^{\mathbb{N}_0})_{00}$.

¹⁷Der **Träger einer Folge** (englisch: *support of a sequence*) mit Werten in einem Ring (oder allgemeiner mit Werten in einer additiven Gruppe) ist die Menge derjenigen Indizes, deren Folgenglieder ungleich dem Nullelement sind.

Beispielsweise kann das Polynom $t - t^2 + 3 \in \mathbb{Z}[t]$ identifiziert werden mit der endlich getragenen Folge $(3, 1, -1, 0, 0, \dots)$ seiner Koeffizienten in \mathbb{Z} . Das Polynom p aus (11.2a) wird identifiziert mit der endlich getragenen Folge $(a_0, a_1, \dots, a_m, 0, 0, \dots)$. Statt wir dann $(R^{\mathbb{N}_0})_{00}$ mit der elementweisen Addition $+$ der Folgeelemente und der Faltung als Multiplikation $c = a \cdot b$ wie in (11.3c) aus, so wird $((R^{\mathbb{N}_0})_{00}, +, \cdot)$ ebenfalls zu einem kommutativen Ring, der zu $R[t]$ isomorph ist. \triangle

Ende der Vorlesung 13

Beispiel 11.7 (Addition und Multiplikation von Polynomen).

(i) Für die Polynome

$$p = \frac{3}{4} \cdot t^2 - 7 \cdot t + \frac{1}{2}$$

$$q = -\frac{1}{2} \cdot t^3 - t + 1$$

über dem Körper $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ gilt

$$\begin{aligned} p + q &= \left(0 - \frac{1}{2}\right) \cdot t^3 + \left(\frac{3}{4} + 0\right) \cdot t^2 + (-7 + (-1)) \cdot t + \left(\frac{1}{2} + 1\right) \\ &= -\frac{1}{2} \cdot t^3 + \frac{3}{4} \cdot t^2 - 8 \cdot t + \frac{3}{2} \\ p \cdot q &= \left(0 + 0 + \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 0 + 0 + 0\right) \cdot t^5 + \left(0 + (-7) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 0 + 0 + 0\right) \cdot t^4 \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 0 + \frac{3}{4} \cdot (-1) + 0\right) \cdot t^3 + \left(0 + (-7) \cdot (-1) + \frac{3}{4} \cdot 1\right) \cdot t^2 \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} \cdot (-1) + (-7) \cdot 1\right) \cdot t + \left(\frac{1}{2} \cdot 1\right) \\ &= -\frac{3}{8} \cdot t^5 + \frac{7}{2} \cdot t^4 - t^3 + \frac{31}{4} \cdot t^2 - \frac{15}{2} \cdot t + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Berechnung der Koeffizienten des Produkts $p \cdot q$ mittels Faltungstabelle:

	$\frac{1}{2}$	-7	$\frac{3}{4}$	0
1	$\frac{1}{2}$	-7	$\frac{3}{4}$	0
-1	$-\frac{1}{2}$	7	$-\frac{3}{4}$	0
0	0	0	0	0
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{7}{2}$	$-\frac{3}{8}$	0

Die Summation entlang der Diagonalen ergibt wiederum die Koeffizienten

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2}, & c_1 &= -\frac{1}{2} - 7 = -\frac{15}{2}, & c_2 &= 0 + 7 + \frac{3}{4} = \frac{31}{4}, \\ c_3 &= -\frac{1}{4} + 0 - \frac{3}{4} + 0 = -1, & c_4 &= \frac{7}{2} + 0 + 0 = \frac{7}{2}, & c_5 &= -\frac{3}{8} + 0 = -\frac{3}{8}. \end{aligned}$$

(ii) Für die Polynome

$$\begin{aligned} p &= [1] \tilde{\cdot} X^3 \tilde{+} [-3] \tilde{\cdot} X^2 \tilde{+} [2] \tilde{\cdot} X & \text{oder auch } p &= X^3 \tilde{+} X^2 \tilde{+} [2] \tilde{\cdot} X \\ q &= [-1] \tilde{\cdot} X \tilde{+} [7] & \text{oder auch } q &= [3] \tilde{\cdot} X \tilde{+} [3] \end{aligned}$$

über dem Restklassenring $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ gilt

$$\begin{aligned}(p \tilde{+} q)(X) &= [1] \tilde{+} X^3 \tilde{+} [1] \tilde{+} X^2 \tilde{+} ([2] \tilde{+} [-1]) \tilde{+} X \tilde{+} [7] \\ &= [1] \tilde{+} X^3 \tilde{+} [1] \tilde{+} X^2 \tilde{+} [1] \tilde{+} X \tilde{+} [3],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(p \tilde{-} q)(X) &= [1] \tilde{-} [-1] \tilde{-} X^4 \tilde{-} ([-3] \tilde{-} [-1] \tilde{-} [1] \tilde{-} [7]) \tilde{-} X^3 \\ &\quad \tilde{-} ([-3] \tilde{-} [7] \tilde{-} [2] \tilde{-} [-1]) \tilde{-} X^2 \tilde{-} [2] \tilde{-} [7] \tilde{-} X \\ &= [3] \tilde{-} X^4 \tilde{-} [2] \tilde{-} X^3 \tilde{-} [1] \tilde{-} X^2 \tilde{-} [2] \tilde{-} X.\end{aligned}$$

△

Zur Vereinfachung der Notation lassen wir in Zukunft das Multiplikationszeichen zwischen Koeffizient und Potenz einer Variable auch oft weg.

Definition 11.8 (Grad eines Polynoms, führender Koeffizient, monisches Polynom).

Es sei p ein Polynom über dem kommutativen Ring R mit den Koeffizienten $a_j \in R$, $j \in \mathbb{N}_0$.

(i) Der **Grad** (englisch: **degree**) ist definiert als¹⁸

$$\deg(p) := \begin{cases} -\infty, & \text{falls alle } a_j = 0_R \text{ sind, also } p = 0_R, \\ \max\{j \in \mathbb{N}_0 \mid a_j \neq 0_R\} & \text{sonst.} \end{cases} \quad (11.4)$$

Ein Polynom vom Grad 0 oder $-\infty$ heißt **konstant** (englisch: **constant**).

(ii) Wenn $p \neq 0_R$ (also nicht das Nullpolynom) ist, dann heißt $\ell(p) := a_{\deg(p)}$ auch der **führende Koeffizient** (englisch: **leading coefficient**) oder der **Leitkoeffizient** von p . Für $p = 0_R$ definieren wir $\ell(0_R) = 0_R$.

(iii) Ist R ein Ring mit dem Einselement 1_R und gilt $\ell(p) = 1_R$, dann heißt das Polynom $p \neq 0_R$ **normiert** oder **monisch** (englisch: **monic**). △

Quizfrage 11.3: Was weiß man über das Produkt zweier monischer Polynome?

Beispiel 11.9 (Grad eines Polynoms, führender Koeffizient, monisches Polynom).

(i) Das Polynom $p = \frac{3}{4}t^2 - 7t + \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}[t]$ über dem Körper \mathbb{Q} besitzt $\deg(p) = 2$. Das Polynom p ist nicht monisch, da $\ell(p) = \frac{3}{4} \neq 1 \in \mathbb{Q}$ ist.

(ii) Das Polynom $p = [-7]X^3 \tilde{+} [-3]X^2 \tilde{+} [2]X^2 \in (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})[X]$ über dem Restklassenring $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ besitzt $\deg(3)$. Das Polynom p ist monisch, da $\ell(p) = [-7] = [1] \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ist. △

Lemma 11.10 (Grad eines Polynoms).

Es sei R ein kommutativer Ring und $p, q \in R[t]$ zwei Polynome. Dann gilt:

(i) $\deg(p + q) \leq \max\{\deg(p), \deg(q)\}$.

(ii) $\deg(p \cdot q) \leq \deg(p) + \deg(q)$.

(iii) Ist R nullteilerfrei, dann gilt sogar $\deg(p \cdot q) = \deg(p) + \deg(q)$.

Dabei sollen formal für $n \in \mathbb{N}_0$ die Beziehungen $\max\{n, (-\infty)\} = \max\{(-\infty), n\} = n$ gelten sowie $\max\{(-\infty), (-\infty)\} = -\infty$ und $n + (-\infty) = (-\infty) + n = (-\infty) + (-\infty) = -\infty$.

¹⁸Manchmal wird der Grad des Nullpolynoms abweichend auch als -1 definiert.

Beweis. Der Beweis ist Gegenstand von [Hausaufgabe I-7.3](#). □

Folgerung 11.11 (der Polynomring als Integritätsring).

Es sei R ein Integritätsring. Dann ist auch $R[t]$ ein Integritätsring.

Beweis. Nach Definition ist R ein kommutativer, nullteilerfreier Ring mit Eins 1_R , und R ist ungleich dem Nullring. Folglich ist $R[t]$ ein kommutativer Ring mit Eins 1_R (Einspolynom) ungleich dem Nullring, da $1_R \neq 0_R$ (Nullpolynom) gilt. Es bleibt zu zeigen, dass $R[t]$ nullteilerfrei ist. Dazu seien $p, q \in R[t]$ beide nicht das Nullpolynom. Aus [Lemma 11.10 Aussage \(iii\)](#) folgt $\deg(p \cdot q) = \deg(p) + \deg(q) \geq 0$. Damit ist auch $p \cdot q$ nicht das Nullpolynom. □

§ 11.1 POLYNOMDIVISION

Lemma 11.12 (Polynomring ist kein Körper).

Der Polynomring $R[t]$ ist niemals ein Körper.

Beweis. Wenn R der Nullring ist, dann ist auch $R[t]$ der Nullring, besitzt also nur ein Element und ist daher kein Körper ([Lemma 10.3](#)). Wir betrachten also im Weiteren nur den Fall, dass R nicht der Nullring ist. Wenn $R[t]$ ein Körper wäre, dann wäre 1_R das neutrale Element bzgl. der Multiplikation in $R[t]$ und damit auch in R . Daraus folgt, dass das Polynom $p = 0_R + 1_R \cdot t$ in $R[t]$ existiert. Dieses besitzt aber kein multiplikatives Inverses, denn: Wäre q das Inverse zu p , gälte also $p \cdot q = 1_R$, dann kann q nicht das Nullpolynom sein. Es müsste also $q = b_n t^n + \dots + b_1 t + b_0$ gelten für irgendwelche Koeffizienten $b_0, b_1, \dots, b_n, n \in \mathbb{N}_0$. Der 0-te Koeffizient von $p \cdot q$ ist aber $0_R \cdot b_0 = 0_R$, und daher kann $p \cdot q$ nicht das Einspolynom sein. □

Als Ersatz für das Fehlen multiplikativer Inverser führen wir (wie bereits aus \mathbb{Z} bekannt) eine **Division mit Rest** (englisch: [division with remainder](#)) von Polynomen ein. Wir arbeiten dabei für den Rest von [§ 11.1](#) mit einem **Körper** K für die Koeffizienten an Stelle eines kommutativen Ringes R .

Definition 11.13 (Teiler eines Polynoms).

Es seien K ein Körper und $p_1, p_2 \in K[t]$ zwei Polynome. p_2 heißt ein **Teiler** (englisch: [divisor](#)) von p_1 (kurz: $p_2 \mid p_1$), wenn es ein weiteres Polynom $q \in K[t]$ gibt, sodass gilt:

$$p_1 = q \cdot p_2. \tag{11.5}$$

△

Satz 11.14 (Polynomdivision mit Rest).

Es seien K ein Körper und $p_1, p_2 \in K[t]$ zwei Polynome. Ist $p_2 \neq 0_K$ (Nullpolynom), dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome $q, r \in K[t]$, genannt der **Quotient** (englisch: [quotient](#)) und der **Rest** (englisch: [remainder](#)), sodass gilt:

$$p_1 = q \cdot p_2 + r \quad \text{und} \quad \deg(r) < \deg(p_2). \tag{11.6}$$

Beweis. Wir zeigen zunächst die Existenz der Zerlegung (11.6). Dazu sei $p_2 \in K[t]$ fest und $\deg(p_2) = m \in \mathbb{N}_0$. Wir verwenden vollständige Induktion nach $n := \deg(p_1) \in \mathbb{N}_0 \cup \{-\infty\}$.

Induktionsanfang: Für jedes $n \in \{-\infty\} \cup \llbracket 0, m-1 \rrbracket$ (also wenn $\deg(p_1) < \deg(p_2)$ gilt) setzen wir $q := 0_K$ und $r := p_1$.

Induktionsschritt: Es sei $n \geq m$ und die Behauptung für $n-1$ bereits bewiesen. Es sei nun $n = \deg(p_1) \geq \deg(p_2)$. Die Darstellungen von p und q seien

$$\begin{aligned} p_1 &= a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0, \\ p_2 &= b_m t^m + b_{m-1} t^{m-1} + \cdots + b_1 t + b_0. \end{aligned}$$

Wir definieren $\widehat{p}_1 := p_1 - a_n b_m^{-1} t^{n-m} p_2$. Dann ist der Koeffizient von t^n in \widehat{p}_1 gleich 0_K . Damit gilt $\deg(\widehat{p}_1) < \deg(p_1)$. Nach Induktionsvoraussetzung existieren also $\widehat{q}, \widehat{r} \in K[t]$ mit der Eigenschaft $\widehat{p}_1 = \widehat{q} \cdot p_2 + \widehat{r}$ und $\deg(\widehat{r}) < \deg(p_2) = m$. Es folgt nun

$$\begin{aligned} p_1 &= \widehat{p}_1 + a_n b_m^{-1} t^{n-m} p_2 && \text{nach Definition von } \widehat{p}_1 \\ &= \widehat{q} \cdot p_2 + \widehat{r} + a_n b_m^{-1} t^{n-m} p_2 && \text{gemäß der Zerlegung von } \widehat{p}_1 \\ &= \underbrace{(\widehat{q} + a_n b_m^{-1} t^{n-m})}_{=:q} \cdot p_2 + \underbrace{\widehat{r}}_{=:r} && \text{wegen der Kommutativität und Distributivität im Ring } K[t]. \end{aligned}$$

Dabei gilt $\deg(r) = \deg(\widehat{r}) < \deg(p_2) = m$.

Es bleibt, die Eindeutigkeit der Zerlegung zu bestätigen. Angenommen, es gelte

$$p_1 = q \cdot p_2 + r = \widehat{q} \cdot p_2 + \widehat{r}$$

mit $\deg(r) < \deg(p_2)$ und $\deg(\widehat{r}) < \deg(p_2)$. Dann folgt $(q - \widehat{q}) \cdot p_2 = \widehat{r} - r$ und weiter

$$\begin{aligned} \deg(p_2) > \deg(r - \widehat{r}) &&& \text{da } \deg(r - \widehat{r}) \leq \max\{\deg(r), \deg(-\widehat{r})\} \text{ nach Lemma 11.10} \\ &= \deg((q - \widehat{q}) \cdot p_2) \\ &= \deg(q - \widehat{q}) + \deg(p_2) && \text{nach Lemma 11.10, da } K \text{ als Körper nullteilerfrei ist.} \end{aligned}$$

Deshalb gilt $\deg(q - \widehat{q}) < 0$, woraus $q - \widehat{q} = 0_K$ folgt, also $q = \widehat{q}$. Aus $q \cdot p_2 + r = \widehat{q} \cdot p_2 + \widehat{r}$ folgt dann auch $r = \widehat{r}$. \square

Folgerung 11.15 (Polynomdivision mit Rest).

Unter den Voraussetzungen von Definition 11.13 ist q in (11.5) eindeutig bestimmt.

Beispiel 11.16 (Polynomdivision mit Rest).

Die **Polynomdivision** (englisch: **polynomial long division**) ist ein Verfahren zur Berechnung der Zerlegung (11.6) für zwei gegebene Polynome $p_1, p_2 \in K[t]$. Man sortiert dazu p_1 und p_2 nach absteigenden Potenzen der Variablen und führt dieselben Schritte wie bei einer schriftlichen Division etwa in \mathbb{Z} durch. Sobald der Grad des aktuellen Restes echt kleiner ist als der Grad von p_2 , stoppt das Verfahren.

Für $p_1 = 3t^3 + 2t + 1$ und $p_2 = t^2 - 4t$ erhalten wir

$$\begin{array}{r} 3t^3 \qquad \qquad + 2t + 1 = (t^2 - 4t)(3t + 12) + 50t + 1 \\ - 3t^3 + 12t^2 \\ \hline \qquad 12t^2 \quad + 2t \\ \qquad - 12t^2 + 48t \\ \hline \qquad \qquad \qquad 50t + 1 \end{array}$$

Also gilt in diesem Beispiel

$$\underbrace{3t^3 + 2t + 1}_{p_1} = \underbrace{(3t + 12)}_q \cdot \underbrace{(t^2 - 4t)}_{p_2} + \underbrace{(50t + 1)}_r. \quad \triangle$$

§ 11.2 POLYNOMFUNKTIONEN

Wir gehen nun der Frage nach, welche Objekte man für die Variable t in einem Polynom

$$p = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0 \quad (11.7)$$

über einem kommutativen Ring $(R, +, \cdot)$ sinnvollerweise einsetzen kann. Die naheliegendste Wahl sind sicherlich Elemente aus R selbst, und nur diese lassen wir im Moment zu.

Genauer betrachtet induziert das Polynom p eine Funktion $\tilde{p}: R \rightarrow R$, definiert durch

$$\tilde{p}(r) := a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0. \quad (11.8)$$

Die Funktion \tilde{p} heißt die **Polynomfunktion** (englisch: **polynomial function**) zum Polynom p oder die vom Polynom p induzierte Polynomfunktion.

Bemerkung 11.17 (induzierte Polynomfunktion).

Die Menge R^R der Funktionen $R \rightarrow R$, ausgestattet mit den punktweisen Verknüpfungen $+$ und \cdot aus R , bildet einen kommutativen Ring $(R^R, +, \cdot)$. Die Abbildung

$$\Phi: (R[t], +, \cdot) \ni p \mapsto \tilde{p} \in (R^R, +, \cdot) \quad (11.9)$$

ist ein Ringhomomorphismus zwischen zwei kommutativen Ringen. Wenn R das Einselement 1_R besitzt, dann besitzt $R[t]$ das Einselement 1_R (das Einspolynom) und R^R das Einselement 1_R (die Einsabbildung $R \mapsto 1_R$), und es gilt $\Phi(1_R) = 1_R$.

Φ ist i. A. nicht injektiv. Verschiedene Polynome können also dieselbe Polynomfunktion induzieren. Wir betrachten als Beispiel den Körper $K = (\mathbb{Z}_2, +_2, \cdot_2)$ und das Polynom

$$p = t^2 + t.$$

Dann ist die zugehörige Polynomfunktion $K \rightarrow K$ gerade $\tilde{p}(t) = t^2 +_2 t = t \cdot_2 t +_2 t$. Diese erfüllt $p(0) = 0 \cdot_2 0 +_2 0 = 0 +_2 0 = 0$ sowie $p(1) = 1 \cdot_2 1 +_2 1 = 1 +_2 1 = 0$. Es ist also \tilde{p} die Nullfunktion, obwohl p nicht das Nullpolynom ist. Da das Nullpolynom ebenfalls die Nullfunktion induziert, ist die Zuordnung $p \mapsto \tilde{p}$ in der Tat nicht injektiv.

Φ ist i. A. auch nicht surjektiv. $\text{Bild}(\Phi)$ ist der Unterring der Polynomfunktionen des Ringes $(R^R, +, \cdot)$. △

Definition 11.18 (Nullstelle eines Polynoms).

Es sei R ein kommutativer Ring, $p \in R[t]$ ein Polynom und $\tilde{p}: R \rightarrow R$ die zugehörige Polynomfunktion. $\lambda \in R$ heißt eine **Nullstelle** (englisch: **zero**) oder **Wurzel** (englisch: **root**) von p in R , wenn $\tilde{p}(\lambda) = 0_R$ gilt. △

Beispiel 11.19 (Nullstelle eines Polynoms).

- (i) Das Polynom $p = t^2 + 1 \in \mathbb{R}[t]$ besitzt keine Nullstelle in \mathbb{R} , weil für die zugehörige Polynomfunktion $\tilde{p}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt: $\tilde{p}(t) = t^2 + 1 \geq 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
- (ii) Das Polynom $p = t^2 + 1 \in \mathbb{C}[t]$ besitzt aber zwei Nullstellen in \mathbb{C} , und zwar i und $-i$.
- (iii) Das Polynom $p = t^2 + 1 \in \mathbb{Z}_5[t]$ besitzt in \mathbb{Z}_5 genau die Nullstellen 2 und 3, da für die zugehörige Polynomfunktion $\tilde{p}: \mathbb{Z}_5 \rightarrow \mathbb{Z}_5$ gilt: $\tilde{p}(t) = t \cdot_5 t +_5 1$ und damit

$$\begin{aligned}\tilde{p}(0) &= 0 \cdot_5 0 +_5 1 = 1, \\ \tilde{p}(1) &= 1 \cdot_5 1 +_5 1 = 2, \\ \tilde{p}(2) &= 2 \cdot_5 2 +_5 1 = 0, \\ \tilde{p}(3) &= 3 \cdot_5 3 +_5 1 = 0, \\ \tilde{p}(4) &= 4 \cdot_5 4 +_5 1 = 2.\end{aligned}$$

- (iv) Das Polynom $p = (t - 0) \cdot (t - 1) \cdot (t - 2) \cdot (t - 3) \cdot (t - 4) + 1$, besitzt in \mathbb{Z}_5 keine Nullstelle, denn es gilt $\tilde{p}(t) = 1$ für alle $t \in \mathbb{Z}_5$. (Ein solches Polynom gibt es für jeden endlichen Körper.) \triangle

Lemma 11.20 (Nullstellen und Teiler).

Es seien K ein Körper und $p \in K[t]$ ein Polynom. Dann sind äquivalent:

- (i) $\lambda \in K$ ist eine Nullstelle von p .
- (ii) Das Polynom $t - \lambda \in K[t]$ ist ein Teiler von p .

In diesem Fall gilt für das eindeutig bestimmte Polynom $q \in K[t]$ mit $p = (t - \lambda) \cdot q$ die Eigenschaft $\deg(q) = \deg(p) - 1$.

Beweis. **Aussage (i) \Rightarrow Aussage (ii):** Es sei $\lambda \in K$ eine Nullstelle von p , also $\tilde{p}(\lambda) = 0$. Nach **Satz 11.14** gibt es (eindeutig bestimmte) Polynome $q, r \in K[t]$, sodass gilt: $p = q \cdot (t - \lambda) + r$ und $\deg(r) < \deg(t - \lambda) = 1$. Also ist r ein konstantes Polynom. Um es zu bestimmen, ist es ausreichend, den Wert der zugehörigen Polynomfunktion \tilde{r} an einer Stelle zu kennen. An der Stelle λ gilt

$$\tilde{r}(\lambda) = (\tilde{p} - \tilde{q} \cdot (t - \lambda))(\lambda) = \tilde{p}(\lambda) - \tilde{q}(\lambda) \cdot (\lambda - \lambda) = \tilde{p}(\lambda) = 0_K$$

gilt. Also ist r das Nullpolynom, und es folgt $p = q \cdot (t - \lambda)$, d. h., $t - \lambda$ ist ein Teiler von p .

Aussage (ii) \Rightarrow Aussage (i): Es sei $t - \lambda$ ein Teiler von p , also existiert ein $q \in K[t]$ mit der Eigenschaft $p = q \cdot (t - \lambda)$. Das Einsetzen von λ liefert $\tilde{p}(\lambda) = \tilde{q}(\lambda) \cdot (\lambda - \lambda) = \tilde{q}(\lambda) \cdot 0_K = 0_K$. Also ist λ eine Nullstelle von p .

Weiter gilt nach **Lemma 11.10 (iii)** $\deg(p) = \deg(q \cdot (t - \lambda)) = \deg(q) + 1$. \square

Satz 11.21 (Zerlegung eines Polynoms).

Es seien K ein Körper und $p \in K[t]$ ein Polynom, $p \neq 0_K$. Dann gilt:

- (i) Es existieren $s \in \mathbb{N}_0$, paarweise verschiedene Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in K$ sowie Exponenten $n_1, \dots, n_s \in \mathbb{N}$ und ein Polynom $q \in K[t]$ ohne Nullstelle in K , sodass gilt:

$$p = (t - \lambda_1)^{n_1} \cdots (t - \lambda_s)^{n_s} \cdot q. \quad (11.10)$$

Die Zahl $n_i \in \mathbb{N}$ heißt die **Vielfachheit** (englisch: **multiplicity**) der Nullstelle λ_i . Jedes Polynom $t - \lambda_i \in K[t]$ heißt ein **Linearfaktor** (englisch: **linear factor**) von p .

(ii) Die Nullstellen von p sind genau die Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in K$.

Beweis. Aussage (i): Wir führen eine Induktion nach $n := \deg(p)$ durch. Im Fall $n = 0$ (Induktionsanfang) ist p ein konstantes Polynom ungleich 0_K , das keine Nullstelle besitzt. Daher ist dann $s = 0$ und $q = p$.

Wir nehmen an, die Behauptung sei bereits gezeigt für Polynome vom Grad $n \in \mathbb{N}_0$. Es sei p nun ein Polynom vom Grad $n + 1$. Wenn p keine Nullstelle besitzt, so gilt die Behauptung mit $s = 0$ und $q = p$. Andernfalls besitzt p eine Nullstelle $\lambda \in K$. Nach Lemma 11.20 ist also $t - \lambda \in K[T]$ ein Teiler von p , d. h., es gilt $p = (t - \lambda) \cdot \widehat{p}$. Aus Lemma 11.10 folgt $n + 1 = \deg(p) = \deg(t - \lambda) + \deg(\widehat{p}) = 1 + \deg(\widehat{p})$, also gilt $\deg(\widehat{p}) = n$. Nach Induktionsvoraussetzung besitzt also \widehat{p} eine Darstellung wie in (11.10), somit auch $p = (t - \lambda) \cdot \widehat{p}$.

Aussage (ii): Ist $\mu \in K$ eine Nullstelle von p , dann folgt

$$0 = \widetilde{p}(\mu) = (\mu - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\mu - \lambda_s)^{n_s} \cdot \widetilde{q}(\mu).$$

Da K als Körper nullteilerfrei ist, muss einer der Faktoren gleich 0_K sein. Da aber q nach Voraussetzung keine Nullstelle besitzt, muss es ein $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$ geben mit $\mu = \lambda_i$.

Umgekehrt ist nach Lemma 11.20 jedes λ_i , $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$, eine Nullstelle von p . □

Beachte: Man kann zeigen, dass die Darstellung (11.10) bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig ist.

Folgerung 11.22 (Zerlegung eines Polynoms).

Es seien K ein Körper und $p \in K[t]$ ein Polynom, $p \neq 0_K$. Dann gilt:

- (i) p hat höchstens $\deg(p) \in \mathbb{N}_0$ viele paarweise verschiedene Nullstellen, also $s \leq \deg(p)$.
- (ii) p hat höchstens $\deg(p) \in \mathbb{N}_0$ viele Nullstellen, wenn diese entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt werden, also gilt $\sum_{i=1}^s n_i \leq \deg(p)$.

Beweis. Aussage (i): Es sei (11.10) die (i. W. eindeutige) Zerlegung von p mit $s \in \mathbb{N}_0$ paarweise verschiedenen Nullstellen von p . Dann gilt

$$\begin{aligned} \deg(p) &= \deg(q) + \sum_{i=0}^s n_i \quad \text{nach Lemma 11.10} \\ &\geq 0 + \sum_{i=0}^s 1 \quad q \neq 0_K \text{ und die Vielfachheit jeder Nullstelle ist } \geq 1 \\ &= s. \end{aligned}$$

Aussage (ii): Zählen wir die Nullstellen λ_i in (11.10) gemäß ihrer Vielfachheit n_i , so erhalten wir

$$\begin{aligned} \deg(p) &= \deg(q) + \sum_{i=0}^s n_i \quad \text{nach Lemma 11.10} \\ &\geq 0 + \sum_{i=1}^s n_i. \end{aligned} \quad \square$$

In [Bemerkung 11.17](#) hatten wir gesehen, dass die Abbildung Polynom $p \mapsto$ Polynomfunktion \tilde{p} i. A. nicht injektiv ist, weil auch Nicht-Nullpolynome auf die Nullfunktion abgebildet werden können. Das Beispiel dafür war ein Polynom über dem endlichen Körper \mathbb{Z}_2 . Wie folgendes Ergebnis zeigt, ist die Endlichkeit des Körpers charakteristisch für die Nichtinjektivität von Φ .

Folgerung 11.23.

Es sei K ein unendlicher Körper. Dann ist die Abbildung $\Phi: K[t] \rightarrow K^K$ aus [\(11.9\)](#) injektiv.

Beweis. Es seien $p_1, p_2 \in K[t]$ Polynome und $\tilde{p}_1 = \tilde{p}_2$ die zugehörigen Polynomfunktionen. Wir setzen $q := p_1 - p_2$. Wegen $\tilde{q} = \tilde{p}_1 - \tilde{p}_2 = 0_K$ (**Quizfrage 11.4:** Warum gilt diese Gleichheit?) hat q unendlich viele Nullstellen, nämlich alle Elemente aus K . Das widerspricht [Folgerung 11.22](#), es sei denn, q ist das Nullpolynom. Daher gilt $p_1 = p_2$, d. h., die Injektivität von Φ . \square

Satz 11.24 (Fundamentalsatz der Algebra¹⁹).

Jedes Polynom $p \in \mathbb{C}[t]$ mit $\deg(p) > 0$ hat mindestens eine Nullstelle.

Ein Beweis dieses Satz wird i. d. R. in weiterführenden Veranstaltungen über *Funktionentheorie* oder *Algebra* vorgestellt.

Folgerung 11.25 (nicht-konstante Polynome über den komplexen Zahlen \mathbb{C} zerfallen in Linearfaktoren).

Jedes nicht-konstante Polynom $p \in \mathbb{C}[t]$ zerfällt vollständig in Linearfaktoren. In der Darstellung [\(11.10\)](#) gilt also $\deg(q) = 0$.

Beweis. Der Beweis gelingt mit vollständiger Induktion nach $n = \deg(p)$ und Anwendung des [Fundamentalsatzes 11.24](#). \square

Ende der Vorlesung 14

Ende der Woche 7

¹⁹englisch: fundamental theorem of algebra

Kapitel 3 Vektorräume

§ 12 VEKTORRÄUME

Literatur: Beutelspacher, 2014, Kapitel 3, Bosch, 2014, Kapitel 1, Fischer, Springborn, 2020, Kapitel 2.4–2.6, Jänich, 2008, Kapitel 2

Vektorräume sind die zentralen Strukturen in der *linearen* Algebra. Zu einem Vektorraum V gehört immer ein zugrundeliegender Körper, sagen wir $(K, +, \cdot)$. In Anlehnung an dessen Verknüpfungen bezeichnen wir die beiden Verknüpfungen im Vektorraum V mit \oplus und \odot .

Definition 12.1 (Vektorraum).

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Ein **Vektorraum** (englisch: *vector space*) oder **linearer Raum** (englisch: *linear space*) (V, \oplus, \odot) **über** K (kurz: ein K -Vektorraum) ist eine Menge V mit einer inneren Verknüpfung $\oplus: V \times V \rightarrow V$ und einer **äußeren Verknüpfung** (englisch: *outer operation*) $\odot: K \times V \rightarrow V$, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

- (i) (V, \oplus) ist eine abelsche Gruppe. Das Nullelement bezeichnen wir mit 0_V .
- (ii) Für die Verknüpfung \odot , genannt **skalare Multiplikation** (englisch: *scalar multiplication*) oder **S-Multiplikation**, gelten die folgenden Gesetze für alle $\alpha, \beta \in K$ und $u, v \in V$: die „**gemischten**“ **Distributivgesetze**¹ (englisch: „*mixed*“ *distributive laws*)

$$\alpha \odot (u \oplus v) = (\alpha \odot u) \oplus (\alpha \odot v) \tag{12.1a}$$

$$(\alpha + \beta) \odot v = (\alpha \odot v) \oplus (\beta \odot v) \tag{12.1b}$$

sowie das „**gemischte**“ **Assoziativgesetz** (englisch: „*mixed*“ *associative law*)

$$(\alpha \cdot \beta) \odot v = \alpha \odot (\beta \odot v). \tag{12.1c}$$

Weiterhin ist das neutrale Element 1_K bzgl. \cdot in K auch neutral bzgl. \odot :

$$1_K \odot v = v. \tag{12.1d}$$

- (iii) In einem K -Vektorraum V heißen die Elemente von V auch **Vektoren** (englisch: *vectors*). Das Nullelement 0_V von (V, \oplus) heißt auch der **Nullvektor** (englisch: *zero vector*). Die Elemente von K heißen **Skalare** (englisch: *scalars*), und K selbst heißt der **Skalarkörper** (englisch: *scalar field*) von V . △

Bemerkung 12.2 (abkürzende Schreibweisen).

- (i) Das Inverse zu $v \in V$ bzgl. \oplus bezeichnen wir mit $\ominus v$. Die Bezeichnung $u \ominus v$ steht für $u \oplus (\ominus v)$.

¹Wir bezeichnen die Gesetze hier als „gemischt“, weil in ihnen Skalare $\alpha, \beta \in K$ mit Vektoren $u, v \in V$ gemischt auftauchen.

- (ii) Wir vereinbaren, dass \odot stärker bindet als \oplus , also könnten wir die rechte Seite in (12.1a) auch in der Form $\alpha \odot u \oplus \alpha \odot v$ schreiben.
- (iii) Die Konvention, dass bei der skalaren Multiplikation $\odot: K \times V \rightarrow V$ die Skalare auf der linken Seite stehen, ist willkürlich. Wir können parallel auch $\boxtimes: V \times K \rightarrow V$ definieren, und zwar durch $v \boxtimes \alpha := \alpha \odot v$. Dann gelten auch dafür die Gesetze (12.1), wobei überall \odot durch \boxtimes ersetzt wird und die beiden Argumente dieser Verknüpfung vertauscht werden. Aufgrund der Ähnlichkeit unterscheiden wir nicht zwischen der linken skalaren Multiplikation \odot und der rechten skalaren Multiplikation \boxtimes , sondern schreiben in Zukunft einfach \odot für beide.
- (iv) Wir behalten die unterschiedliche Notation der Verknüpfungen „+“ in K und „ \oplus “ in V wie auch von „ \cdot “ in K und „ \odot “ in V zur Verdeutlichung zunächst bei. Später werden wir diese jedoch nur noch als „+“ bzw. „ \cdot “ notieren, siehe [Bemerkung 12.10](#).
- (v) Wir werden im Folgenden statt von einem „Vektorraum (V, \oplus, \odot) über dem Körper $(K, +, \cdot)$ “ auch einfach von einem „Vektorraum (V, \oplus, \odot) “ sprechen, wenn der zugrundeliegende Körper aus dem Zusammenhang klar ist oder wenn wir uns nicht explizit auf ihn beziehen müssen. \triangle

Beispiel 12.3 (Vektorraum).

- (i) Über jedem Körper $(K, +, \cdot)$ gibt es den (bis auf Isomorphie eindeutigen) Vektorraum (V, \oplus, \odot) mit nur einem Element, nämlich $V = \{0_V\}$. Die Verknüpfungen \oplus und \odot sind dann eindeutig festgelegt. Dieser Raum heißt **Nullraum** (englisch: [zero vector space](#)) über K .
- (ii) Jeder Körper $(K, +, \cdot)$, ausgestattet mit den Verknüpfungen $\oplus := +$ und $\odot := \cdot$, ist ein Vektorraum über sich selbst.
- (iii) Allgemeiner sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(U, +, \cdot)$ ein Unterkörper. Dann ist $(K, +, \cdot)$ ein Vektorraum über U . Beispielsweise ist \mathbb{R} ein \mathbb{Q} -Vektorraum, und \mathbb{C} ist ein \mathbb{R} -Vektorraum und ein \mathbb{Q} -Vektorraum.
- (iv) Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Menge

$$K_n := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in K \text{ für } i = 1, \dots, n\} \quad (12.2)$$

der n -Tupel² über K , ausgestattet mit der **komponentenweisen Addition** (englisch: [componentwise addition](#)) und der **komponentenweisen skalaren Multiplikation** (englisch: [componentwise scalar multiplication](#))

$$(x_1, \dots, x_n) \oplus (y_1, \dots, y_n) := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \quad (12.3a)$$

$$\alpha \odot (x_1, \dots, x_n) := (\alpha \cdot x_1, \dots, \alpha \cdot x_n), \quad (12.3b)$$

ein Vektorraum über K , genannt der **Vektorraum der Zeilenvektoren** (englisch: [row vector space](#)) über K der Dimension n .³ Der Nullvektor ist der Vektor $(0_K, \dots, 0_K) \in K_n$.

Es wird sich als praktisch erweisen, auch den Fall $n = 0$ zuzulassen. Der Raum K_0 besteht dann nur aus einem Element, dem leeren Zeilenvektor $()$. Es gilt $\alpha \odot () = ()$ für alle $\alpha \in K$.

²Gemäß [Definition 4.8](#) müssten wir die n -Tupel eigentlich mit K^n bezeichnen. Es ist aber üblich, die Bezeichnung K^n für den Vektorraum der Spaltenvektoren zu verwenden.

³Der Begriff der Dimension für beliebige Vektorräume wird in [Definition 13.16](#) eingeführt. Hier dient er zunächst zur Angabe der Anzahl der Einträge in einem Zeilenvektor.

(v) Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Menge

$$K^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_i \in K \text{ für } i = 1, \dots, n \right\}, \quad (12.4)$$

ausgestattet mit der **komponentenweisen Addition** (englisch: *componentwise addition*) und der **komponentenweisen skalaren Multiplikation** (englisch: *componentwise scalar multiplication*)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad (12.5a)$$

$$\alpha \odot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha \cdot x_1 \\ \vdots \\ \alpha \cdot x_n \end{pmatrix}, \quad (12.5b)$$

ein Vektorraum über K , genannt der **Vektorraum der Spaltenvektoren** (englisch: *column vector space*) oder auch der **Standardvektorraum** (englisch: *standard vector space*) oder der **Koordinatenraum** (englisch: *coordinate space*) über K der Dimension n .⁴ Der Nullvektor ist der Vektor $\begin{pmatrix} 0_K \\ \vdots \\ 0_K \end{pmatrix}$ in K^n .

Es wird sich auch hier als praktisch erweisen, den Fall $n = 0$ zuzulassen. Der Raum K^0 besteht dann nur aus einem Element, dem leeren Spaltenvektor $()$. Es gilt $\alpha \odot () = ()$ für alle $\alpha \in K$.

(vi) Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und X eine Menge. Dann ist die Menge $K^X = \{f \mid f: X \rightarrow K\}$, ausgestattet mit den punktweisen Verknüpfungen

$$\begin{aligned} (f \oplus g)(x) &:= f(x) + g(x), \\ (\alpha \odot f)(x) &:= \alpha \cdot f(x), \end{aligned}$$

ein Vektorraum über K . Der Nullvektor ist die Nullfunktion.

Insbesondere ist die Menge der Folgen $K^{\mathbb{N}}$ mit Werten in K ein Vektorraum.

(vii) Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $K[t]$ der Polynomring (Definition 11.4). In $K[t]$ ist die Addition $+$ gemäß (11.3a) erklärt.⁵ Ergänzen wir die skalare Multiplikation⁶

$$\alpha \odot (a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0) := \alpha \cdot a_n t^n + \dots + \alpha \cdot a_1 t + \alpha \cdot a_0, \quad (12.6)$$

so wird $K[t]$ zu einem Vektorraum über K , genannt der **Polynomraum** (englisch: *vector space of polynomials*) über K . △

Lemma 12.4 (Rechenregeln in Vektorräumen, vgl. Lemma 9.3).

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und (V, \oplus, \odot) ein Vektorraum über K . Dann gilt für $\alpha \in K$ und $v \in V$:

⁴Der Begriff **Koordinatenraum** wird später in Satz 19.1 klar werden.

⁵Die zweite Verknüpfung in $K[t]$, also die Multiplikation \cdot von Polynomen gemäß (11.3b), ignorieren wir hier.

⁶Die skalare Multiplikation stimmt überein mit der Multiplikation von Polynomen, wobei einer der Faktoren ein konstantes Polynom ist, das mit einem Element aus K identifiziert werden kann.

$$(i) \quad 0_K \odot v = 0_V = v \odot 0_K.$$

$$(ii) \quad \alpha \odot 0_V = 0_V.$$

$$(iii) \quad \alpha \odot v = 0_V \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0_K \text{ oder } v = 0_V.$$

$$(iv) \quad \alpha \odot (\ominus v) = \ominus (\alpha \odot v) = (-\alpha) \odot v \text{ und insbesondere } \ominus v = (-1_K) \odot v.$$

Beweis. Aussage (i):

$$\begin{aligned} 0_V \oplus 0_K \odot v &= 0_K \odot v && \text{da } 0_V \text{ das neutrale Element von } (V, \oplus) \text{ ist} \\ &= (0_K + 0_K) \odot v && \text{da } 0_K \text{ das neutrale Element von } (K, +) \text{ ist} \\ &= 0_K \odot v \oplus 0_K \odot v && \text{nach Distributivgesetz (12.1b)}. \end{aligned}$$

Aus der Kürzungsregel (7.10b) in der Gruppe (V, \oplus) folgt nun $0_V = 0_K \odot v$. Der Beweis der zweiten Gleichheit folgt sofort aus $0_K \odot v = v \odot 0_K$.

Aussage (ii): Für beliebiges $\alpha \in K$ gilt

$$\begin{aligned} \alpha \odot 0_V \oplus 0_V &= \alpha \odot 0_V && \text{da } 0_V \text{ das neutrale Element von } (V, \oplus) \text{ ist} \\ &= \alpha \odot (0_V \oplus 0_V) && \text{da } 0_V \text{ das neutrale Element von } (V, \oplus) \text{ ist} \\ &= \alpha \odot 0_V \oplus \alpha \odot 0_V && \text{nach Distributivgesetz (12.1a)}. \end{aligned}$$

Aus der Kürzungsregel (7.10a) in der Gruppe (V, \oplus) folgt nun $0_V = \alpha \odot 0_V$.

Aussage (iii): Es seien $\alpha \in K$ und $v \in V$ sowie $\alpha \odot v = 0_V$. Wir nehmen $\alpha \neq 0_K$ an. Dann gilt

$$\begin{aligned} v &= 1_K \odot v && \text{nach (12.1d)} \\ &= (\alpha \cdot \alpha^{-1}) \odot v && \text{da } \alpha \neq 0_K \text{ in der Gruppe } (K \setminus \{0\}, \cdot) \text{ das Inverse } \alpha^{-1} \text{ besitzt} \\ &= \alpha^{-1} \odot (\alpha \odot v) && \text{nach Assoziativgesetz (12.1c)} \\ &= \alpha^{-1} \odot 0_V && \text{nach Voraussetzung} \\ &= 0_V && \text{nach Aussage (ii)}. \end{aligned}$$

Aussage (iv): Es seien $\alpha \in K$ und $v \in V$. Wir zeigen zunächst, dass $\alpha \odot v$ das Inverse zu $(-\alpha) \odot v$ in der Gruppe (V, \oplus) ist:

$$\begin{aligned} [(-\alpha) \odot v] \oplus [\alpha \odot v] &= (-\alpha + \alpha) \odot v && \text{nach Distributivgesetz (12.1b)} \\ &= 0_K \odot v && \text{da } \alpha \text{ in der Gruppe } (K, +) \text{ das Inverse } -\alpha \text{ besitzt} \\ &= 0_V && \text{nach Aussage (i)}. \end{aligned}$$

Das heißt, es gilt $\ominus (\alpha \odot v) = (-\alpha) \odot v$. Insbesondere für $\alpha = 1_K$ erhalten wir

$$\ominus v = \ominus (1_K \odot v) = (-1_K) \odot v. \quad (*)$$

Weiter haben wir

$$\begin{aligned} (-\alpha) \odot v &= [(-1_K) \cdot \alpha] \odot v && \text{nach Lemma 9.3} \\ &= [\alpha \cdot (-1_K)] \odot v && \text{da } (K, \cdot) \text{ kommutativ ist} \\ &= \alpha \odot ((-1_K) \odot v) && \text{nach Assoziativgesetz (12.1c)} \\ &= \alpha \odot (\ominus v) && \text{nach (*).} \end{aligned} \quad \square$$

Definition 12.5 (Linearkombination).

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und (V, \oplus, \odot) ein Vektorraum über K .

(i) Es sei $E \subseteq V$. Ein Vektor der Form

$$\alpha_1 \odot v_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_n \odot v_n \quad \text{oder kurz} \quad \sum_{j=1}^n \alpha_j \odot v_j \quad (12.7)$$

mit endlich vielen Skalaren $\alpha_j \in K$ und Vektoren $v_j \in E$ für $j = 1, \dots, n$ und $n \in \mathbb{N}_0$ heißt eine **Linearkombination** (englisch: **linear combination**) **der Menge E** oder **Linearkombination von Vektoren der Menge E** . Falls $n = 0$ gilt, so interpretieren wir wie üblich die Addition von null Elementen in (12.7) als den Nullvektor 0_V .

(ii) Es sei $F = (v_i)_{i \in I}$ eine Familie von Vektoren in V . Ein Vektor der Form

$$\alpha_1 \odot v_{i_1} \oplus \cdots \oplus \alpha_n \odot v_{i_n} \quad \text{oder kurz} \quad \sum_{j=1}^n \alpha_j \odot v_{i_j} \quad (12.8)$$

mit endlich vielen Indizes $i_j \in I$ und Skalaren $\alpha_j \in K$ für $j = 1, \dots, n$ und $n \in \mathbb{N}_0$ heißt eine **Linearkombination der Familie F** oder **Linearkombination von Vektoren der Familie F** . Falls $n = 0$ gilt, so interpretieren wir auch hier die Addition von null Elementen in (12.8) als den Nullvektor 0_V .

In beiden Fällen heißen die Skalare α_j die **Koeffizienten** (englisch: **coefficients**) der Linearkombination. Die Linearkombination heißt **trivial** (englisch: **trivial linear combination**), wenn alle $\alpha_j = 0$ sind. Falls $n = 0$ gilt, so interpretieren wir wie üblich die Addition von null Elementen als den Nullvektor 0_V . \triangle

Beachte: Linearkombinationen bestehen immer aus endlich vielen Termen!

Beispiel 12.6 (Linearkombination).

(i) Der Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$ ist eine Linearkombination der Menge der Vektoren $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ im Standardvektorraum \mathbb{R}^2 , nämlich

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix} = 3 \odot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus (-7) \odot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) Der Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$ ist eine Linearkombination der Menge der Vektoren $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ im Standardvektorraum \mathbb{R}^2 , nämlich

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix} = \frac{31}{6} \odot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \oplus \frac{-11}{6} \odot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(Zur Bestimmung der Koeffizienten wurde ein lineares Gleichungssystem gelöst, siehe Kapitel 4.)

(iii) Die Funktion $[0, 2\pi] \ni x \mapsto \sin(x) \ominus \sqrt{2} \odot \cos(x) \in \mathbb{R}$ ist eine Linearkombination der Menge der Funktionen (Vektoren) $\{\sin, \cos\}$ im Vektorraum der Funktionen $\mathbb{R}^{[0, 2\pi]}$.

(iv) Das Polynom $3t^2 \oplus 5$ im Vektorraum (Polynomraum) $\mathbb{Q}[t]$ ist eine Linearkombination der Menge der Polynome $\{t^2, t, 1\}$, wobei 1 das Einspolynom in $\mathbb{Q}[t]$ bezeichnet. Das Polynom t kommt in der Linearkombination $3t^2 \oplus 5$ mit dem Koeffizienten $0 \in \mathbb{Q}$ vor. \triangle

Definition 12.7 (Unterraum).

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und (V, \oplus, \odot) ein Vektorraum über K .

- (i) Eine Teilmenge $U \subseteq V$ heißt ein **Untervektorraum** oder kurz: ein **(linearer) Unterraum** (englisch: **vector subspace, linear subspace**) von (V, \oplus, \odot) , wenn U bzgl. \oplus und bzgl. der skalaren Multiplikation \odot mit Elementen in K abgeschlossen ist und wenn (U, \oplus, \odot) selbst wieder ein Vektorraum ist.

Beachte: Das ist genau dann erfüllt, wenn (U, \oplus) eine Untergruppe von (V, \oplus) ist und wenn U bzgl. der skalaren Multiplikation \odot mit Elementen in K abgeschlossen ist, also $K \odot U \subseteq U$.

- (ii) Ein Unterraum (U, \oplus, \odot) von (V, \oplus, \odot) heißt **echt** (englisch: **proper subspace**), wenn $U \subsetneq V$ gilt. △

Beachte: Da (U, \oplus) eine Untergruppe von (V, \oplus) ist, enthält ein Unterraum U immer den Nullvektor 0_V .

Die Prüfung einer Teilmenge $U \subseteq V$ auf die Unterraum-Eigenschaft lässt sich mit folgendem Kriterium bewerkstelligen:

Satz 12.8 (Unterraumkriterium).

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper, (V, \oplus, \odot) ein Vektorraum über K und $U \subseteq V$. Dann sind äquivalent:

- (i) (U, \oplus, \odot) ist ein Unterraum von (V, \oplus, \odot) .
- (ii) $U \neq \emptyset$, und für alle $u, v \in U$ und $\alpha \in K$ gilt $u \oplus v \in U$ und $\alpha \odot u \in U$.
(Mit anderen Worten: $U \neq \emptyset$, und es gilt $U \oplus U \subseteq U$ sowie $K \odot U \subseteq U$.)
- (iii) $U \neq \emptyset$, und für alle $u, v \in U$ und $\alpha, \beta \in K$ gilt $\alpha \odot u \oplus \beta \odot v \in U$.
(Mit anderen Worten: $U \neq \emptyset$, und es gilt $K \odot U \oplus K \odot U \subseteq U$.)

Beweis. **Aussage (i) \Rightarrow Aussage (ii):** Es sei (U, \oplus, \odot) ein Unterraum von (V, \oplus, \odot) . Dann ist per **Definition 12.7** und **Definition 12.1** (U, \oplus) eine Gruppe, also eine Untergruppe von (V, \oplus) . Insbesondere gilt $0_V \in U$, also $U \neq \emptyset$. Weiter ist U als Unterraum abgeschlossen bzgl. \oplus und bzgl. der skalaren Multiplikation \odot mit Elementen von K .

Aussage (ii) \Rightarrow Aussage (i): Wir müssen zeigen, dass (U, \oplus, \odot) unter der Annahme von **Aussage (ii)** wieder ein Vektorraum ist. Diese Annahme zeigt insbesondere, dass $\oplus: U \times U \rightarrow U$ und $\odot: K \times U \rightarrow U$ eingeschränkt werden können. Die Eigenschaften aus (12.1) bleiben bei dieser Einschränkung erhalten. Es bleibt also nur zu zeigen, dass (U, \oplus) eine abelsche Gruppe ist, also eine Untergruppe von (V, \oplus) . Dazu wenden wir das Untergruppenkriterium (**Satz 7.33**) an. Es gilt nach Voraussetzung $U \neq \emptyset$. Wegen $\ominus u = (-1_K) \odot u$ für $u \in U$ und der Annahme $K \odot U \subseteq U$ gilt $\ominus U \subseteq U$. Aus der Annahme $U \oplus U \subseteq U$ folgt daher weiter $U \oplus (\ominus U) \subseteq U$. Nach dem Untergruppenkriterium ist (U, \oplus) damit eine Untergruppe von (V, \oplus) .

Aussage (ii) \Rightarrow Aussage (iii): Wir haben $K \odot U \subseteq U$ nach Voraussetzung, also auch $K \odot U \oplus K \odot U \subseteq U \oplus U \subseteq U$, wobei die letzte Inklusion wiederum nach Voraussetzung gilt.

Aussage (iii) \Rightarrow Aussage (ii): Es gilt nach Voraussetzung $U \oplus U \subseteq K \odot U \oplus K \odot U \subseteq U$ und außerdem $K \odot U = K \odot U \oplus \{0_K\} \odot U \subseteq K \odot U \oplus K \odot U \subseteq U$. □

Beispiel 12.9 (Unterräume).

(i) Es sei (V, \oplus, \odot) ein Vektorraum. Dann sind $(\{0_V\}, \oplus, \odot)$ und (V, \oplus, \odot) Unterräume von (V, \oplus, \odot) . Diese heißen die **trivialen Unterräume** (englisch: **trivial subspaces**). Speziell $(\{0_V\}, \oplus, \odot)$ ist der **Nullraum** (englisch: **zero vector space**) von V .

(ii) Wir betrachten den Standardvektorraum $V = \mathbb{R}^2$ über dem Körper \mathbb{R} .

(a) Die Menge

$$U_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1 - 2x_2 = 0 \right\}$$

ist ein Unterraum von $V = \mathbb{R}^2$, denn die Aussage (ii) des Unterraumkriteriums Satz 12.8 ist erfüllt: Zunächst gilt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U_1$, also ist $U_1 \neq \emptyset$. Weiter gilt für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in U_1$ sowie $v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in U_1$:

$$u \oplus v = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} \in U_1, \quad \text{denn } (x_1 + y_1) - 2(x_2 + y_2) = (x_1 - 2x_2) + (y_1 - 2y_2) = 0$$

$$\alpha \odot u = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix} \in U_1, \quad \text{denn } \alpha x_1 - 2(\alpha x_2) = \alpha(x_1 - 2x_2) = 0.$$

(b) Die Menge

$$U_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1 - 2x_2 = 1 \right\}$$

ist **kein** Unterraum von $V = \mathbb{R}^2$, denn sie enthält nicht den Nullvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, was aber eine notwendige Bedingung für einen Unterraum darstellt, wie wir im Anschluss an Definition 12.7 bereits gesehen haben.

(c) Die Menge

$$U_3 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \right\}$$

ist **kein** Unterraum von $V = \mathbb{R}^2$, denn sie erfüllt das Unterraumkriterium nicht. Beispielsweise ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in U_3$, aber $(-1) \odot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ nicht.

(iii) Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(K^{\mathbb{N}}, \oplus, \odot)$ der Vektorraum der Folgen mit Werten in K . Dann ist die Menge der Folgen mit endlichem Träger (siehe Bemerkung 11.6) und Werten in K

$$(K^{\mathbb{N}})_{00} := \left\{ (y_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid \{i \in \mathbb{N} \mid y_i \neq 0_K\} \text{ ist endlich} \right\} \tag{12.9}$$

ein echter Unterraum von $(K^{\mathbb{N}}, \oplus, \odot)$.

(iv) Es sei $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ der Vektorraum der Folgen mit Werten in \mathbb{R} . Dann sind die Mengen

$$(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})_b := \left\{ (y_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid \exists C \geq 0 \forall i \in \mathbb{N} (|y_i| \leq C) \right\} \quad \text{der beschränkten Folgen}^7 \tag{12.10a}$$

$$(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})_c := \left\{ (y_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid (y_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ ist konvergent} \right\} \quad \text{der konvergenten Folgen}^8 \tag{12.10b}$$

$$(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})_0 := \left\{ (y_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid (y_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ konvergiert gegen } 0 \right\} \quad \text{der Nullfolgen}^9 \tag{12.10c}$$

$$(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})_{00} := \left\{ (y_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid (y_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ hat endlichen Träger} \right\} \quad \text{der Folgen mit endlichem Träger}^{10} \tag{12.10d}$$

jeweils echte Unterräume von $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$. (**Quizfrage 12.1:** Gibt es auch Unterraumbeziehungen untereinander?)

⁷englisch: **bounded sequences**

⁸englisch: **convergent sequences**

⁹englisch: **null sequences**

¹⁰englisch: **finitely supported sequences**

- (v) Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(K[t], +, \cdot)$ der Polynomraum über K ; siehe [Beispiel 12.3](#). Dann ist für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ die Menge der **Polynome vom Höchstgrad n** (englisch: **polynomials of maximum degree n**)

$$K_n[t] := \{a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0 \mid a_i \in K \text{ für } i = 0, \dots, n\} \quad (12.11)$$

ein echter Unterraum von $(K[t], +, \cdot)$. (**Quizfrage 12.2:** Bilden auch die Polynome vom Mindestgrad $n \in \mathbb{N}$ einen Unterraum von $K[t]$?) (**Quizfrage 12.3:** Bilden die Polynome von geradem Grad $n \in 2\mathbb{N}_0$ einen Unterraum von $K[t]$?) \triangle

Bemerkung 12.10 (Vereinfachung der Notation).

Zur Vereinfachung der Notation werden wir in Zukunft für die Verknüpfungen \oplus und \odot in Vektorräumen einfach dieselbe Notation verwenden wie für die Verknüpfungen $+$ und \cdot des zugrundeliegenden Körpers. Aus dem Zusammenhang ist klar, ob die jeweilige Verknüpfung mit Skalaren oder mit Vektoren gemeint ist.

Das Zeichen für die Multiplikation \cdot von Vektoren mit Elementen aus dem zugrundeliegenden Körper oder von Körperelementen untereinander wird sogar oft ganz weggelassen, sofern sich dadurch keine Unklarheiten ergeben. Beispielsweise schreiben wir in Zukunft einfach $\sin -\sqrt{2} \cos$ an Stelle von $\sin \ominus \sqrt{2} \odot \cos$.

Wir werden außerdem das Nullelement von K einfach als 0 schreiben, das Einselement von K als 1 und den Nullvektor von V ebenfalls als 0 . \triangle

Wie bereits bei Untergruppen in [§ 7.4](#) beschäftigt uns nun die Frage, wie man Unterräume erzeugen kann.

Lemma 12.11 (Durchschnitt von Unterräumen).

Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum und $(U_i, +, \cdot)$ eine Familie von Unterräumen mit der nichtleeren Indexmenge I . Dann ist auch $\bigcap_{i \in I} U_i$ mit $+$ und \cdot ein Unterraum von $(V, +, \cdot)$.

Beweis. Dieser Beweis ist Gegenstand von [Hausaufgabe I-8.3](#). \square

Definition 12.12 (erzeugter Unterraum, lineare Hülle, Erzeugendensystem).

Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum und $E \subseteq V$.

- (i) Dann heißt

$$\langle E \rangle := \bigcap \{U \mid (U, +, \cdot) \text{ ist Unterraum von } (V, +, \cdot) \text{ und } E \subseteq U\} \quad (12.12)$$

der von E **erzeugte Unterraum** (englisch: **subspace generated by E**) oder die **lineare Hülle** (englisch: **linear hull**) $\text{Lin}(E)$ von E oder auch der **Spann** (englisch: **span**) $\text{Span}(E)$ von E in $(V, +, \cdot)$.

Beachte: Bezeichnen wir mit \mathcal{R} die Menge auf rechten Seite von (12.12), über die der Durchschnitt gebildet wird, dann ist $\langle E \rangle$ das Minimum der Menge \mathcal{R} bzgl. der Inklusionshalbordnung und sogar das Minimum der Menge \mathcal{R} bzgl. der Halbordnung „ist Unterraum von“.

Ist speziell E die endliche Menge $E = \{v_1, \dots, v_n\}$ für $v_i \in V$ und $n \in \mathbb{N}$, so schreiben wir auch $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ oder $\text{Lin}(v_1, \dots, v_n)$ oder $\text{Span}(v_1, \dots, v_n)$ statt $\langle \{v_1, \dots, v_n\} \rangle$ oder $\text{Lin}(\{v_1, \dots, v_n\})$ oder $\text{Span}(\{v_1, \dots, v_n\})$.

- (ii) Gilt $\langle E \rangle = V$, dann heißt E ein **Erzeugendensystem** (englisch: **generating set**) von $(V, +, \cdot)$. Falls ein endliches Erzeugendensystem von V existiert, so heißt V **endlich erzeugt** (englisch: **finitely generated**).
- (iii) Wenn $F = (v_i)_{i \in I}$ eine Familie von Vektoren in V ist, definieren wir den von F **erzeugten Unterraum** in $(V, +, \cdot)$ bzw. die **lineare Hülle** $\langle F \rangle$ von F bzw. den **Spann** $\text{Span}(F)$ von F in $(V, +, \cdot)$ als

$$\langle F \rangle := \bigcap \{U \mid (U, +, \cdot) \text{ ist Unterraum von } (V, +, \cdot) \text{ und } \{v_i \mid i \in I\} \subseteq U\}. \quad (12.13)$$

Wir nennen F ein **Erzeugendensystem** von $(V, +, \cdot)$, wenn $\langle F \rangle = V$ gilt. \triangle

Satz 12.13 (Darstellung des erzeugten Unterraumes).

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper, $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über K und $E \subseteq V$. Dann gilt für den von E erzeugten Unterraum:

$$\langle E \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \mid \exists n \in \mathbb{N}_0 \forall i = 1, \dots, n (v_i \in E, \alpha_i \in K) \right\}. \quad (12.14)$$

(Zur Erinnerung: Im Fall $n = 0$ interpretieren wir die Linearkombination von null Elementen in der rechten Menge als den Nullvektor 0 . Insbesondere im Fall $E = \emptyset$ ist also $\langle E \rangle = \langle \emptyset \rangle = \{0\}$.)

Ist $F = (v_i)_{i \in I}$ eine Familie von Vektoren in V , dann gilt für den von F erzeugten Unterraum:

$$\langle F \rangle = \left\{ \sum_{j=1}^n \alpha_j v_{i_j} \mid \exists n \in \mathbb{N}_0 \forall j = 1, \dots, n \exists i_j \in I (v_{i_j} \in F, \alpha_j \in K) \right\}. \quad (12.15)$$

Beachte: Der von einer Menge E (oder einer Familie F) erzeugte Unterraum stimmt also überein mit der Menge der Linearkombinationen von E (bzw. F).¹¹ Auf die Reihenfolge der Elemente in F kommt es offenbar nicht an.

Beweis. Zur Abkürzung bezeichnen wir die Menge auf der rechten Seite von (12.14) mit M . Wir führen den Beweis analog zu Satz 7.37 in zwei Schritten.

Schritt 1: $\langle E \rangle \supseteq M$: Es sei U ein beliebiger Unterraum von V , der im Durchschnitt (12.12) vorkommt. U enthält also E als Teilmenge. Da U ein Unterraum ist, enthält U auch alle Linearkombinationen von E . Also gilt $U \supseteq M$. Da dies für jeden beliebigen Unterraum aus dem Durchschnitt in (12.12) gilt, gilt auch $\langle E \rangle \supseteq M$.

Schritt 2: $\langle E \rangle \subseteq M$: Wir zeigen zunächst, dass M selbst ein Unterraum von V ist. Dazu überprüfen wir das Unterraumkriterium (Satz 12.8). Offensichtlich ist $M \neq \emptyset$, denn M enthält mindestens den Nullvektor 0 . Sind $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ und $\sum_{j=1}^m \beta_j w_j$ zwei Elemente aus M , so ist auch $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i + \sum_{j=1}^m \beta_j w_j$ ein Element aus M . Zudem ist für jedes $\alpha \in K$ auch $\alpha \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^n \alpha \alpha_i v_i$ ein Element aus M . Also ist M ein Unterraum von V . Zusätzlich ist klar, dass $E \subseteq M$ gilt. (**Quizfrage 12.4:** Details?) Das heißt, M ist einer derjenigen Unterräume von V , über die in der Definition von $\langle E \rangle$ der Durchschnitt gebildet wird. Folglich gilt $\langle E \rangle \subseteq M$.

Der Beweis für den Fall (12.15) geht analog. \square

Beispiel 12.14 (lineare Hülle).

¹¹In manchen Büchern wird daher (12.14) auch als Definition des erzeugten Unterraumes verwendet.

(i) Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(K[t], +, \cdot)$ der Polynomraum über K ; siehe [Beispiel 12.3](#). Die Menge aller Monome $E = \{1, t, t^2, \dots\}$ bildet ein Erzeugendensystem von $K[t]$. Die Menge der Monome $E = \{1, t, \dots, t^n\}$ bis zum Grad n bildet ein Erzeugendensystem von $K_n[t]$, dem Unterraum der Polynome vom Höchstgrad $n \in \mathbb{N}_0$.

(ii) In einem Vektorraum V heißt die lineare Hülle

$$\langle v \rangle = \{ \alpha v \mid \alpha \in K \}$$

eines einzelnen Vektors $v \neq 0$ eine **Gerade** (englisch: **line**) durch 0 und v . Die lineare Hülle

$$\langle v, w \rangle = \{ \alpha v + \beta w \mid \alpha, \beta \in K \}$$

von zwei Vektoren $v, w \neq 0$ mit $w \notin \langle v \rangle$ heißt eine **Ebene** (englisch: **plane**) durch 0, v und w .
(**Quizfrage 12.5**: Was passiert im Fall $w \in \langle v \rangle$?) \triangle

Folgerung 12.15 (zu [Satz 12.13](#): lineare Hülle von Vereinigung und Schnitt).

Es sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum und $E_1, E_2 \subseteq V$. Dann gilt:

$$(i) \quad \langle E_1 \cup E_2 \rangle = \langle \langle E_1 \rangle \cup \langle E_2 \rangle \rangle. \quad (12.16)$$

$$(ii) \quad \langle E_1 \cap E_2 \rangle \subseteq \langle \langle E_1 \rangle \cap \langle E_2 \rangle \rangle. \quad (12.17)$$

Beweis. **Aussage (i)**: Die lineare Hülle ist ordnungserhaltend, d. h., es gilt $E_1 \subseteq \langle E_1 \rangle$ und $E_2 \subseteq \langle E_2 \rangle$. Daraus folgt $E_1 \cup E_2 \subseteq \langle E_1 \rangle \cup \langle E_2 \rangle$ und durch Bildung der linearen Hülle $\langle E_1 \cup E_2 \rangle \subseteq \langle \langle E_1 \rangle \cup \langle E_2 \rangle \rangle$.

Umgekehrt besteht $\langle E_1 \rangle$ nach [Satz 12.13](#) gerade aus den Linearkombinationen von E_1 , und $\langle E_2 \rangle$ besteht aus den Linearkombinationen von E_2 . Das heißt, $\langle \langle E_1 \rangle \cup \langle E_2 \rangle \rangle$ besteht aus Linearkombinationen solcher Vektoren, die ihrerseits eine Linearkombination von E_1 oder eine Linearkombination von E_2 sind. Mit Hilfe des Assoziativgesetzes ([12.1c](#)) erhalten wir, dass wir jeden Vektor aus $\langle \langle E_1 \rangle \cup \langle E_2 \rangle \rangle$ als Linearkombination von $E_1 \cup E_2$ schreiben können, also $\langle \langle E_1 \rangle \cup \langle E_2 \rangle \rangle \subseteq \langle E_1 \cup E_2 \rangle$.

Aussage (ii) Wegen $E_1 \subseteq \langle E_1 \rangle$ und $E_2 \subseteq \langle E_2 \rangle$ gilt $E_1 \cap E_2 \subseteq \langle E_1 \rangle \cap \langle E_2 \rangle$. Durch Bildung der linearen Hülle ergibt sich $\langle E_1 \cap E_2 \rangle \subseteq \langle \langle E_1 \rangle \cap \langle E_2 \rangle \rangle$. \square

Ende der Vorlesung 16

Ende der Woche 8

§ 13 BASIS UND DIMENSION

Literatur: [Beutelspacher, 2014](#), Kapitel 3, [Bosch, 2014](#), Kapitel 1, [Fischer, Springborn, 2020](#), Kapitel 2.5, [Jänich, 2008](#), Kapitel 3

In diesem Abschnitt beantworten wir die Frage, wie wir einen Vektorraum durch ein möglichst kleines Erzeugendensystem darstellen können und damit Redundanz in der Darstellung vermeiden.

Definition 13.1 (lineare (Un-)abhängigkeit).

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über K .

- (i) Eine Menge $E \subseteq V$ heißt **linear unabhängig** (englisch: **linearly independent**), wenn in jeder Linearkombination von $n \in \mathbb{N}$ paarweise verschiedenen Vektoren aus E , die den Nullvektor ergibt, notwendig alle Koeffizienten gleich 0 sind, wenn also für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$v_1, \dots, v_n \in E, \quad v_i \neq v_j \text{ für } i \neq j \quad \text{und} \quad \sum_{\ell=1}^n \alpha_\ell v_\ell = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_\ell = 0 \text{ für alle } \ell = 1, \dots, n. \quad (13.1)$$

- (ii) Wenn dagegen eine Linearkombination von $n \in \mathbb{N}$ paarweise verschiedenen Vektoren aus E möglich ist, die den Nullvektor ergibt, wobei nicht alle Koeffizienten gleich 0 sind, dann heißt E **linear abhängig** (englisch: **linearly dependent**).

- (iii) Eine Familie F von Vektoren in V heißt **linear unabhängig**, wenn in jeder Linearkombination von $n \in \mathbb{N}$ Vektoren aus F mit paarweise verschiedenen Indizes, die den Nullvektor ergibt, notwendig alle Koeffizienten gleich 0 sind, wenn also für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$i_1, \dots, i_n \in I, \quad i_j \neq i_k \text{ für } j \neq k \quad \text{und} \quad \sum_{\ell=1}^n \alpha_\ell v_{i_\ell} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_\ell = 0 \text{ für alle } \ell = 1, \dots, n. \quad (13.2)$$

- (iv) Wenn dagegen eine Linearkombination von $n \in \mathbb{N}$ Vektoren aus F zu paarweise verschiedenen Indizes möglich ist, die den Nullvektor ergibt, wobei nicht alle Koeffizienten gleich 0 sind, dann heißt F **linear abhängig**. \triangle

Bemerkung 13.2 (lineare (Un-)abhängigkeit).

- (i) Die lineare (Un-)abhängigkeit ist eine Eigenschaft, die sich auf eine Menge oder eine Familie von Vektoren bezieht. Sprechweisen wie „Der Vektor v ist linear unabhängig von $\{v_1, v_2\}$.“ sind nicht korrekt. Man kann aber sagen, die Menge $\{v\} \cup \{v_1, v_2\}$ sei linear unabhängig.
- (ii) Die Menge $\{v\}$ bestehend aus einem einzigen Vektor ist linear unabhängig, falls $v \neq 0$ ist, ansonsten linear abhängig. (Dasselbe gilt für eine einelementige Familie von Vektoren.)
- (iii) Eine Menge oder Familie von Vektoren, die den Nullvektor enthält, ist stets linear abhängig.
- (iv) Die leere Menge und die leere Familie von Vektoren sind per Definition linear unabhängig. \triangle

Die lineare Abhängigkeit einer Menge bzw. einer Familie von Vektoren bedeutet, dass man einen Vektor als Linearkombination der anderen darstellen kann:

Lemma 13.3 (lineare Abhängigkeit ist äquivalent zur Kombinierbarkeit).

Es sei V ein Vektorraum.

- (i) Es sind äquivalent:
- $E \subseteq V$ ist eine linear abhängige Menge.
 - Es gibt einen Vektor $v \in E$, der als Linearkombination von $E \setminus \{v\}$ darstellbar ist.
- (ii) Es sind äquivalent:
- $F = (v_i)_{i \in I}$ ist eine linear abhängige Familie mit einer Indexmenge I .
 - Es gibt es einen Vektor v_{i^*} aus der Familie, der als Linearkombination der Familie $(v_i)_{i \in I \setminus \{i^*\}}$ darstellbar ist.

Beweis. Dieser Beweis ist Gegenstand von [Hausaufgabe I-9.1](#). □

Lemma 13.4 (lineare (Un-)abhängigkeit von Teilmengen und Obermengen).

Es sei V ein Vektorraum.

- (i) Jede Teilmenge einer Menge linear unabhängiger Vektoren aus V ist ebenfalls linear unabhängig.
Jede Teilfamilie einer Familie linear unabhängiger Vektoren aus V ist ebenfalls linear unabhängig.
- (ii) Jede Obermenge einer Menge linear abhängiger Vektoren aus V ist ebenfalls linear abhängig.
Jede Oberfamilie einer Familie linear abhängiger Vektoren aus V ist ebenfalls linear abhängig.

Beweis. Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus der [Definition 12.12](#). □

Beispiel 13.5 (lineare (Un-)abhängigkeit).

- (i) Die Teilmenge $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ des Vektorraumes \mathbb{R}^2 über dem Körper \mathbb{R} ist linear abhängig, denn es gilt

$$(1 + \sqrt{2}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- (ii) Dieselbe Menge ist als Teilmenge des Vektorraumes \mathbb{R}^2 über dem Körper \mathbb{Q} jedoch linear unabhängig, denn es gilt

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

- (iii) Wir betrachten den K -Vektorraum K^X der Funktionen $X \rightarrow K$, wobei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und X eine Menge ist; siehe [Beispiel 12.3](#). Für $y \in X$ definieren wir die **charakteristische Funktion** (englisch: **characteristic function**) $e_y: X \rightarrow K$ durch¹²

$$x \mapsto e_y(x) := \delta_{xy} := \begin{cases} 1, & \text{falls } x = y, \\ 0, & \text{falls } x \neq y. \end{cases} \quad (13.3)$$

Dann ist die Menge $\{e_y \mid y \in X\}$ linear unabhängig.

- (iv) Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(K[t], +, \cdot)$ der Polynomraum über K ; siehe [Beispiel 12.3](#). Dann ist die Menge der Monome $E = \{1, t, t^2, \dots\}$ linear unabhängig. △

Die Bedeutung linear unabhängiger Mengen und Familien von Vektoren stellt folgendes Resultat klar.

Lemma 13.6 (lineare Unabhängigkeit und eindeutige Linearkombination).

Es sei V ein Vektorraum und $(v_i)_{i \in I}$ eine Familie von Vektoren aus V . Dann sind äquivalent:

- (i) $(v_i)_{i \in I}$ ist linear unabhängig.
- (ii) Jeder Vektor $v \in \langle (v_i)_{i \in I} \rangle$ lässt sich in eindeutiger Weise (bis auf Summanden mit Nullkoeffizienten) aus paarweise verschiedenen Vektoren der Familie $(v_i)_{i \in I}$ linearkombinieren.

¹²Das Symbol δ_{xy} ist das **Kronecker-Delta** (englisch: **Kronecker delta**). Allgemein ist die **charakteristische Funktion** e_A einer Menge $A \subseteq X$ definiert als $e_A(x) = 1$ für $x \in A$ und $e_A(x) = 0$ für $x \notin A$.

Ein analoges Resultat gilt für Mengen von Vektoren aus V .

Beweis. **Aussage (i) \Rightarrow Aussage (ii):** Es sei $(v_i)_{i \in I}$ linear unabhängig und $v \in \langle (v_i)_{i \in I} \rangle$. Nach **Satz 12.13** besteht $\langle (v_i)_{i \in I} \rangle$ gerade aus den Linearkombinationen von $(v_i)_{i \in I}$. Es gibt also eine endliche Teilmenge $I_0 \subseteq I$ und Skalare $\alpha_i \in K$, $i \in I_0$ mit der Eigenschaft

$$v = \sum_{i \in I_0} \alpha_i v_i. \quad (*)$$

Zu zeigen ist noch, dass diese Darstellung eindeutig ist. Wir nehmen dazu an, dass

$$v = \sum_{j \in I_1} \beta_j v_j \quad (**)$$

eine weitere Darstellung von v als Linearkombination von $(v_i)_{i \in I}$ ist mit endlicher Indexmenge I_1 . Wir setzen $N := \{i \in I_0 \mid \alpha_i \neq 0\} \cup \{j \in I_1 \mid \beta_j \neq 0\}$. Dann ist N endlich. Wir haben

$$\begin{aligned} 0 &= v - v \\ &= \sum_{i \in I_0} \alpha_i v_i - \sum_{j \in I_1} \beta_j v_j \\ &= \sum_{i \in N} \alpha_i v_i - \sum_{j \in N} \beta_j v_j \quad \text{indem wir } \alpha_i = 0 \text{ für } i \in N \setminus I_0 \text{ und } \beta_j = 0 \text{ für } j \in N \setminus I_1 \text{ ergänzen} \\ &= \sum_{i \in N} (\alpha_i - \beta_i) v_i. \end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung $(v_i)_{i \in I}$ linear unabhängig ist, muss $\alpha_i - \beta_i = 0$ für alle $i \in N$ gelten, also $\alpha_i = \beta_i$. Die Darstellungen $(*)$ und $(**)$ unterscheiden sich also nur um eventuell auftauchende Terme mit Nullkoeffizienten.

Aussage (ii) \Rightarrow Aussage (i): Es sei $I_0 \subseteq I$ eine beliebige endliche Teilmenge. Wir müssen zeigen, dass $(v_i)_{i \in I_0}$ linear unabhängig ist. Wir untersuchen also die Linearkombination

$$\sum_{i \in I_0} \alpha_i v_i = 0.$$

Diese wird erreicht durch die Wahl von $\alpha_i = 0$ für alle $i \in I_0$. Nach Voraussetzung ist das auch die einzig mögliche Wahl der Koeffizienten. Das heißt aber, dass $(v_i)_{i \in I_0}$ linear unabhängig ist. Da I_0 eine beliebige endliche Teilmenge von I war, ist die gesamte Familie $(v_i)_{i \in I}$ linear unabhängig.

Der Beweis für Mengen geht analog. □

Lemma 13.7 (lineare Abhängigkeit bedeutet Redundanz).

Es sei V ein Vektorraum und $(v_i)_{i \in I}$ eine nichtleere Familie von Vektoren aus V . Dann sind äquivalent:

(i) $(v_i)_{i \in I}$ ist linear abhängig.

(ii) Es gibt ein $j \in I$, sodass gilt:

$$\langle (v_i)_{i \in I \setminus \{j\}} \rangle = \langle (v_i)_{i \in I} \rangle.$$

Ein analoges Resultat gilt für nichtleere Mengen von Vektoren aus V .

Beachte: Ist ein Erzeugendensystem eines Vektorraumes linear abhängig, so kann man mindestens ein Element aus dem Erzeugendensystem entfernen, ohne den erzeugten Raum zu verkleinern.

Beweis. **Aussage (i) \Rightarrow Aussage (ii):** Es sei $(v_i)_{i \in I}$ linear abhängig, d. h., es gibt eine endliche Teilmenge $I_0 \subseteq I$ und Koeffizienten $\alpha_i \in K$, $i \in I_0$, die nicht alle gleich Null sind, sodass

$$\sum_{i \in I_0} \alpha_i v_i = 0$$

gilt. Es sei $j \in I_0$ ein Index, für den $\alpha_j \neq 0$ gilt. Dann ist

$$\alpha_j v_j = - \sum_{i \in I_0 \setminus \{j\}} \alpha_i v_i,$$

also auch

$$v_j = -\alpha_j^{-1} \sum_{i \in I_0 \setminus \{j\}} \alpha_i v_i = - \sum_{i \in I_0 \setminus \{j\}} \alpha_j^{-1} \alpha_i v_i. \quad (*)$$

Das zeigt $v_j \in \langle (v_i)_{i \in I \setminus \{j\}} \rangle$.

Es sei nun $v \in \langle (v_i)_{i \in I} \rangle$ beliebig. Dann gibt es eine endliche Teilmenge $I_1 \subseteq I$ und Koeffizienten $\beta_i \in K$, $i \in I_1$, sodass

$$v = \sum_{i \in I_1} \beta_i v_i$$

gilt. Wir wollen zeigen, dass wir v auch ohne Verwendung von v_j linearkombinieren können. Falls $j \notin I_1$ liegt (also v_j ohnehin nicht verwendet wird), dann ist $\langle (v_i)_{i \in I \setminus \{j\}} \rangle$ klar. Falls jedoch $j \in I_1$ liegt, dann ersetze v_j durch (*):

$$\begin{aligned} v &= \sum_{i \in I_1} \beta_i v_i \\ &= \sum_{i \in I_1 \setminus \{j\}} \beta_i v_i + \beta_j v_j \\ &= \sum_{i \in I_1 \setminus \{j\}} \beta_i v_i - \sum_{i \in I_0 \setminus \{j\}} \beta_j \alpha_j^{-1} \alpha_i v_i. \end{aligned}$$

Dies ist eine Darstellung von v als Linearkombination aus $(v_i)_{i \in I}$ ohne Verwendung von v_j . Insgesamt gilt also $v \in \langle (v_i)_{i \in I \setminus \{j\}} \rangle$ und damit **Aussage (ii)**.

Aussage (ii) \Rightarrow Aussage (i): Es sei $j \in I$ ein Index, sodass $\langle (v_i)_{i \in I \setminus \{j\}} \rangle = \langle (v_i)_{i \in I} \rangle$ gilt. Dann ist insbesondere $v_j \in \langle (v_i)_{i \in I \setminus \{j\}} \rangle$, d. h., es gibt eine endliche Teilmenge $I_0 \subseteq I \setminus \{j\}$ und Koeffizienten $\alpha_i \in K$, $i \in I_0$, sodass gilt:

$$v_j = \sum_{i \in I_0} \alpha_i v_i.$$

Das heißt aber auch

$$\sum_{i \in I_0} \alpha_i v_i - 1 v_j = 0,$$

d. h., $(v_i)_{i \in I}$ ist linear abhängig.

Der Beweis für Mengen geht analog. □

Im Folgenden interessieren wir uns vor allem für linear unabhängige Erzeugendensysteme, also solche ohne Redundanz.

Definition 13.8 (Basis).

Es sei V ein Vektorraum.

- (i) Eine Teilmenge $B \subseteq V$ heißt eine **Basis** (englisch: **basis**) von V , wenn B linear unabhängig ist und $\langle B \rangle = V$ gilt.
- (ii) Eine Familie B von Vektoren aus V heißt eine **Basis** (englisch: **basis**) von V , wenn B linear unabhängig ist und $\langle B \rangle = V$ gilt. △

Beachte: Eine Basis ist also ein linear unabhängiges Erzeugendensystem.

Beispiel 13.9 (Basis).

- (i) \emptyset ist die einzige Basis des Nullraumes $\{0\}$ über jedem Körper K .
- (ii) Die Menge $E := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist ein Erzeugendensystem des \mathbb{R} -Vektorraumes \mathbb{R}^2 , jedoch keine Basis, da sie linear abhängig ist; siehe **Beispiel 13.5**. Wenn wir ein beliebiges Element aus E entfernen, so erhalten wir eine Basis von \mathbb{R}^2 .
- (iii) Im Standardvektorraum K^n über einem Körper K (**Beispiel 12.3**) ist

$$\{e_1, \dots, e_n\} \text{ mit } e_i := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-ter Eintrag} \tag{13.4}$$

eine Basis, genannt die **kanonische Basis** (englisch: **canonical basis**), **Standardbasis** (englisch: **standard basis**) oder **Einheitsbasis** (englisch: **unit basis**) von K^n .

- (iv) Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(K[t], +, \cdot)$ der Polynomraum über K ; siehe **Beispiel 12.3**. Dann ist die Menge der Monome $E = \{1, t, t^2, \dots\}$ eine Basis von $K[t]$. Die Monome $E = \{1, t, \dots, t^n\}$ bilden eine Basis von $K_n[t]$, dem Unterraum der Polynome vom Höchstgrad $n \in \mathbb{N}_0$. Diese Basen werden die **Monombasis** (englisch: **monomial basis**) des jeweiligen Vektorraumes genannt. △

Satz 13.10 (Charakterisierung von Basen).

Es sei V ein Vektorraum und $B \subseteq V$. Dann sind äquivalent:

- (i) B ist eine Basis von V .
- (ii) B ist eine maximale linear unabhängige Teilmenge von V .¹³ Das heißt: B ist linear unabhängig, und jede echte Obermenge von B ist linear abhängig.
- (iii) B ist ein minimales Erzeugendensystem von V .¹⁴ Das heißt: B ist ein Erzeugendensystem, und jede echte Teilmenge von B ist kein Erzeugendensystem.

¹³Genauer: B ist ein maximales Element bzgl. der Mengeninklusion (**Definition 5.10**) in der Menge der linear unabhängigen Teilmengen von V .

¹⁴Genauer: B ist ein minimales Element bzgl. der Mengeninklusion (**Definition 5.10**) in der Menge der Erzeugendensysteme von V .

(iv) Jeder Vektor $v \in V$ lässt sich auf eindeutige Weise (bis auf Summanden mit Nullkoeffizienten) aus paarweise verschiedenen Elementen von B linearkombinieren.

Ein analoge Charakterisierung der Basiseigenschaft gilt für Familien B in V .

Beweis. **Aussage (i) \Rightarrow Aussage (ii):** Es sei B eine Basis von V , d. h., B ist linear unabhängig und $\langle B \rangle = V$. Für einen beliebigen Vektor $v \in V \setminus B$ gilt $\langle B \cup \{v\} \rangle = V$. Aus [Lemma 13.7](#) („Redundanz bedeutet lineare Abhängigkeit“) folgt nun, dass $B \cup \{v\}$ linear abhängig ist.

Aussage (ii) \Rightarrow Aussage (i): Es sei B eine maximale linear unabhängige Teilmenge von V . Zu zeigen ist, dass B ganz V erzeugt. Es sei dazu $v \in V$ beliebig. Nach Definition von $\langle B \rangle$ ist klar, dass $\langle B \rangle \supseteq B$ gilt. (**Quizfrage 13.1:** Warum?) Wenn also $v \in B$ ist, dann auch $v \in \langle B \rangle$, was zu zeigen war. Wir können also von $v \in V \setminus B$ ausgehen. Nach Voraussetzung ist $B \cup \{v\}$ als echte Obermenge von B linear abhängig. Es existieren also $n \in \mathbb{N}_0$, $v_i \in B$ und $\alpha_i \in K$, $i = 1, \dots, n$, sowie $\alpha \in K$, sodass gilt:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i + \alpha v = 0.$$

Dabei ist $\alpha \neq 0$, denn sonst wäre bereits B linear abhängig, was der Voraussetzung widerspricht. Wir erhalten also

$$v = - \sum_{i=1}^n \alpha^{-1} \alpha_i v_i,$$

d. h., v lässt sich in der Tat aus Elementen von B linearkombinieren. Damit ist $\langle B \rangle = V$ gezeigt.

Aussage (i) \Rightarrow Aussage (iii): Es sei B eine Basis von V , d. h., B ist linear unabhängig und $\langle B \rangle = V$. Aus [Lemma 13.7](#) („Redundanz bedeutet lineare Abhängigkeit“) folgt nun, dass B keine redundanten Elemente enthält, dass also für alle $v \in B$ gilt: $\langle B \setminus \{v\} \rangle \subsetneq V$.

Aussage (iii) \Rightarrow Aussage (i): Nach Voraussetzung haben wir $\langle B \rangle = V$, und für alle $v \in B$ gilt: $\langle B \setminus \{v\} \rangle \subsetneq V$. Aus [Lemma 13.7](#) („Redundanz bedeutet lineare Abhängigkeit“) folgt daher, dass B linear unabhängig ist, also eine Basis.

Aussage (i) \Rightarrow Aussage (iv): Es sei B eine Basis von V , d. h., B ist linear unabhängig und $\langle B \rangle = V$. Aus [Lemma 13.6](#) folgt, dass sich jedes $v \in \langle B \rangle = V$ in i. W. eindeutiger Weise aus Elementen von B linearkombinieren lässt.

Aussage (iv) \Rightarrow Aussage (i): Nach Voraussetzung lässt sich jeder Vektor $v \in V$ auf eindeutige Weise (bis auf Summanden mit Nullkoeffizienten) aus paarweise verschiedenen Elementen von B linearkombinieren. Also ist $\langle B \rangle = V$, und aus [Lemma 13.6](#) folgt, dass B linear unabhängig ist, also eine Basis von V . \square

Folgerung.

Verschiedene Basen B_1 und B_2 eines Vektorraumes V sind bzgl. der Halbordnung „ \subseteq “ nicht vergleichbar. D. h., es gilt weder $B_1 \subseteq B_2$ noch $B_2 \subseteq B_1$.

Beweis. Die Annahme von $B_1 \subsetneq B_2$ oder von $B_2 \subsetneq B_1$ für zwei Basen B_1, B_2 von V widerspräche **Aussage (ii)** von [Satz 13.10](#). \square

Wir geben nun einige wichtige Resultate zur Existenz von Basen an. Das Hauptresultat – der nachfolgende Basisergänzungssatz – besagt, dass zwischen einer linear unabhängigen, aber möglicherweise zu kleinen Menge (der erzeugte Raum ist nicht alles), und einem Erzeugendensystem, das aber möglicherweise zu groß (linear abhängig) ist, immer eine Basis liegt.

Satz 13.11 (Basisergänzungssatz¹⁵).

Es sei V ein Vektorraum.

- (i) Es sei A eine linear unabhängige Menge von Vektoren aus V und E ein Erzeugendensystem von V mit der Eigenschaft $A \subseteq E$. Dann existiert eine Basis B von V mit $A \subseteq B \subseteq E$.
- (ii) Es sei $A = (v_i)_{i \in I_A}$ eine linear unabhängige Familie von Vektoren aus V und $E = (v_i)_{i \in I_E}$ ein Erzeugendensystem von V mit der Eigenschaft $I_A \subseteq I_E$. Dann existiert eine Basis $B = (v_i)_{i \in I_B}$ von V mit $I_A \subseteq I_B \subseteq I_E$.

Beweis. Wir führen den Beweis für Mengen, also den Beweis von [Aussage \(i\)](#).

Wir betrachten die Menge aller linear unabhängigen Teilmengen zwischen A und E , also

$$\mathcal{D} := \{D \subseteq V \mid A \subseteq D \subseteq E, \text{ sodass } D \text{ linear unabhängig ist}\} \subseteq \mathcal{P}(E) \subseteq \mathcal{P}(V).$$

\mathcal{D} ist mit der Mengeninklusion eine halbgeordnete Menge. Wegen $A \in \mathcal{D}$ ist $\mathcal{D} \neq \emptyset$. Ziel ist die Anwendung des [Lemmas von Zorn 6.35](#).

Schritt 1: Jede totalgeordnete Teilmenge $C \subseteq \mathcal{D}$ besitzt eine obere Schranke S in \mathcal{D} :

Wir zeigen, dass $S := \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$ eine obere Schranke ([Definition 5.10](#)) der Teilmenge C in \mathcal{D} ist.

Dazu zeigen wir zunächst, dass S überhaupt Element von \mathcal{D} ist:

- (a) Für alle $C \in \mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$ gilt $A \subseteq C \subseteq E$, also auch $A \subseteq \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C = S \subseteq E$.
- (b) Weiter ist S linear unabhängig, denn: Es sei $\{c_1, \dots, c_n\} \subseteq S$ eine endliche Teilmenge. Für alle c_i existiert $C_i \in \mathcal{C}$ mit $c_i \in C_i$. C ist aber totalgeordnete Teilmenge, also existiert ein Maximum C_k der endlichen Teilmenge $\{C_1, \dots, C_n\}$ in \mathcal{C} . Folglich gilt $C_i \subseteq C_k$ für alle $i = 1, \dots, n$. Damit ist $\{c_1, \dots, c_n\} \subseteq \bigcup_{i=1}^n C_i = C_k$. Dabei ist $C_k \in \mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$ linear unabhängig. Also ist nach [Lemma 13.4](#) auch die Teilmenge $\{c_1, \dots, c_n\}$ linear unabhängig.

Schließlich zeigt $C \subseteq \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C = S$ für alle $C \in \mathcal{C}$, dass S tatsächlich eine obere Schranke von C in \mathcal{D} ist.

Schritt 2: Das [Lemma von Zorn 6.35](#) zeigt nun, dass ein maximales Element B von \mathcal{D} existiert. Das heißt definitionsgemäß: B ist linear unabhängig und erfüllt $A \subseteq B \subseteq E$. Es bleibt zu zeigen, dass B tatsächlich ganz V erzeugt.

Falls $B = E$ gilt, so ist $V = \langle E \rangle = \langle B \rangle$ und der Beweis erbracht. Andernfalls gibt es ein $a \in E \setminus B$, also gilt $B \cup \{a\} \supsetneq B$. B ist aber ein maximales Element von \mathcal{D} , also kann $B \cup \{a\}$ nicht zu \mathcal{D} gehören. Wegen $A \subseteq B \cup \{a\} \subseteq E$ muss das daran liegen, dass $B \cup \{a\}$ linear abhängig ist. Aus [Lemma 13.7](#) folgt also $\langle B \cup \{a\} \rangle = \langle B \rangle$ und insbesondere $a \in \langle B \rangle$. Da dieses Argument für jedes $a \in E \setminus B$ gilt, folgt $E \setminus B \subseteq \langle B \rangle$, und natürlich gilt auch $B \subseteq \langle B \rangle$. Es folgt $E \subseteq \langle B \rangle$. Der Übergang zur linearen Hülle zeigt $V = \langle E \rangle \subseteq \langle \langle B \rangle \rangle = \langle B \rangle$, aber natürlich gilt auch $\langle B \rangle \subseteq V$, also $\langle B \rangle = V$. □

¹⁵englisch: [basis extension theorem](#)

Es folgen drei unmittelbare Folgerungen als Spezialfälle des [Basisergänzungssatzes 13.11](#), formuliert nur in der Version für Mengen:

Folgerung 13.12 (Basisexistenzsatz: $A = \emptyset$ und $E = V$).

Jeder Vektorraum V besitzt eine Basis.

Folgerung 13.13 (Basisauswahlsatz: $A = \emptyset$).

Aus jedem Erzeugendensystem E eines Vektorraumes V lässt sich eine Basis auswählen.

Folgerung 13.14 (Basisergänzungssatz: $E = V$).

Jede linear unabhängige Menge A eines Vektorraumes V kann zu einer Basis erweitert werden.

Bemerkung 13.15 (zum [Basisergänzungssatzes 13.11](#)).

Der Beweis des [Basisergänzungssatzes 13.11](#) und seiner [Folgerungen 13.12](#) bis [13.14](#) ist nicht konstruktiv, d. h., wir können ihn nicht zur Grundlage eines Verfahrens machen, um eine Basis zu konstruieren. Beispielsweise können wir keine Basis von \mathbb{R} als \mathbb{Q} -Vektorraum ([Beispiel 12.3](#)) angeben.

Wenn der Vektorraum V jedoch endlich erzeugt ist, wenn es also ein endliches Erzeugendensystem gibt, dann lässt sich der [Basisergänzungssatz 13.11](#) konstruktiv und ohne Verwendung des Zornschen Lemmas beweisen, indem man die linear unabhängige Menge A Schritt für Schritt durch einzelne Elemente von E ergänzt oder alternativ Schritt für Schritt einzelne Elemente von $E \setminus A$ entfernt. \triangle

Wir kommen nun zum wichtigen Begriff der Dimension, der in gewissem Sinne die „Größe“ eines Vektorraumes beschreibt. Aus Gründen der Übersichtlichkeit formulieren wir die Definition nur für Basen, die Mengen sind, nicht für Familien.

Definition 13.16 (Dimension eines Vektorraumes).

Es sei V ein Vektorraum.

- (i) Wenn V eine Basis B der endlichen Kardinalität $n \in \mathbb{N}_0$ besitzt, so sagen wir, V habe **endliche Dimension** (englisch: [finite dimension](#)), genauer: die **Dimension** (englisch: [dimension](#)) n , in Symbolen: $\dim(V) = n$.
- (ii) Wenn V keine Basis endlicher Kardinalität besitzt, so sagen wir, V habe **unendliche Dimension** (englisch: [infinite dimension](#)), in Symbolen: $\dim(V) = \infty$.

Zur Verdeutlichung, welcher Körper K verwendet wird, schreiben wir manchmal auch $\dim_K(V)$. \triangle

Bevor wir mit dem Begriff der Dimension arbeiten, muss noch sichergestellt werden, dass dieser wohldefiniert ist, denn ein Vektorraum besitzt i. A. viele verschiedene Basen. Wir werden dazu beweisen, dass in dem Fall, dass ein Vektorraum eine Basis endlicher Kardinalität besitzt, alle seine Basen endliche Kardinalität haben, und zwar alle dieselbe.

Lemma 13.17 (Austauschlemma).

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und die endliche Menge $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V mit $n \in \mathbb{N}$. Ist $w = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ mit Koeffizienten $\alpha_i \in K$ und gilt $\alpha_j \neq 0$ für ein gewisses $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, dann ist auch $B_0 := \{v_1, \dots, v_{j-1}, w, v_{j+1}, \dots, v_n\}$ eine Basis von V .

Ein analoges Resultat gilt, wenn die endliche Familie B eine Basis von V ist.

Beweis. Da es bei einer Basis auf die Reihenfolge der Elemente nicht ankommt, nehmen wir aus Bequemlichkeit und o. B. d. A. an, dass $j = 1$ ist. Aus $w = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ folgt

$$v_1 = \alpha_1^{-1} \left(w - \sum_{i=2}^n \alpha_i v_i \right). \quad (*)$$

Schritt 1: Wir zeigen: $\langle B_0 \rangle = V$.

Es sei dazu $v \in V$. Da B eine Basis ist, gibt es Koeffizienten $\beta_1, \dots, \beta_n \in K$, sodass $v = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i$ gilt. Durch Einsetzen von $(*)$ folgt

$$\begin{aligned} v &= \beta_1 \alpha_1^{-1} \left(w - \sum_{i=2}^n \alpha_i v_i \right) + \sum_{i=2}^n \beta_i v_i \\ &= \beta_1 \alpha_1^{-1} w - \beta_1 \alpha_1^{-1} \sum_{i=2}^n \alpha_i v_i + \sum_{i=2}^n \beta_i v_i \quad \text{nach Distributivgesetz (10.1a) in } K \\ &= \beta_1 \alpha_1^{-1} w + \sum_{i=2}^n (\beta_i - \beta_1 \alpha_1^{-1} \alpha_i) v_i \quad \text{nach Kommutativ- und Distributivgesetz (10.1b)}. \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass in der Tat $\langle B_0 \rangle = \langle w, v_2, \dots, v_n \rangle = V$ gilt.

Schritt 2: Wir zeigen: B_0 ist linear unabhängig.

Wir betrachten dazu

$$\begin{aligned} \beta_1 w + \sum_{i=2}^n \beta_i v_i &= 0 \\ \Rightarrow \beta_1 \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i + \sum_{i=2}^n \beta_i v_i &= 0 \\ \Rightarrow \beta_1 \alpha_1 v_1 + \sum_{i=2}^n (\beta_1 \alpha_i + \beta_i) v_i &= 0. \end{aligned}$$

Da $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ linear unabhängig ist, ist das nur möglich, wenn alle Koeffizienten gleich Null sind, also

$$\beta_1 \alpha_1 = 0 \quad \text{und} \quad \beta_1 \alpha_i + \beta_i = 0 \quad \text{für } i = 2, \dots, n.$$

Wegen $\alpha_1 \neq 0$ muss $\beta_1 = 0$ sein, woraus dann weiter $\beta_2 = \dots = \beta_n = 0$ folgt. Das heißt aber, dass $B_0 = \{w, v_2, \dots, v_n\}$ linear unabhängig ist. \square

Satz 13.18 (Austauschsatz von Steinitz¹⁶).

Es sei V ein Vektorraum und die endliche Menge $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V mit $\#B = n \in \mathbb{N}_0$. Ist $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ eine linear unabhängige Menge in V mit $\#A = m \in \mathbb{N}_0$, dann gilt:

(i) $m \leq n$.

(ii) Es gibt eine $(n - m)$ -elementige Teilmenge D von B , sodass $B_0 := A \cup D$ ebenfalls eine Basis von V ist. Es gilt $\#B_0 = n$.

¹⁶englisch: Steinitz exchange theorem

Beweis. Wir führen einen Induktionsbeweis nach der Mächtigkeit $m = \#A$. Den Induktionsanfang setzen wir bei $m = 0$. Dann ist $A = \emptyset$, und **Aussage (i)** gilt wegen $m = 0 \leq n$, und **Aussage (ii)** gilt mit $D = B$.

Es sei nun $m \geq 1$, und es gelten **Aussagen (i)** und **(ii)** bereits für $m-1$. Da $\{a_1, \dots, a_m\}$ linear unabhängig ist, ist auch $\{a_1, \dots, a_{m-1}\}$ linear unabhängig. Nach Induktionsannahme gilt $m-1 \leq n$, und es existiert $D = \{v_{i_m}, \dots, v_{i_n}\} \subseteq B$, sodass $B_1 := \{a_1, \dots, a_{m-1}, v_{i_m}, \dots, v_{i_n}\}$ eine Basis von V ist.

Falls nun $m-1 = n$ wäre, also $D = \emptyset$, dann wäre bereits $\{a_1, \dots, a_{m-1}\}$ eine Basis von V . Nach dem **Satz 13.10** über die Charakterisierung von Basen hieße das aber, dass $\{a_1, \dots, a_m\}$ linear abhängig wäre, im Widerspruch zur Voraussetzung. Es gilt also $m-1 < n$, also $m \leq n$. Damit ist der Induktionsschritt für **Aussage (i)** gezeigt. Da B_1 eine Basis von V ist, können wir jeden Vektor, insbesondere a_m , durch die Basiselemente linearkombinieren. Es gibt also Skalare α_j , $j = 1, \dots, n$, sodass gilt:

$$a_m = \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j a_j + \sum_{j=m}^n \alpha_j v_{i_j}.$$

Wären alle $\alpha_m = \alpha_{m+1} = \dots = \alpha_n = 0$, so würde das die lineare Abhängigkeit von $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ zeigen, im Widerspruch zur Voraussetzung. Demzufolge gibt es einen Index $j \in \llbracket m, n \rrbracket$ mit $\alpha_j \neq 0$. Nach dem **Austauschlemma 13.17** ist $B_0 = B_1 \setminus \{v_{i_j}\} \cup \{a_m\}$ eine Basis von V . Die Kardinalität von B_0 ist $\#B_0 \leq \#B_1 - 1 + 1 \leq n$. Wäre $a_m \in B_1 \setminus \{v_{i_j}\}$, dann würde aus

$$0 = \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j a_j + \sum_{j=m}^n \alpha_j v_{i_j} - a_m$$

folgen, dass B_1 linear abhängig ist, im Widerspruch zur Basiseigenschaft von B_1 . Somit folgt $\#B_0 = n$, was den Induktionsschritt für **Aussage (ii)** zeigt. \square

Folgerung 13.19 (endliche Basen sind gleichmächtig).

Es sei V ein Vektorraum.

- (i) Wenn V endlich erzeugt ist, dann ist jede Basis von V endlich, und alle Basen haben dieselbe Mächtigkeit.
- (ii) Wenn V nicht endlich erzeugt ist, dann ist jede Basis von V unendlich.

Beweis. Wir führen den Beweis für Mengen.

Aussage (i): Wenn V endlich erzeugt ist, dann gibt es ein endliches Erzeugendensystem und nach **Basisergänzungssatz 13.11** damit auch eine endliche Basis B von V , sagen wir mit Mächtigkeit $\#B = n \in \mathbb{N}_0$. Es sei B_0 eine weitere (möglicherweise unendliche) Basis von V . Insbesondere jede endliche Teilmenge $B_1 \subseteq B_0$ ist dann ebenfalls linear unabhängig, und nach **Satz 13.18** ist $\#B_1 \leq n$. Damit muss B_0 selbst endlich sein mit $\#B_0 \leq n = \#B$. Durch Tausch der Rollen von B und B_0 folgt auch $\#B \leq \#B_0$, also zusammen $\#B = \#B_0$.

Aussage (ii): Wäre B eine endliche Basis, dann wäre B auch ein endliches Erzeugendensystem, und V wäre endlich erzeugt, im Widerspruch zur Voraussetzung. \square

Bemerkung 13.20 (Dimensionsbegriff für Vektorräume).

- (i) **Folgerung 13.19** zeigt, dass der Dimensionsbegriff aus **Definition 13.16** wohldefiniert ist.

- (ii) Der Beweis von [Folgerung 13.19](#) verwendet den [Basisergänzungssatz 13.11](#), jedoch nur die Version für endlich-dimensionale (endlich erzeugte) Vektorräume, die ohne das Zornsche Lemma und damit ohne das Auswahlaxiom auskommt.
- (iii) Sogar für unendlich-dimensionale Vektorräume gilt, dass je zwei Basen dieselbe Mächtigkeit besitzen. (Dieser Beweis verwendet wieder das Auswahlaxiom.) △

Beispiel 13.21 (Dimension eines Vektorraumes).

- (i) Der „Standardvektorraum K^n der Dimension n “ über einem Körper K ([Beispiel 12.3](#)) hat tatsächlich die Dimension $n \in \mathbb{N}_0$.
- (ii) Es gilt $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) = 1$ und $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}) = \infty$.
- (iii) Es gilt $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$ und $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$. Eine Basis für $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ ist $\{1, i\}$.
- (iv) Der Nullraum $\{0\}$ ist über jedem Körper der einzige Vektorraum der Dimension 0.
- (v) Der Polynomraum $(K[t], +, \cdot)$ über einem Körper $(K, +, \cdot)$ hat unendliche Dimension, da $B = \{1, t, t^2, \dots\}$ eine (abzählbar) unendliche Basis von $K[t]$ ist. Die Monome $B = \{1, t, \dots, t^n\}$ bilden eine Basis von $K_n[t]$, dem Unterraum der Polynome vom Höchstgrad $n \in \mathbb{N}_0$. Also gilt $\dim(K_n[t]) = n + 1$. △

Folgerung 13.22 (Dimension, Unterräume und lineare Unabhängigkeit).

Es sei V ein Vektorraum der Dimension $n \in \mathbb{N}_0$.

- (i) Ist $A \subseteq V$ eine linear unabhängige Teilmenge, dann gilt $\#A \leq n$.
- (ii) $A \subseteq V$ ist genau dann eine Basis von V , wenn A linear unabhängig ist und $\#A = n$ gilt.
- (iii) Für jeden Unterraum U von V gilt: $0 \leq \dim(U) \leq \dim(V)$.
- (iv) Für jeden Unterraum U von V gilt $U = V$ genau dann, wenn $\dim(U) = \dim(V)$ ist.

Beweis. **Aussage (i):** Nach [Basisergänzungssatz 13.11](#) existiert eine Basis B von V mit $A \subseteq B$. Nach [Folgerung 13.19](#) ist $\#B = n$ und daher $\#A \leq n$.

Aussage (ii): Ist A eine Basis von V , dann ist A definitionsgemäß linear unabhängig, und nach [Folgerung 13.19](#) gilt $\#A = \dim(V) = n$. Ist umgekehrt A linear unabhängig und gilt $\#A = n$, so gilt für jede Basis $B \supseteq A$ von V einerseits $\#B \geq \#A$, andererseits aber $\#B = \dim(V) = n$. Also muss $B = A$ sein, d. h., A ist bereits eine Basis.

Aussage (iii): Ist A eine Basis des Unterraumes U von V , dann ist A linear unabhängige Teilmenge von U und damit auch von V . Aus [Aussage \(i\)](#) folgt $\dim(U) = \#A \leq n = \dim(V)$.

Aussage (iv): Ist $U = V$, dann gilt $\dim(U) = \dim(V)$. Nun gelte andererseits $\dim(U) = \dim(V)$, und es sei A eine Basis von U . Dann ist A linear unabhängige Teilmenge von U und damit auch von V . Es gilt $\#A = \dim(U) = \dim(V) = n$. Aus [Aussage \(ii\)](#) folgt, dass A auch eine Basis von V ist, also gilt $U = \langle A \rangle = V$. □

§ 14 SUMMEN VON UNTERRÄUMEN

Literatur: Bosch, 2014, Kapitel 1, Fischer, Springborn, 2020, Kapitel 2.6

§ 14.1 SUMMEN VON ZWEI UNTERRÄUMEN

Aus Lemma 12.11 wissen wir, dass der Durchschnitt $U \cap W$ zweier Unterräume U, W eines Vektorraumes V wieder ein Vektorraum ist. Die Vereinigung $U \cup W$ ist jedoch i. A. kein Unterraum von V .¹⁷

Es ist naheliegend, statt $U \cup W$ den kleinsten Unterraum von V zu betrachten, der $U \cup W$ enthält, also $\langle U \cup W \rangle$.

Lemma 14.1 (die lineare Hülle der Vereinigung zweier Unterräume ist die Summe.).

Es sei V ein Vektorraum und U, W zwei Unterräume von V . Dann gilt

$$\langle U \cup W \rangle = U + W. \quad (14.1)$$

Wir bezeichnen den Unterraum $U + W$ als die **Summe der Unterräume** U und W (englisch: **sum of two subspaces**). (**Quizfrage 14.1:** Wie ist der Ausdruck $U + W$ zu verstehen?)

Beweis. Aus Satz 12.13 wissen wir, dass $\langle U \cup W \rangle$ übereinstimmt mit der Menge M aller Linearkombinationen von $U \cup W$. Wir zeigen nun, dass $M = U + W$ gilt. In der Tat sind die Elemente $u + w$ von $U + W$ auch Elemente von M , also $U + W \subseteq M$. Ist umgekehrt $v \in M$, dann hat v eine Darstellung der Form

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i + \sum_{j=1}^m \beta_j w_j$$

mit $n, m \in \mathbb{N}_0$, $\alpha_i, \beta_j \in K$ und $u_i \in U$ sowie $w_j \in W$. Da U und W Unterräume sind, ergibt die erste Summe wieder ein Element von U , und die zweite Summe ergibt ein Element von W . Das zeigt $M \subseteq U + W$, also insgesamt $M = U + W$. \square

Bemerkung 14.2 (Ordnung auf der Menge aller Unterräume).

Die Mengeneinklusivität ist eine Halbordnung auf der Menge aller Unterräume eines gegebenen (möglicherweise unendlich-dimensionalen) Vektorraumes V . Sie stimmt überein mit der Halbordnung „ist Unterraum von“. Für je zwei Unterräume U und W ist $U \cap W$ das Infimum von $\{U, W\}$ (Definition 5.10) und $U + W$ das Supremum von $\{U, W\}$. Genau dann, wenn $U \subseteq W$ oder $W \subseteq U$ gilt, ist das Infimum ein Minimum und das Supremum ein Maximum. \triangle

Satz 14.3 (Dimension der Summe von zwei Unterräumen).

Es seien V ein Vektorraum und U, W zwei endlich-dimensionale Unterräume von V . Dann gilt

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W). \quad (14.2)$$

¹⁷Tatsächlich gilt: $U \cup W$ ist genau dann ein Unterraum, wenn $U \subseteq W$ oder $W \subseteq U$ gilt (Hausaufgabe I-8.3). Ein analoges Resultat gilt auch für Untergruppen (Hausaufgabe I-5.1), Unterringe und Unterkörper.

Beweis. $U \cap W$ ist ebenfalls ein endlich-dimensionaler Unterraum von V , besitzt also eine endliche Basis $\{v_1, \dots, v_m\}$ mit $m = \dim(U \cap W) \in \mathbb{N}_0$. Nach dem **Basisergänzungssatz 13.11** kann diese Basis zu einer Basis von U bzw. einer Basis von W ergänzt werden. Es gibt also $\{u_1, \dots, u_k\} \subseteq U$ und $\{w_1, \dots, w_\ell\} \subseteq W$ mit $k, \ell \in \mathbb{N}_0$, sodass

$$\begin{aligned} B_U &:= \{v_1, \dots, v_m, u_1, \dots, u_k\} && \text{Basis von } U \\ B_W &:= \{v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_\ell\} && \text{Basis von } W \end{aligned}$$

ist. Wir zeigen nun, dass $B := \{v_1, \dots, v_m, u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_\ell\}$ eine Basis von $U + W$ ist. Wegen $B = B_U \cup B_W$ ist B ein Erzeugendensystem von $U + W$. Die lineare Unabhängigkeit von B zeigen wir wie folgt: Wir setzen die Linearkombination

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^k \beta_i u_i + \sum_{i=1}^{\ell} \gamma_i w_i = 0$$

an mit Koeffizienten $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in K$. Definieren wir $u := \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^k \beta_i u_i \in U$, so gilt

$$u = \sum_{i=1}^{\ell} (-\gamma_i) w_i \in W,$$

also $u \in U \cap W$. Wir haben also

$$\begin{aligned} \text{einerseits } u \in U &= \langle v_1, \dots, v_m, u_1, \dots, u_k \rangle \\ \text{und andererseits } u \in U \cap W &= \langle v_1, \dots, v_m \rangle. \end{aligned}$$

Aus der Eindeutigkeit der Darstellung (**Lemma 13.6**) folgt $\beta_1 = \dots = \beta_k = 0$. Es folgt also

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^{\ell} \gamma_i w_i = 0,$$

und da $B_W = \{v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_\ell\}$ eine Basis ist, folgt $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$ und $\gamma_1 = \dots = \gamma_\ell = 0$. Das zeigt die lineare Unabhängigkeit von B , also ist B tatsächlich eine Basis von $U + W$.

Die Behauptung (**14.2**) folgt nun aus

$$\underbrace{m+k+\ell}_{\dim(U+W)} = \underbrace{m+k}_{\dim(U)} + \underbrace{m+\ell}_{\dim(W)} - \underbrace{m}_{\dim(U \cap W)}.$$

□

Beispiel 14.4 (Summe von zwei Unterräumen).

(i) Für die Unterräume

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{und} \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

von \mathbb{R}^2 gilt

$$U + W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Die Dimensionsformel (**14.2**) ergibt

$$\underbrace{\dim(U+W)}_2 = \underbrace{\dim(U)}_1 + \underbrace{\dim(W)}_1 - \underbrace{\dim(U \cap W)}_0.$$

(ii) Für die Unterräume

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{und} \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

von \mathbb{R}^3 gilt

$$U + W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathbb{R}^3 \quad \text{und} \quad U \cap W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Die Dimensionsformel (14.2) ergibt

$$\underbrace{\dim(U + W)}_3 = \underbrace{\dim(U)}_2 + \underbrace{\dim(W)}_2 - \underbrace{\dim(U \cap W)}_1.$$

(iii) Für die Unterräume

$$U = \langle 1, t^2, t^3, t^5 \rangle \quad \text{und} \quad W = \langle t, t^3, t^4 \rangle$$

von $K_5[t]$ über einem beliebigen Körper $(K, +, \cdot)$ gilt

$$U + W = \langle 1, t, t^2, t^3, t^4, t^5 \rangle = K_5[t] \quad \text{und} \quad U \cap W = \langle t^3 \rangle.$$

Die Dimensionsformel (14.2) ergibt

$$\underbrace{\dim(U + W)}_6 = \underbrace{\dim(U)}_4 + \underbrace{\dim(W)}_3 - \underbrace{\dim(U \cap W)}_1. \quad \triangle$$

Definition 14.5 (direkte Summe von zwei Unterräumen).

Es seien V ein Vektorraum und U, W zwei Unterräume von V . Die Summe $U + W$ heißt **direkt** (englisch: **direct sum**), wenn $U \cap W = \{0\}$ gilt, in Symbolen: $U \oplus W$. △

Beispiel 14.6 (direkte Summe von zwei Unterräumen).

In [Beispiel 14.4](#) ist nur

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \oplus \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathbb{R}^2$$

eine direkte Summe. (**Quizfrage 14.2**: Woran erkennt man das?) △

Satz 14.7 (Charakterisierung direkter Summen von zwei Unterräumen).

Es seien V ein Vektorraum und U, W zwei Unterräume von V . Dann sind äquivalent:

- (i) $V = U \oplus W$.
- (ii) Für alle $v \in V$ existieren eindeutige Vektoren $u \in U$ und $w \in W$, sodass $v = u + w$ gilt.

Sind U und W endlich-dimensional, dann sind diese Aussagen desweiteren äquivalent zu

- (iii) $\dim(V) = \dim(U) + \dim(W)$ und $\dim(U \cap W) = 0$.

Beweis. **Aussage (i) \Rightarrow Aussage (ii)**: $V = U \oplus W$ impliziert $V = U + W$. Für gegebenes $v \in V$ gibt es also Vektoren $u \in U$ und $w \in W$, sodass $v = u + w$ gilt. Gilt nun ebenfalls $v = u' + w'$ für Vektoren $u' \in U$ und $w' \in W$, dann gilt

$$u - u' = w' - w \in U \cap W = \{0\}$$

nach Voraussetzung. Daher muss $u = u'$ und $w = w'$ sein.

Aussage (ii) \Rightarrow Aussage (i): Aus der Voraussetzung folgt sofort $V = U + W$. Zu zeigen ist $U \cap W = \{0\}$.

Für $v \in U \cap W$ zeigen

$$\begin{aligned} v &= v + 0 && \text{mit } v \in U, 0 \in W \\ v &= 0 + v && \text{mit } 0 \in U, v \in W \end{aligned}$$

und die Eindeutigkeit der Zerlegung, dass $v = 0$ sein muss, also gilt tatsächlich $U \cap W = \{0\}$.

Aussage (i) \Rightarrow Aussage (iii): Es gilt

$$\begin{aligned} \dim(V) &= \dim(U + W) && \text{da } V = U + W \text{ nach Voraussetzung} \\ &= \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) && \text{nach Dimensionsformel (14.2)} \\ &= \dim(U) + \dim(W) - 0 && \text{da } U \cap W = \{0\} \text{ nach Voraussetzung.} \end{aligned}$$

Aussage (iii) \Rightarrow Aussage (i): Unter den Voraussetzungen zeigt die Dimensionsformel (14.2):

$$\dim(V) = \dim(U) + \dim(W) = \dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim(U + W).$$

$U + W$ ist also ein Unterraum von V maximaler Dimension und damit identisch zu V . Außerdem zeigt $\dim(U + W) = 0$, dass $U \cap W = \{0\}$ gilt. \square

Satz 14.8 (direkte Summe von zwei Unterräumen und Partitionierung einer Basis).

Es sei V ein Vektorraum. Dann gilt:

- (i) Ist B eine Basis von V und $\{B_1, B_2\}$ eine Partition¹⁸ von B , dann gilt $V = \langle B_1 \rangle \oplus \langle B_2 \rangle$.
- (ii) Sind U_1, U_2 Unterräume von V mit Basen B_1, B_2 und gilt $V = U_1 \oplus U_2$, so ist $B_1 \cup B_2$ eine Basis von V .

Beweis. **Aussage (i):** Wir zeigen zunächst $V = \langle B_1 \rangle + \langle B_2 \rangle$. Es gilt

$$\begin{aligned} V &= \langle B \rangle && B \text{ ist Basis von } V \\ &= \langle B_1 \cup B_2 \rangle && \text{nach Voraussetzung} \\ &= \langle \langle B_1 \rangle \cup \langle B_2 \rangle \rangle && \text{nach Folgerung 12.15} \\ &= \langle B_1 \rangle + \langle B_2 \rangle && \text{nach Lemma 14.1 (lineare Hülle der Vereinigung zweier Unterräume)} \\ &\subseteq V. \end{aligned}$$

Damit gilt überall Gleichheit und insbesondere $\langle B_1 \rangle + \langle B_2 \rangle = V$.

Es bleibt $\langle B_1 \rangle \cap \langle B_2 \rangle = \{0\}$ zu zeigen. Nehmen wir also $v \in \langle B_1 \rangle \cap \langle B_2 \rangle$ an, d. h.

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i^1 = \sum_{i=1}^m \beta_i b_i^2$$

für geeignete endliche Teilmengen $\{b_1^1, \dots, b_n^1\} \subseteq B_1$ und $\{b_1^2, \dots, b_m^2\} \subseteq B_2$ und Koeffizienten α_i, β_i . Es folgt

$$0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i^1 + \sum_{i=1}^m (-\beta_i) b_i^2.$$

Da $B = B_1 \cup B_2$ eine Basis ist, ist auch die Teilmenge $\{b_1^1, \dots, b_n^1, b_1^2, \dots, b_m^2\}$ linear unabhängig. Daraus folgt $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = \beta_1 = \dots = \beta_m = 0$. Das heißt aber $v = 0$ und damit $\langle B_1 \rangle \cap \langle B_2 \rangle = \{0\}$.

¹⁸Zur Erinnerung, das heißt $B_1, B_2 \neq \emptyset, B = B_1 \cup B_2$ und $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, vgl. Definition 5.18. Hier wäre sogar $B_1 = \emptyset$ oder $B_2 = \emptyset$ erlaubt.

Aussage (ii): Es seien nun U_1, U_2 Unterräume von V mit Basen B_1, B_2 . Wir nehmen $V = U_1 \oplus U_2$ an. Wir müssen zeigen, dass $B_1 \cup B_2$ linear unabhängig ist und ganz V erzeugt. Letzteres folgt aus

$$\begin{aligned} \langle B_1 \cup B_2 \rangle &= \langle \langle B_1 \rangle \cup \langle B_2 \rangle \rangle && \text{nach Folgerung 12.15} \\ &= \langle U_1 \cup U_2 \rangle && \text{da } B_1 \text{ Basis von } U_1 \text{ und } B_2 \text{ Basis von } U_2 \text{ ist} \\ &= U_1 + U_2 && \text{nach Lemma 14.1 (lineare Hülle der Vereinigung zweier Unterräume)} \\ &= V && \text{nach Voraussetzung.} \end{aligned}$$

Es seien nun $\{b_1^1, \dots, b_n^1\} \subseteq B_1$ und $\{b_1^2, \dots, b_m^2\} \subseteq B_2$ endliche Teilmengen mit $n, m \in \mathbb{N}_0$. Wir betrachten die Linearkombination

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i b_i^1 + \sum_{i=1}^m \beta_i b_i^2 = 0 \quad \text{bzw.} \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i^1 = \sum_{i=1}^m (-\beta_i) b_i^2.$$

Die erste Linearkombination gehört zu U_1 , die zweite zu U_2 . Wegen $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ ist jede Linearkombination der Nullvektor. Da B_1 und B_2 Basen sind, gilt $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = \beta_1 = \dots = \beta_m = 0$. Das heißt, dass $B_1 \cup B_2$ in der Tat linear unabhängig ist. \square

Folgerung 14.9 (Existenz eines komplementären Unterraumes¹⁹).

Es seien V ein Vektorraum und U ein Unterraum von V . Dann existiert ein weiterer Unterraum W von V , sodass gilt: $V = U \oplus W$.

Beweis. Es sei B_U eine Basis von U . Aus dem **Basisergänzungssatz 13.11** folgt die Existenz einer Basis B von V mit $B_U \subseteq B$. Setzen wir $B_W := B \setminus B_U$ und $W := \langle B_W \rangle$, so ist W nach **Satz 14.8 (i)** ein Unterraum mit der gesuchten Eigenschaft. \square

Definition 14.10 (komplementärer Unterraum).

Es seien V ein Vektorraum und U ein Unterraum von V .

- (i) Ein Unterraum W von V heißt ein **zu U komplementärer Unterraum** (englisch: **complementary subspace**) oder ein **Komplement** (englisch: **complement**) von U in V , wenn $V = U \oplus W$ gilt.
- (ii) Die Dimension $\dim(W)$ eines zu U komplementären Unterraumes W heißt die **Kodimension** (englisch: **codimension**) von U in V , kurz: $\text{codim}(U)$. \triangle

Beachte: Komplementäre Unterräume eines Vektorraumes sind i. A. nicht eindeutig. Im Fall $U = V$ ist der einzige zu U komplementäre Unterraum der Nullraum $\{0\}$, und im Fall $U = \{0\}$ ist der einzige zu U komplementäre Unterraum der Raum V selbst.

Quizfrage 14.3: Was gilt für $\text{codim}(U)$ in einem endlich-dimensionalen Vektorraum?

Beispiel 14.11 (komplementärer Unterraum).

- (i) Jeder eindimensionale Unterraum W , der nicht identisch mit $U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ ist, ist ein Komplement von U in \mathbb{R}^2 .
- (ii) Die komplementären Unterräume des Unterraumes $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})_c$ der konvergenten Folgen im Vektorraum $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$, siehe **Beispiel 12.9**, haben keine einfache Darstellung. \triangle

¹⁹Dieses Resultat hängt im Fall, dass V unendlich-dimensional ist, vom Zornschen Lemma und damit vom Auswahlaxiom ab.

§ 14.2 SUMMEN VON FAMILIEN VON UNTERRÄUMEN

Wir beschäftigen uns abschließend noch mit Summen von einer beliebigen Anzahl von Unterräumen eines Vektorraumes.

Definition 14.12 (Summe einer Familie von Unterräumen).

Es seien V ein Vektorraum und $(U_i)_{i \in I}$ eine nichtleere Familie von Unterräumen von V .

(i) Der Unterraum

$$\sum_{i \in I} U_i := \left\langle \bigcup_{i \in I} U_i \right\rangle \tag{14.3}$$

heißt die **Summe der Familie von Unterräumen** $(U_i)_{i \in I}$ (englisch: **sum of a family of subspaces**). Im Fall $I = \llbracket 1, n \rrbracket$ schreiben wir auch $U_1 + \dots + U_n$ oder $\sum_{i=1}^n U_i$.

(ii) Die Summe heißt **direkt** (englisch: **direct sum**), wenn gilt:

$$U_j \cap \sum_{i \in I \setminus \{j\}} U_i = \{0\} \quad \text{für alle } j \in I. \tag{14.4}$$

Wir schreiben dann $\bigoplus_{i \in I} U_i$. Im Fall $I = \llbracket 1, n \rrbracket$ schreiben wir auch $U_1 \oplus \dots \oplus U_n$ oder $\bigoplus_{i=1}^n U_i$. \triangle

Beispiel 14.13 (Summe einer Familie von Unterräumen).

(i) Für den Standardvektorraum K^n über einem Körper K mit den Basisvektoren $e_i, i = 1, \dots, n \in \mathbb{N}$, siehe **Beispiel 13.9**, gilt

$$K^n = \bigoplus_{i=1}^n \langle e_i \rangle.$$

(ii) Für den Polynomraum $(K[t], +, \cdot)$ über einem Körper K mit der Basis $B = \{1, t, t^2, \dots\}$, siehe **Beispiel 13.21**, gilt

$$K[t] = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}_0} \langle t^i \rangle. \tag{\triangle}$$

Bemerkung 14.14 (Summe einer Familie von Unterräumen).

(i) Die Elemente der Summe einer Familie $(U_i)_{i \in I}$ von Unterräumen haben die Darstellung

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} U_i &= \bigcup_{i \in I_0} \left\{ \sum_{i \in I_0} U_i \mid I_0 \subseteq I \text{ ist eine endliche Teilfamilie} \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i \in I_0} u_i \mid I_0 \subseteq I \text{ ist eine endliche Teilfamilie und } u_i \in U_i \text{ für alle } i \in I_0 \right\}. \end{aligned} \tag{14.5}$$

(ii) Im Fall $\#I = 2$ stimmt die Bedingung (14.4), dass die Summe einer Familie von Unterräumen eine direkte Summe ist, überein mit **Definition 14.5**. Im Fall $\#I > 2$ reicht es jedoch für die Direktheit der Summe nicht aus, dass an Stelle von (14.4) nur paarweise $U_i \cap U_j = \{0\}$ für $i \neq j$ gefordert wird.

Betrachte zum Beispiel die Unterräume

$$U_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad U_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{und} \quad U_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Dann gilt $U_i \cap U_j = \{0\}$ für alle $i \neq j$, aber $U_1 \cap (U_2 + U_3) = U_1 \cap \mathbb{R}^2 \supsetneq \{0\}$. Das heißt, die Summe der Unterräume U_1, U_2, U_3 ist nicht direkt. \triangle

Satz 14.15 (Charakterisierung direkter Summen von Familien von Unterräumen, vgl. [Satz 14.7](#)).

Es seien V ein Vektorraum und $(U_i)_{i \in I}$ eine nichtleere Familie von Unterräumen von V . Dann sind äquivalent:

(i) $V = \bigoplus_{i \in I} U_i$.

(ii) Für alle $v \in V$ existiert eine endliche Teilfamilie $I_0 \subseteq I$ und Vektoren $u_i \in U_i$, sodass $v = \sum_{i \in I_0} u_i$ gilt, und diese Darstellung ist (bis auf die Summation von Nullvektoren) eindeutig.

Beweis. Der Beweis ist Gegenstand von [Hausaufgabe I-9.4](#). □

Satz 14.16 (direkte Summe von Unterräumen und Partitionierung einer Basis, vgl. [Satz 14.8](#)).

Es sei V ein Vektorraum. Dann gilt:

(i) Ist B eine Basis von V und $(B_i)_{i \in I}$ eine Partition von B mit nichtleerer Indexmenge I , dann gilt $V = \bigoplus_{i \in I} \langle B_i \rangle$.

(ii) Ist $(U_i)_{i \in I}$ eine nichtleere Familie von Unterräumen von V mit Basen B_i , $i \in I$, und gilt $V = \bigoplus_{i \in I} U_i$, so ist $\bigcup_{i \in I} B_i$ eine Basis von V .

Beweis. Der Beweis ist Gegenstand von [Hausaufgabe I-9.4](#). □

Ende der Vorlesung 19

Ende der Woche 9

Kapitel 4 Matrizen und lineare Abbildungen

§ 15 MATRIZEN

Literatur: Fischer, Springborn, 2020, Kapitel 3.7, Bosch, 2014, Kapitel 3, Deiser, 2022b, Kapitel 3.3, Jänich, 2008, Kapitel 4.2 und 5.1–5.5

Matrizen sind ein universelles Mittel zur Darstellung verschiedener Sachverhalte, beispielsweise in den Wirtschaftswissenschaften, in der Graphentheorie und zur Beschreibung linearer Abbildungen, das sind die Homomorphismen zwischen Vektorräumen. Diese Bedeutung von Matrizen stellen wir aber bis § 19 zurück und betrachten Matrizen zunächst als eigenständiges Thema.

Definition 15.1 (Matrix).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $m, n \in \mathbb{N}_0$.

- (i) Eine **Matrix der Dimension** $n \times m$ (englisch: **matrix**) oder eine $n \times m$ -**Matrix** A **über dem Körper** K ist eine endliche, doppelt indizierte Familie von Elementen aus K mit Indexmenge $\llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, m \rrbracket$. Wir schreiben sie in der Form¹

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}. \quad (15.1)$$

Die Menge aller $n \times m$ -Matrizen wird mit $K^{n \times m}$ bezeichnet.²

- (ii) Die Indizes $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, m \rrbracket$ mit der Eigenschaft $j - i = k \in \mathbb{Z}$ bilden die **k -te Diagonale** (englisch: **k -th diagonal**) der Matrix. Die 0-te Diagonale heißt auch die **Hauptdiagonale** (englisch: **main diagonal**), die anderen Diagonalen heißen die **Nebendiagonalen** (englisch: **off-diagonals**) der Matrix.
- (iii) Eine $n \times m$ -Matrix heißt eine **Diagonalmatrix** (englisch: **diagonal matrix**), wenn alle Einträge außerhalb der Hauptdiagonale gleich 0 sind.³
- (iv) Eine Matrix heißt **quadratisch** (englisch: **square matrix, quadratic matrix**), wenn $m = n$ gilt.
- (v) Die quadratische $n \times n$ -Diagonalmatrix

$$I_{n \times n} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \diagdown & & \\ 0 & & \diagdown & \\ & & & \diagdown \\ 0 & & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (15.2)$$

¹Alternativ können auch runde Klammern verwendet werden.

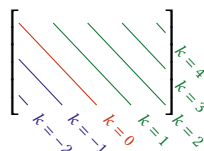
²Alternative Bezeichnungen sind $K^{n,m}$ oder $M_{n,m}(K)$.

³Man sagt auch, dass bei einer Diagonalmatrix die Nebendiagonalen „nicht besetzt“ sind, d. h., dass dort nur Nullen stehen.

heißt die $n \times n$ -**Einheitsmatrix** (englisch: **identity matrix**).⁴ Wir bezeichnen sie auch mit I_n oder einfach I , wenn die Dimension klar ist. \triangle

Beachte: Wir lassen explizit zu, dass eine oder beide Dimensionen gleich 0 sind. Das ist aus vielerlei Gründen praktisch. Eine Matrix der Dimension $n \times 0$ oder $0 \times m$ hat keine Elemente, aber dennoch ihre spezifische Form. Es gibt nur eine einzige Matrix der Dimension $n \times 0$ bzw. der Dimension $0 \times m$.

Wir illustrieren die Lage der **Hauptdiagonale**, der **oberen Nebendiagonalen** ($k > 0$) sowie der **unteren Nebendiagonalen** ($k < 0$) am Beispiel einer 3×5 -Matrix:



Matrizen werden häufig mit lateinischen Großbuchstaben bezeichnet und ihre Elemente mit den zugehörigen Kleinbuchstaben, zum Beispiel

$$A = (a_{ij})_{i=1, \dots, n, j=1, \dots, m} \quad \text{oder} \quad A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \quad (15.3)$$

oder einfach $A = (a_{ij})$, wenn die Dimension klar ist.⁵

Der erste Index (häufig i) heißt der **Zeilenindex** (englisch: **row index**). Die i -te **Zeile** (englisch: **row**) von $A = (a_{ij}) \in K^{n \times m}$ ist die (einfach indizierte) Familie bzw. der Zeilenvektor

$$a_{i\bullet} := (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im}) \in K_m, \quad (15.4)$$

vgl. **Beispiel 12.3**. Der zweite Index (häufig j) heißt der **Spaltenindex** (englisch: **column index**). Die j -te **Spalte** (englisch: **column**) von $A = (a_{ij}) \in K^{n \times m}$ ist die (einfach indizierte) Familie bzw. der Spaltenvektor

$$a_{\bullet j} := \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \in K^n, \quad (15.5)$$

vgl. nochmals **Beispiel 12.3**. Wir werden $1 \times m$ -Matrizen mit Zeilenvektoren und $n \times 1$ -Matrizen mit Spaltenvektoren identifizieren.

Auf der Menge $K^{n \times m}$ der $n \times m$ -Matrizen definieren wir komponentenweise die Addition und skalare Multiplikation (S-Multiplikation) wie folgt:

Definition 15.2 (Addition, skalare Multiplikation von Matrizen).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $m, n \in \mathbb{N}_0$. Auf der Menge der Matrizen $K^{n \times m}$ sind die innere Verknüpfung $+$: $K^{n \times m} \times K^{n \times m} \rightarrow K^{n \times m}$ (**Addition**⁶, englisch: **addition**) und die äußere Verknüpfung \cdot : $K \times K^{n \times m} \rightarrow K^{n \times m}$ (**skalare Multiplikation**⁷, englisch: **scalar multiplication**) erklärt:

$$(A + B)_{ij} := a_{ij} + b_{ij} \quad (15.6a)$$

$$(\alpha \cdot A)_{ij} := \alpha \cdot a_{ij} \quad (15.6b)$$

für $A, B \in K^{n \times m}$ und $\alpha \in K$. \triangle

⁴Alternative Bezeichnungen sind I_n oder id_n .

⁵Aus Gründen der Verdeutlichung schreiben wir manchmal auch $a_{i,j}$ an Stelle von a_{ij} .

⁶Die Bezeichnung ist dieselbe wie die der „Addition“ im Körper K .

⁷Auch hier ist die Bezeichnung dieselbe wie die der „Multiplikation“ im Körper K .

Wir werden das Zeichen \cdot für die skalare Multiplikation in der Regel weglassen, vgl. [Bemerkung 12.10](#).

Lemma 15.3 ($(K^{n \times m}, +, \cdot)$ ist ein Vektorraum).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $m, n \in \mathbb{N}_0$. Dann bilden die $n \times m$ -Matrizen mit den Verknüpfungen (15.6) einen Vektorraum über K . Dieser besitzt die Dimension nm , und die Matrizen

$$\{E_{11}, \dots, E_{nm}\} \text{ mit } E_{ij} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \uparrow j\text{-te Spalte} \end{matrix} = (\delta_{ik} \delta_{j\ell})_{k=1, \dots, n, \ell=1, \dots, m} \quad (15.7)$$

bilden eine Basis, genannt die **kanonische Basis** (englisch: **canonical basis**), **Standardbasis** (englisch: **standard basis**) oder **Einheitsbasis** (englisch: **unit basis**) von $K^{n \times m}$.

Beweis. Die Eigenschaften eines Vektorraumes ([Definition 12.1](#)) sind leicht nachzurechnen: $(K^{n \times m}, +)$ ist eine abelsche Gruppe, da $(K, +)$ eine abelsche Gruppe ist. Die Distributivgesetze der S-Multiplikation $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$ und $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ gelten wegen des Distributivgesetzes im Körper $(K, +, \cdot)$. Das gemischte Assoziativgesetz $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$ gilt wegen der Assoziativität der Multiplikation im Körper $(K, +, \cdot)$. Schließlich ist $1A = A$.

Die genannten Matrizen E_{ij} bilden nach [Satz 13.10](#) eine Basis, da jede beliebige Matrix $A \in K^{n \times m}$ auf eindeutige Weise als Linearkombination darstellbar ist, nämlich als

$$A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \underbrace{a_{ij}}_{\text{Koeffizient}} E_{ij}. \quad (15.8)$$

Die Dimension von $K^{n \times m}$ ergibt sich aus der Anzahl der Basiselemente. □

Bemerkung 15.4 (zum Vektorraum $K^{n \times m}$).

(i) Das neutrale Element bzgl. der Addition ist die **Nullmatrix** (englisch: **zero matrix**)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \text{---} & 0 \\ 0 & 0 & \text{---} & 0 \\ \vdots & \vdots & \diagdown & \vdots \\ 0 & 0 & \text{---} & 0 \end{bmatrix} \in K^{n \times m}.$$

(ii) Der Vektorraum der 1×1 -Matrizen über K ist ein eindimensionaler Vektorraum über K . Dieser kann identifiziert werden mit K selbst.

(iii) Die Vektorräume der $0 \times m$ - und der $n \times 0$ -Matrizen sind nulldimensionale Vektorräume über K . △

§ 15.1 MATRIX-MATRIX-MULTIPLIKATION

Für Matrizen passender Dimensionen können wir eine Matrix-Matrix-Multiplikation einführen. Diese ist von fundamentaler Bedeutung für den Umgang mit Matrizen.

Definition 15.5 (Matrix-Matrix-Multiplikation).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $m, n, \ell \in \mathbb{N}_0$. Für Matrizen ist die **Matrix-Matrix-Multiplikation** (englisch: **matrix-matrix multiplication**) oder kurz **Matrix-Multiplikation** (englisch: **matrix multiplication**) wie folgt definiert:

$$\cdot: K^{n \times m} \times K^{m \times \ell} \rightarrow K^{n \times \ell}, \quad (15.9a)$$

wobei für $A \in K^{n \times m}$, $B \in K^{m \times \ell}$ und $C := A \cdot B \in K^{n \times \ell}$ gilt:

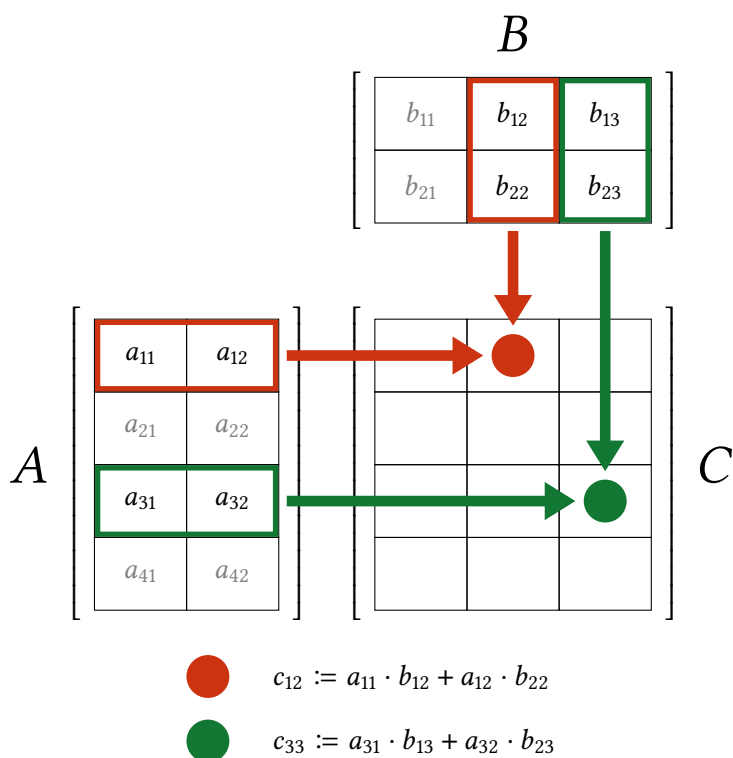
$$c_{ik} := \sum_{j=1}^m a_{ij} \cdot b_{jk} \quad \text{für } 1 \leq i \leq n \text{ und } 1 \leq k \leq \ell. \quad (15.9b)$$

△

Beachte: Die Summation verwendet die „Addition“ $+$ aus dem Körper K , und in jedem Summanden kommt die „Multiplikation“ \cdot aus K vor.

Beachte: Im Fall $m = 0$ sind die Summen in (15.9b) alle leer. Daher ist das Produkt einer $n \times 0$ - und einer $0 \times m$ -Matrix die $n \times m$ -Nullmatrix.

Den Fall der Matrix-Multiplikation einer 4×2 -Matrix A mit einer 2×3 -Matrix B können wir wie folgt grafisch darstellen:



Beispiel 15.6 (Matrix-Multiplikation).

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 0 \\ -3 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 8 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 5 + (-3) \cdot 0 & 1 \cdot 2 + (-3) \cdot (-2) & 1 \cdot (-4) + (-3) \cdot 8 \\ 2 \cdot 5 + 4 \cdot 0 & 2 \cdot 2 + 4 \cdot (-2) & 2 \cdot (-4) + 4 \cdot 8 \\ 5 \cdot 5 + 0 \cdot 0 & 5 \cdot 2 + 0 \cdot (-2) & 5 \cdot (-4) + 0 \cdot 8 \\ (-3) \cdot 5 + (-6) \cdot 0 & (-3) \cdot 2 + (-6) \cdot (-2) & (-3) \cdot (-4) + (-6) \cdot 8 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 5 & 8 & -28 \\ 10 & -4 & 24 \\ 25 & 10 & -20 \\ -15 & 6 & -36 \end{bmatrix}. \quad \triangle
 \end{aligned}$$

Bemerkung 15.7 (Matrix-Multiplikation).

- (i) $A \cdot B$ ist genau dann definiert, wenn die Anzahl der Spalten des linken Faktors A übereinstimmt mit der Anzahl der Zeilen des rechten Faktors B .
- (ii) Das Produkt $A \cdot B$ hat soviele Zeilen wie der linke Faktor A und soviele Spalten wie der rechte Faktor B . Die „mittlere Dimension“ ist nach der Bildung des Produkts $A \cdot B$ nicht mehr sichtbar.
- (iii) Der Eintrag

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^m a_{ij} \cdot b_{jk}$$

für Zeile i und Spalte k im Produkt $C = A \cdot B$ verwendet nur Informationen aus der i -ten Zeile $a_{i\bullet}$ des linken Faktors A und aus der k -ten Spalte $b_{\bullet k}$ des rechten Faktors B .

- (iv) Verantwortlich für die Position (i, k) im Ergebnis ist der Index i der Zeile des linken Faktors und der Index k der Spalte des rechten Faktors. △

Bei näherer Betrachtung ergibt sich zwei weitere Sichtweisen auf das Produkt $A \cdot B$:

- (1) Die Spalten von $C = A \cdot B$ sind Linearkombinationen der Spalten von A . Beispielsweise ist die k -te Spalte von C gerade

$$c_{\bullet k} = \sum_{j=1}^m \underbrace{a_{\bullet j}}_{j\text{-te Spalte}} \cdot \underbrace{b_{jk}}_{\text{Koeffizient}}$$

Die Koeffizienten der Linearkombination stehen dabei in der k -ten Spalte von B .

Im Beispiel oben ist die **erste Spalte** des Ergebnisses gerade die Linearkombination „5 mal die erste Spalte von A plus 0 mal die zweite Spalte von A “:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 0 \\ -3 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 & -28 \\ 10 & -4 & 24 \\ 25 & 10 & -20 \\ -15 & 6 & -36 \end{bmatrix}.$$

- (2) Die Zeilen von $C = A \cdot B$ sind Linearkombinationen der Zeilen von B . Beispielsweise ist die i -te Zeile von C gerade

$$c_{i\bullet} = \sum_{j=1}^m \underbrace{a_{ij}}_{\text{Koeffizient}} \cdot \underbrace{b_{j\bullet}}_{j\text{-te Zeile}}$$

Die Koeffizienten der Linearkombination stehen dabei in der i -ten Zeile von A .

Im Beispiel oben ist die **zweite Zeile** des Ergebnisses gerade die Linearkombination „2 mal die erste Zeile von B plus 4 mal die zweite Zeile von B “:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 0 \\ -3 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 & -28 \\ 10 & -4 & 24 \\ 25 & 10 & -20 \\ -15 & 6 & -36 \end{bmatrix}.$$

Lemma 15.8 (Eigenschaften der Matrix-Multiplikation).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $m, n, p, q \in \mathbb{N}_0$. Für Matrizen $A, A_1, A_2 \in K^{n \times m}$, $B, B_1, B_2 \in K^{m \times p}$, $C \in K^{p \times q}$ und Skalare $\alpha \in K$ gelten die folgenden Eigenschaften:

$$A \cdot (B_1 + B_2) = A \cdot B_1 + A \cdot B_2 \quad \text{Distributivgesetz}^8 \quad (15.10a)$$

$$(A_1 + A_2) \cdot B = A_1 \cdot B + A_2 \cdot B \quad \text{Distributivgesetz} \quad (15.10b)$$

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) \quad \text{Assoziativgesetz}^9 \quad (15.11)$$

$$A \cdot (\alpha \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B = \alpha \cdot (A \cdot B) \quad \text{Skalare können überall stehen} \quad (15.12)$$

$$I_n \cdot A = A \cdot I_m = A \quad \text{Neutralität der Einheitsmatrix} \quad (15.13)$$

Beweis. Wir führen den Nachweis durch Vergleich der Einträge der Matrizen:

$$\begin{aligned} [A \cdot (B_1 + B_2)]_{ik} &= \sum_{j=1}^m a_{ij} (b_1 + b_2)_{jk} = \sum_{j=1}^m a_{ij} (b_1)_{jk} + \sum_{j=1}^m a_{ij} (b_2)_{jk} \\ &= [A \cdot B_1]_{ik} + [A \cdot B_2]_{ik} = [A \cdot B_1 + A \cdot B_2]_{ik} \end{aligned}$$

zeigt (15.10a). Analog folgt (15.10b). Die Rechnung

$$\begin{aligned} [(A \cdot B) \cdot C]_{i\ell} &= \sum_{j=1}^p (A \cdot B)_{ij} c_{j\ell} = \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^m (a_{ik} b_{kj}) c_{j\ell} \\ &= \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^p a_{ik} (b_{kj} c_{j\ell}) = \sum_{k=1}^m a_{ik} [B \cdot C]_{k\ell} = [A \cdot (B \cdot C)]_{i\ell} \end{aligned}$$

zeigt (15.11). Weiter gilt

$$\begin{aligned} [A \cdot (\alpha \cdot B)]_{ik} &= \sum_{j=1}^m a_{ij} (\alpha \cdot B)_{jk} = \sum_{j=1}^m a_{ij} (\alpha b_{jk}) = \sum_{j=1}^m (\alpha a_{ij}) b_{jk} = [(\alpha \cdot A) \cdot B]_{ik} \\ &= \alpha \sum_{j=1}^m a_{ij} b_{jk} = \alpha [A \cdot B]_{ik}, \end{aligned}$$

⁸englisch: distributive law

⁹englisch: associative law

also (15.12). Schließlich haben wir

$$[I_n \cdot A]_{ik} = \sum_{j=1}^m (I_n)_{ij} a_{jk} = \sum_{j=1}^m \delta_{ij} a_{jk} = a_{ik}$$

und

$$[A \cdot I_m]_{ik} = \sum_{j=1}^m a_{ij} (I_m)_{jk} = \sum_{j=1}^m a_{ij} \delta_{jk} = a_{ik},$$

also (15.13). □

Auch bei der Matrix-Multiplikation werden wir in Zukunft das Multiplikationszeichen \cdot in der Regel weglassen.

Bemerkung 15.9 (Matrix-Vektor-Multiplikation).

Ein wichtiger Spezialfall der Matrix-Matrix-Multiplikation ist die **Matrix-Vektor-Multiplikation** (englisch: **matrix-vector multiplication**) Ax , wobei $A \in K^{n \times m}$ und $x \in K^m$ (aufgefasst als $m \times 1$ -Matrix) ist. Beispielsweise ist

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 0 \\ -3 & -6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Ein zweiter Spezialfall ist die **Vektor-Matrix-Multiplikation** (englisch: **vector-matrix multiplication**) yA , wobei $A \in K^{n \times m}$ und $y \in K_n$ (aufgefasst als $1 \times n$ -Matrix) ist. Beispielsweise gilt

$$(2 \ 0 \ 1 \ -1) \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 0 \\ -3 & -6 \end{bmatrix} = (10 \ 0). \quad \triangle$$

Ende der Vorlesung 20

§ 15.2 ZEILEN- UND SPALTENRAUM

Definition 15.10 (Zeilen- und Spaltenraum, Zeilen- und Spaltenrang).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}_0$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

- (i) Die lineare Hülle der Zeilenvektoren $a_{1\bullet}, \dots, a_{n\bullet} \in K_m$ heißt der **Zeilenraum** (englisch: **row space**) von A :

$$\text{ZR}(A) := \langle a_{1\bullet}, \dots, a_{n\bullet} \rangle \subseteq K_m. \quad (15.14a)$$

Die Dimension von $\text{ZR}(A)$ heißt der **Zeilenrang** von A (englisch: **row rank**), also

$$\text{ZRang}(A) := \dim(\text{ZR}(A)). \quad (15.14b)$$

- (ii) Die lineare Hülle der Spaltenvektoren $a_{\bullet 1}, \dots, a_{\bullet m} \in K^n$ heißt der **Spaltenraum** (englisch: **column space**) von A :

$$\text{SR}(A) := \langle a_{\bullet 1}, \dots, a_{\bullet m} \rangle \subseteq K^n. \quad (15.15a)$$

Die Dimension von $\text{SR}(A)$ heißt der **Spaltenrang** von A (englisch: **column rank**), also

$$\text{SRang}(A) := \dim(\text{SR}(A)). \quad (15.15b)$$

△

Beachte: Wir könnten äquivalent den Zeilenrang auch definieren als die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen von A und den Spaltenrang als die maximale Anzahl linear unabhängiger Spalten von A . (**Quizfrage 15.1:** Warum gilt das?)

Beispiel 15.11 (Zeilen- und Spaltenraum, Zeilen- und Spaltenrang).

Es sei

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 7 & 4 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{ZR}(A) &= \overbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle}^{\text{linear unabhängig}} \quad \text{mit } \text{ZRang}(A) = \dim(\text{ZR}(A)) = 2 \\ \text{und } \text{SR}(A) &= \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}_{\text{linear abhängig}} = \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle}_{\text{linear unabhängig}} \quad \text{mit } \text{SRang}(A) = \dim(\text{SR}(A)) = 2. \end{aligned}$$

△

Die hier beobachtete Übereinstimmung von Zeilen- und Spaltenrang ist kein Zufall:

Satz 15.12 (Zeilenrang gleich Spaltenrang).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}_0$ und $A \in K^{n \times m}$. Dann gilt

$$0 \leq \text{ZRang}(A) = \text{SRang}(A) \leq \min\{m, n\}. \quad (15.16)$$

Beweis. Schritt 1: Wir zeigen $\text{SRang}(A) \leq \text{ZRang}(A)$.

Es sei $r := \text{ZRang}(A) \in \mathbb{N}_0$ und $C \in K^{r \times m}$ eine Matrix, deren linear unabhängige Zeilen $c_{1\bullet}, \dots, c_{r\bullet} \in K_m$ eine Basis des Zeilenraumes $\text{ZR}(A)$ bilden, also $\langle c_{1\bullet}, \dots, c_{r\bullet} \rangle = \text{ZR}(A)$. Die i -te Zeile $a_{i\bullet}$ von A , die ja zu $\text{ZR}(A)$ gehört, ist also eine Linearkombination der Zeilen von C , sagen wir

$$a_{i\bullet} = b_{i1} c_{1\bullet} + \dots + b_{ir} c_{r\bullet}.$$

Da das Gesagte für jede Zeile von A gilt, erhalten wir die Darstellung

$$A = BC = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \dots & b_{ir} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{---} & c_{1\bullet} & \text{---} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{---} & c_{r\bullet} & \text{---} \end{bmatrix}$$

mit einer Koeffizientenmatrix $B \in K^{n \times r}$.

Wegen $Ax = B(Cx)$ für alle $x \in K^m$ ist jede Linearkombination der Spalten von A auch eine Linearkombination der Spalten von B , es gilt also

$$\begin{aligned} \text{SR}(A) &\subseteq \text{SR}(B) \\ \Rightarrow \text{SRang}(A) &\leq \text{SRang}(B) \leq r = \text{ZRang}(A) \quad \text{nach Folgerung 13.22.} \end{aligned}$$

Schritt 2: Wir zeigen $\text{ZRang}(A) \leq \text{SRang}(A)$.

Es sei nun $s := \text{SRang}(A) \in \mathbb{N}_0$ und $B \in K^{n \times s}$ eine Matrix, deren lineare unabhängige Spalten $b_{\bullet 1}, \dots, b_{\bullet s} \in K^n$ eine Basis des Spaltenraumes $\text{SR}(A)$ bilden, also $\langle b_{\bullet 1}, \dots, b_{\bullet s} \rangle = \text{SR}(A)$. Die j -te Spalte $a_{\bullet j}$ von A , die ja zu $\text{SR}(A)$ gehört, ist also eine Linearkombination der Spalten von B , sagen wir

$$a_{\bullet j} = b_{\bullet 1} c_{1j} + \dots + b_{\bullet s} c_{sj}.$$

Da das Gesagte für jede Spalte von A gilt, erhalten wir die Darstellung

$$A = BC = \begin{bmatrix} | & & | \\ b_{\bullet 1} & \cdots & b_{\bullet s} \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{s1} & \cdots & c_{sj} & \cdots & c_{sm} \end{bmatrix}$$

mit einer Koeffizientenmatrix $C \in K^{s \times m}$.

Wegen $yA = (yB)C$ für alle $y \in K_n$ ist jede Linearkombination der Zeilen von A auch eine Linearkombination der Zeilen von C , es gilt also

$$\begin{aligned} \text{ZR}(A) &\subseteq \text{ZR}(C) \\ \Rightarrow \text{ZRang}(A) &\leq \text{ZRang}(C) \leq s = \text{SRang}(A) \quad \text{nach Folgerung 13.22.} \end{aligned}$$

Der Beweis bis hierher zeigt $0 \leq \text{ZRang}(A) = \text{SRang}(A)$ für beliebige Matrizen $A \in K^{n \times m}$. Wegen $\text{ZRang}(A) \leq n$ und $\text{SRang}(A) \leq m$ folgt die Behauptung (15.16). \square

Da der Zeilenrang und Spaltenrang einer Matrix übereinstimmen, sprechen wir ab sofort nur noch vom **Rang** (englisch: **rank**), bezeichnet mit $\text{Rang}(A)$. Als direktes Resultat aus dem Beweis von Satz 15.12 halten wir fest:

Folgerung 15.13 (Rangfaktorisierung).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}_0$ und $A \in K^{n \times m}$. Ist $r = \text{Rang}(A) \in \mathbb{N}_0$, dann existieren Matrizen $B \in K^{n \times r}$ und $C \in K^{r \times m}$, sodass gilt:

$$A = BC. \tag{15.17}$$

Die Spalten von B bilden eine Basis von $\text{SR}(A)$. Die Zeilen von C bilden eine Basis von $\text{ZR}(A)$.

Eine solche Faktorisierung der Matrix A , bei der die inneren Dimensionen der Faktoren mit dem $\text{Rang}(A)$ übereinstimmt, heißt eine **Rangfaktorisierung** (englisch: **rank factorization**) von A .

Satz 15.14 (Rang des Produkts von Matrizen).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $m, n, \ell \in \mathbb{N}_0$. Für Matrizen $A \in K^{n \times m}$ und $B \in K^{m \times \ell}$ gilt:

$$0 \leq \text{Rang}(AB) \leq \min\{\text{Rang}(A), \text{Rang}(B)\} \leq \min\{\ell, m, n\}. \tag{15.18}$$

Beweis. Wir verwenden dieselbe Technik wie im Beweis von [Satz 15.12](#): Jede Linearkombination der Spalten von AB , also $ABx = A(Bx)$ mit Koeffizientenvektor $x \in K^\ell$, ist eine Linearkombination der Spalten von A . Also gilt $\text{SR}(AB) \subseteq \text{SR}(A)$ und somit $\text{Rang}(AB) = \text{SRang}(AB) \leq \text{SRang}(A) = \text{Rang}(A)$.

Außerdem ist jede Linearkombination der Zeilen von AB , also $yAB = (yA)B$ mit Koeffizientenvektor $y \in K_n$, eine Linearkombination der Zeilen von B . Also gilt $\text{ZR}(AB) \subseteq \text{ZR}(B)$ und somit $\text{Rang}(AB) = \text{ZRang}(AB) \leq \text{ZRang}(B) = \text{Rang}(B)$.

Die zweite Ungleichung folgt sofort aus $\text{Rang}(A) \leq \min\{m, n\}$ und $\text{Rang}(B) \leq \min\{\ell, m\}$, siehe [Satz 15.12](#). \square

§ 15.3 ZEILENSTUFENFORM

Wir geben in diesem Abschnitt eine konstruktive Möglichkeit an, eine Rangfaktorisierung einer Matrix A und damit auch den $\text{Rang}(A)$ zu bestimmen. Dazu bringen wir die Matrix A durch geschickte Umformungen auf eine Gestalt, aus der wir eine Basis von $\text{ZR}(A)$ und damit die Dimension von $\text{ZR}(A)$, also den Zeilenrang von A , ablesen können.

Definition 15.15 (elementare Zeilenumformungen, Elementarmatrizen).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}_0$ und

$$A = \begin{bmatrix} \text{---} & a_{1\bullet} & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & a_{i\bullet} & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & a_{n\bullet} & \text{---} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}.$$

Unter **elementaren Zeilenumformungen** (englisch: **elementary row operations**) versteht man die folgenden Operationen, angewendet auf die Matrix A :

Typ I: Multiplikation der i -ten Zeile mit einem Skalar $\alpha \in K \setminus \{0\}$, d. h., Multiplikation der Matrix A von links mit der $n \times n$ -Diagonalmatrix

$$D := \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \alpha & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix} = I + (\alpha - 1) E_{ii}. \quad (15.19)$$

Es gilt (nur die Änderungen gegenüber A werden hervorgehoben)

$$DA = \begin{bmatrix} \text{---} & \vdots & \text{---} \\ \text{---} & \alpha a_{i\bullet} & \text{---} \\ \text{---} & \vdots & \text{---} \end{bmatrix}.$$

Typ II: Addition des α -Fachen der j -ten Zeile zur i -ten Zeile ($i \neq j$) mit einem Skalar $\alpha \in K$, d. h., Multiplikation der Matrix A von links mit der $n \times n$ -Matrix¹⁰

$$S := \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \alpha & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix} = I + \alpha E_{ij}. \tag{15.20}$$

Es gilt

$$SA = \begin{bmatrix} \vdots & & \\ \vdots & a_{j\bullet} & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & a_{i\bullet} + \alpha a_{j\bullet} & \vdots \\ \vdots & & \vdots \end{bmatrix}.$$

Typ III: Vertauschen der i -ten mit der j -ten Zeile ($i \neq j$), d. h. Multiplikation der Matrix A von links mit der $n \times n$ -Matrix

$$T := \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & 1 \\ & & & \ddots & \\ & & 1 & & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} = I - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}. \tag{15.21}$$

Es gilt

$$TA = \begin{bmatrix} \vdots & & \\ \vdots & a_{j\bullet} & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & a_{i\bullet} & \vdots \\ \vdots & & \vdots \end{bmatrix}.$$

Die Matrizen D , S und T heißen **Elementarmatrizen** (englisch: **elementary matrices**) vom Typ I, Typ II bzw. Typ III. Die Matrizen T (Typ III) heißen genauer auch **Transpositionsmatrizen** (englisch: **transposition matrices**) △

Lemma 15.16 (elementare Zeilenumformungen ändern den Zeilenraum und den Zeilenrang nicht).
 Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $m, n \in \mathbb{N}_0$. Entsteht die Matrix $C \in K^{n \times m}$ aus $A \in K^{n \times m}$ durch elementare Zeilenumformungen, dann gilt $\text{ZR}(C) = \text{ZR}(A)$, also auch $\text{Rang}(C) = \text{Rang}(A)$.

¹⁰Die Illustration zeigt den Fall $i > j$.

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass sich durch eine einzelne elementare Zeilenumformung der Zeilenraum der Matrix nicht ändert.

Typ I: Für $\alpha \in K \setminus \{0\}$ gilt offensichtlich

$$\langle a_{1\bullet}, \dots, a_{n\bullet} \rangle = \langle a_{1\bullet}, \dots, a_{i-1\bullet}, \alpha a_{i\bullet}, a_{i+1\bullet}, \dots, a_{n\bullet} \rangle.$$

Typ II: Auch in diesem Fall haben wir

$$\langle a_{1\bullet}, \dots, a_{n\bullet} \rangle = \langle a_{1\bullet}, \dots, a_{i-1\bullet}, a_{i\bullet} + \alpha a_{j\bullet}, a_{i+1\bullet}, \dots, a_{n\bullet} \rangle.$$

Quizfrage 15.2: Wie rechnen sich die Koeffizienten einer Linearkombination der Vektoren um?

Typ III: Offenbar ändert die Reihenfolge der Vektoren nicht das Resultat von

$$\langle a_{1\bullet}, \dots, a_{n\bullet} \rangle. \quad \square$$

Die gewünschte Gestalt, aus der man den Zeilenrang und eine Basis des Zeilenraumes einer Matrix gut ablesen kann, ist die folgende:

Definition 15.17 (Zeilenstufenform).

Eine Matrix $A \in K^{n \times m}$ heißt in **Zeilenstufenform** (englisch: **row echelon form**), wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (i) Es gibt eine Zahl $r \in \llbracket 0, n \rrbracket$, sodass die Zeilen $a_{1\bullet}, \dots, a_{r\bullet}$ keine Nullzeilen sind und die Zeilen $a_{r+1\bullet}, \dots, a_{n\bullet}$ sämtlich Nullzeilen sind.
- (ii) Bezeichnet $j_i := \min\{j \in \llbracket 1, m \rrbracket \mid a_{ij} \neq 0\}$ den niedrigsten Spaltenindex in Zeile $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, in der ein Eintrag ungleich 0 steht, dann gilt die **Stufenbedingung** (englisch: **echelon condition**) $j_1 < j_2 < \dots < j_r$.

Die Elemente $a_{1j_1}, \dots, a_{rj_r}$ heißen die **Pivot-Elemente** (englisch: **pivot elements**) der Zeilenstufenform. \triangle

Bemerkung 15.18 (zur Zeilenstufenform).

- (i) Die Stufenbedingung bedeutet, dass sowohl links als auch unterhalb von Pivot-Elementen nur Nullen stehen können. Die Pivot-Elemente rücken von Zeile zu Zeile weiter nach rechts und können dabei auch Spalten überspringen.
- (ii) Die Lage der Pivot-Elemente in einer Zeilenstufenform einer Matrix ist durch die Ausgangsmatrix eindeutig festgelegt. Die gesamte Zeilenstufenform an sich ist aber i. A. nicht eindeutig, da wir Nicht-Nullzeilen mit Skalaren aus $K \setminus \{0\}$ durchmultiplizieren können. Außerdem können wir zu einer Zeile ein Vielfaches einer weiter unten stehenden Zeile addieren, ohne die Zeilenstufenform zu stören. \triangle

Beispiel 15.19 (Zeilenstufenform).

Hier sind die Besetzungsmuster einiger 3×4 -Matrizen in Zeilenstufenform, wobei \star jeweils für einen Eintrag ungleich 0 steht (die Pivot-Elemente) und $?$ für einen beliebigen Eintrag aus dem Körper K .

$$\begin{array}{l}
 j_1 = 1 \rightarrow \begin{bmatrix} \star & ? & ? & ? \\ 0 & \star & ? & ? \\ 0 & 0 & \star & ? \end{bmatrix} \\
 j_2 = 2 \rightarrow \\
 j_3 = 3 \rightarrow \\
 r = 3
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 j_1 = 1 \rightarrow \begin{bmatrix} \star & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & \star & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 j_2 = 3 \rightarrow \\
 r = 2
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 j_1 = 3 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & \star & ? \\ 0 & 0 & 0 & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 j_2 = 4 \rightarrow \\
 r = 2
 \end{array}
 \quad \triangle$$

Wir geben nun einen Algorithmus an, der eine gegebene Matrix $A \in K^{n \times m}$ durch elementare Zeilenumformungen in eine Matrix $C \in K^{n \times m}$ in Zeilenstufenform überführt. Die Idee des Verfahrens ist folgende:

- (1) Finde eines der am weitesten links stehenden Elemente in der Matrix. Der Spaltenindex sei j_1 . Bringe es durch Zeilentausch (elementare Zeilenumformung vom Typ III) an die Position $(1, j_1)$.
- (2) Erzeuge in der Spalte j_1 unterhalb der Position $(1, j_1)$ Nullen durch Addition geeigneter Vielfacher der Zeile 1 zur entsprechenden Zeile 2 bis n (elementare Zeilenumformungen vom Typ II).
- (3) Wiederhole die obigen Schritte mit der unteren rechten Teilmatrix ab Zeile 2 und ab Spalte $j_1 + 1$.

Das vollständige Verfahren kann wie folgt angegeben werden:

Algorithmus 15.20 (Erzeugen der Zeilenstufenform).

Eingabe: Matrix $A \in K^{n \times m}$

Ausgabe: Matrix $C \in K^{n \times m}$ in Zeilenstufenform mit $ZR(A) = ZR(C)$ // Die ersten r Zeilen von C bilden eine Basis von $ZR(A)$.

Ausgabe: $r = \text{Rang}(A) = \text{Rang}(C)$

- 1: Setze $C \leftarrow A$
- 2: Setze $r \leftarrow 0$ // bisher festgestellter Rang
- 3: Setze $j_0 \leftarrow 0$ // Spalte des letzten Pivot-Elements
- 4: **while** $r < n$ und $j_r < m$ und die Restmatrix $(C)_{r+1 \leq i \leq n, j_r+1 \leq j \leq m}$ ist nicht die Nullmatrix **do**
- 5: Setze $j \leftarrow \min\{j_r + 1 \leq j \leq m \mid (C)_{r+1 \leq i \leq n, j}\}$ // erste Nicht-Nullspalte der Restmatrix
- 6: Setze $i \leftarrow \min\{r + 1 \leq i \leq n \mid c_{ij} \neq 0\}$ // erster Nicht-Nulleintrag in dieser Spalte
- 7: Setze $r \leftarrow r + 1$ // festgestellter Rang erhöht sich
- 8: Setze $j_r \leftarrow j$ // Spalte des neuen Pivot-Elements
- 9: Tausche in der Matrix C die Zeilen i und r // Pivot-Element kommt nach oben (Typ III)
- 10: **for** $i = r + 1, \dots, m$ **do**
- 11: Setze $c_{i\bullet} \leftarrow c_{i\bullet} - \frac{c_{ij}}{c_{rj}} c_{r\bullet}$ // erzeuge eine Null unterhalb des Pivot-Elements (r, j) (Typ II)
- 12: **end for**
- 13: **end while**
- 14: **return** C und r // C ist eine Zeilenstufenform von A und $r = \text{Rang}(A)$

Mit Hilfe von **Algorithmus 15.20** können wir folgenden Satz konstruktiv beweisen:

Satz 15.21 (Erreichbarkeit der Zeilenstufenform).

Jede Matrix $A \in K^{n \times m}$ lässt sich durch elementare Zeilenumformungen in eine Matrix $C \in K^{n \times m}$ in Zeilenstufenform überführen. Es sei $r \in \llbracket 0, m \rrbracket$ die Anzahl der Nicht-Nullzeilen in C . Dann bilden die Zeilenvektoren $c_{1\bullet}, \dots, c_{r\bullet}$ eine Basis von $ZR(A) = ZR(C)$. Für den Rang gilt $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(C) = r$.

Beispiel 15.22 (Erreichbarkeit der Zeilenstufenform).

Wir betrachten ein Beispiel in $\mathbb{R}^{3 \times 4}$:

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 & \star 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{Tauschen der Zeilen 1 und 2} \\
 \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array} \begin{bmatrix} 0 & \star 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 & \star 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \star 3 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Erzeugen von Nullen unterhalb des Pivot-Elements} \\ \text{Addition des } (-3)\text{-Fachen der Zeile 1 zur Zeile 3} \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \curvearrowright 2 \end{array}
 \begin{bmatrix} 0 & \star 1 & \star 2 & 0 \\ 0 & 0 & \star 3 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \end{bmatrix}
 \rightsquigarrow
 \begin{bmatrix} 0 & \star 1 & \star 2 & 0 \\ 0 & 0 & \star 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Erzeugen von Nullen unterhalb des Pivot-Elements
Addition des 2-Fachen der Zeile 2 zur Zeile 3.

Die Zeilenstufenform ist erreicht. Der Zeilenraum von A ist also

$$\text{ZR}(A) = \langle (0 \ 1 \ 2 \ 0), (0 \ 0 \ 3 \ -1) \rangle \quad \text{mit } \dim(\text{ZR}(A)) = \text{Rang}(A) = 2. \quad \triangle$$

Bemerkung 15.23 (Berechnung einer Rangfaktorisierung).

Wir hatten eingangs des Abschnitts angekündigt, eine konstruktive Möglichkeit anzugeben, eine Rangfaktorisierung $A = BC$ einer Matrix $A \in K^{n \times m}$ zu bestimmen, sodass also $B \in K^{n \times r}$, $C \in K^{r \times m}$ und $r = \text{Rang}(A)$ gilt. Tatsächlich erhalten wir aus der besprochenen Zeilenstufenform C den gesuchten rechten Faktor. Dazu müssen wir lediglich in C eventuell vorhandene Nullzeilen streichen; die resultierende Matrix sei $\bar{C} \in K^{r \times m}$. Wie aber kommen wir an den linken Faktor B ?

Die Zeilenstufenform entstand durch Multiplikation mit Elementarmatrizen $E_j \in K^{n \times n}$:

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = C. \quad (15.22)$$

Wenn es gelänge, die Multiplikationen durch geeignete Matrizen $E'_j \in K^{n \times n}$ rückgängig zu machen, wobei also $E'_j E_j = I_n$ gelten soll¹¹, dann bekämen wir die Darstellung

$$E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A = C \quad \Rightarrow \quad E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A = E'_k C \quad \Rightarrow \quad \cdots \quad \Rightarrow \quad A = E'_1 E'_2 \cdots E'_k C.$$

In der Tat ist das möglich (**Hausaufgabe I-10.3**). Setzen wir nun zur Abkürzung $B := E'_1 E'_2 \cdots E'_k$, so erhalten wir die Faktorisierung

$$A = \underbrace{n \begin{bmatrix} \bar{B} & \phantom{\bar{B}} \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{C} \\ 0 \end{bmatrix}}_C$$

Da bei der Bildung des Matrix-Produkts $A = BC$ die letzten $n - r$ Spalten von B immer nur mit Nullkoeffizienten multipliziert werden, können wir, ohne das Ergebnis zu ändern, den rechten Faktor C durch seine oberen r Zeilen \bar{C} und den linken Faktor B durch seine linken r Spalten \bar{B} ersetzen. So erhalten wir die gewünschte Rangfaktorisierung

$$A = \bar{B} \bar{C}$$

mit $\bar{B} \in K^{n \times r}$ und $\bar{C} \in K^{r \times m}$. (**Quizfrage 15.3**: Wie müsste **Algorithmus 15.20** ergänzt werden, damit wir als Ergebnis die Faktorisierung $A = BC$ erhalten, aus der dann durch Streichen von Spalten bzw. Zeilen die Rangfaktorisierung $A = \bar{B} \bar{C}$ folgt?) \triangle

§ 15.4 TRANSPOSITION VON MATRIZEN

Definition 15.24 (Transposition).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}_0$ und $A \in K^{n \times m}$. Die Matrix $A^T \in K^{m \times n}$, definiert durch $(A^T)_{ij} = (A)_{ji}$ für $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ und $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, heißt die zu A **transponierte Matrix** (englisch: **transposed matrix**) oder kurz die **Transponierte** zu A . \triangle

¹¹Später (**Definition 15.36**) werden wir solche Matrizen **invertierbar** nennen.

Die transponierte Matrix A^T entsteht aus A durch Spiegelung an der Hauptdiagonalen. Dadurch werden die Zeilen zu Spalten und die Spalten zu Zeilen. Die zu A transponierte Matrix hat die Darstellung

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}. \quad (15.23)$$

Beispiel 15.25 (transponierte Matrix).

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 7 & 4 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 8 & 0 & -1 \\ -5 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}. \quad \Delta$$

Lemma 15.26 (Rechenregeln für Transponierte).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $m, n, \ell \in \mathbb{N}_0$. Für Matrizen $A, B \in K^{n \times m}$ und $C \in K^{m \times \ell}$ und Skalare $\alpha \in K$ gelten die folgenden Eigenschaften:

$$(A^T)^T = A \quad \text{Transposition ist involutorisch} \quad (15.24)$$

$$(A + B)^T = A^T + B^T \quad \text{Transposition ist linear}^{12} \quad (15.25a)$$

$$(\alpha A)^T = \alpha A^T \quad \text{Transposition ist linear} \quad (15.25b)$$

$$(AC)^T = C^T A^T \quad (15.26)$$

Beweis. (15.24), (15.25a) und (15.25b) sind offensichtlich. Für (15.26) betrachten wir

$$\begin{aligned} [(AC)^T]_{ik} &= [AC]_{ki} = \sum_{j=1}^m a_{kj} c_{ji} = \sum_{j=1}^m c_{ji} a_{kj} \\ &= \sum_{j=1}^m [C^T]_{ij} [A^T]_{jk} = [C^T A^T]_{ik}. \end{aligned} \quad \square$$

Lemma 15.27 (Rang der transponierten Matrix).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}_0$ und $A \in K^{n \times m}$. Dann gilt $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A^T)$.

Beweis. Es sei $A = BC$ eine Rangfaktorisierung (Folgerung 15.13), also gilt $B \in K^{n \times r}$ und $C \in K^{r \times m}$ mit $r = \text{Rang}(A)$. Aufgrund von (15.26) gilt $A^T = C^T B^T$. Aus Satz 15.14 und Satz 15.12 folgt $\text{Rang}(A^T) \leq \min\{\text{Rang}(B^T), \text{Rang}(C^T)\} \leq \min\{m, n, r\} \leq r = \text{Rang}(A)$.

Führen wir dasselbe Argument nochmal mit einer Rangfaktorisierung $A^T = \widehat{B}\widehat{C}$ mit $\widehat{B} \in K^{m \times s}$ und $\widehat{C} \in K^{s \times n}$ und $s = \text{Rang}(A^T)$ durch, so ergibt sich unter Beachtung von (15.24) genauso auch $\text{Rang}(A) \leq \min\{m, n, s\} \leq s = \text{Rang}(A^T)$, zusammen also $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A^T)$. \square

Definition 15.28 (symmetrische und antisymmetrische Matrizen).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}_0$ und $A \in K^{n \times n}$.

(i) A heißt **symmetrisch** (englisch: **symmetric matrix**), wenn $A = A^T$ gilt.

¹²Die Sprechweise, dass die Transposition eine lineare Abbildung sei, wird in § 17 klar werden.

(ii) A heißt **antisymmetrisch** (englisch: **antisymmetric matrix**) oder **schiefssymmetrisch** (englisch: **skew-symmetric matrix**), wenn $A = -A^T$ gilt.

Die Menge der symmetrischen bzw. schiefssymmetrischen $n \times n$ -Matrizen bezeichnen wir mit $K_{\text{sym}}^{n \times n}$ bzw. $K_{\text{skew}}^{n \times n}$. △

Lemma 15.29 (symmetrische und antisymmetrische Anteile quadratischer Matrizen).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper der Charakteristik $\text{char}(K) \neq 2$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann sind $K_{\text{sym}}^{n \times n}$ und $K_{\text{skew}}^{n \times n}$ Unterräume von $K^{n \times n}$ der Dimensionen

$$\dim(K_{\text{sym}}^{n \times n}) = \frac{1}{2}n(n+1) \quad (15.27a)$$

$$\dim(K_{\text{skew}}^{n \times n}) = \frac{1}{2}n(n-1). \quad (15.27b)$$

Es gilt

$$K^{n \times n} = K_{\text{sym}}^{n \times n} \oplus K_{\text{skew}}^{n \times n}. \quad (15.28)$$

Quizfrage 15.4: Was gilt im Körper \mathbb{Z}_2 der Charakteristik $\text{char}(K) = 2$?

Beweis. Der Beweis ist Gegenstand von [Hausaufgabe I-10.4](#). □

Ende der Vorlesung 21

Ende der Woche 10

§ 15.5 DER RING QUADRATISCHER MATRIZEN

Die Menge der quadratischen Matrizen $K^{n \times n}$ ist bzgl. der Matrix-Multiplikation abgeschlossen. Zusammen mit der Matrix-Addition ergibt sich eine Ringstruktur $(K^{n \times n}, +, \cdot)$:

Lemma 15.30 (quadratische Matrizen bilden einen nicht-kommutativen Ring mit Eins).

Für $n \in \mathbb{N}_0$ bilden die quadratischen $n \times n$ -Matrizen mit der Matrixaddition (15.6a) und der Matrix-Multiplikation (15.9) einen Ring mit dem Einselement I_n . Dieser Ring $(K^{n \times n}, +, \cdot)$ heißt **Matrixring** oder **Matrizenring** (englisch: **matrix ring**) der Größe $n \times n$ über dem Körper K . Im Fall $n \geq 2$ ist dieser Ring nicht kommutativ.

Beweis. Wir prüfen die [Definition 9.1](#) nach. $(K^{n \times n}, +)$ ist eine abelsche Gruppe, da $(K^{n \times n}, +, \cdot)$ (mit der S-Multiplikation \cdot) ein Vektorraum ist ([Lemma 15.3](#)). Mit der Matrix-Multiplikation \cdot bildet $(K^{n \times n}, \cdot)$ eine Halbgruppe, da \cdot nach [Lemma 15.8](#) assoziativ ist. Die Distributivgesetze

$$\begin{aligned} A \cdot (B_1 + B_2) &= A \cdot B_1 + A \cdot B_2 \\ (A_1 + A_2) \cdot B &= A_1 \cdot B + A_2 \cdot B \end{aligned}$$

und die Neutralität der Einheitsmatrix I_n wurden ebenfalls in [Lemma 15.8](#) gezeigt.

Die Nicht-Kommutativität für $n \geq 2$ sehen wir am Beispiel

$$\begin{aligned}
 E_{11} \cdot E_{12} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} = E_{12} \\
 E_{12} \cdot E_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} = 0,
 \end{aligned}$$

das für beliebige Körper K gültig ist. □

Der Ring der quadratischen Matrizen $K^{n \times n}$ enthält neben den Diagonalmatrizen noch einige erwähnenswerte Teilmengen. Um Dreiecksmatrizen von strikten Dreiecksmatrizen unterscheiden zu können, schließen wir für die folgenden Resultate die 0×0 -Matrizen aus.

Definition 15.31 (obere und untere Dreiecksmatrix).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ heißt

- (i) eine **obere Dreiecksmatrix** (englisch: *upper triangular matrix*), wenn $a_{ij} = 0$ für alle $i > j$ gilt.
- (ii) eine **strikte obere Dreiecksmatrix** (englisch: *strictly upper triangular matrix*), wenn $a_{ij} = 0$ für alle $i \geq j$ gilt.
- (iii) eine **untere Dreiecksmatrix** (englisch: *lower triangular matrix*), wenn $a_{ij} = 0$ für alle $i < j$ gilt.
- (iv) eine **strikte untere Dreiecksmatrix** (englisch: *strictly lower triangular matrix*), wenn $a_{ij} = 0$ für alle $i \leq j$ gilt.
- (v) **nilpotent** (englisch: *nilpotent*), wenn es ein $k \in \mathbb{N}_0$ gibt mit der Eigenschaft $A^k = 0$.

Hier gilt für die Indizes jeweils $1 \leq i, j \leq n$. △

Wir bezeichnen die Menge der Diagonalmatrizen der Dimension $n \times n$ auch mit $K_{\diagdown}^{n \times n}$ und die Menge der oberen bzw. unteren Dreiecksmatrizen mit $K_{\diagup}^{n \times n}$ bzw. $K_{\diagdown}^{n \times n}$. Es gilt

$$K_{\diagdown}^{n \times n} = K_{\diagup}^{n \times n} \cap K_{\diagdown}^{n \times n}.$$

Beispiel 15.32 (obere und untere Dreiecksmatrix).

(i)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

ist eine obere Dreiecksmatrix, aber keine strikte obere Dreiecksmatrix.

(ii)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ist eine strikte untere Dreiecksmatrix.

(iii)

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

ist eine nilpotente Matrix,¹³ denn es gilt

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \triangle$$

Lemma 15.33 (strikte Dreiecksmatrizen sind nilpotent).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Für jede strikte obere und jede strikte untere Dreiecksmatrix $A \in K^{n \times n}$ gilt $A^n = 0$.

Beweis. Der Beweis ist Gegenstand von [Hausaufgabe I-11.1](#). □

Beispiel 15.34 (strikte Dreiecksmatrizen sind nilpotent).

Für

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

gilt

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad A^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \triangle$$

Lemma 15.35 (obere und untere Dreiecksmatrizen bilden Unterringe).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

- (i) $K^{\searrow n}$, $K_{\swarrow}^{n \times n}$ und $K_{\swarrow \searrow}^{n \times n}$ bilden jeweils einen Unterring mit Eins ([Definition 9.10](#)) von $K^{n \times n}$. $K^{\searrow n}$ ist sogar kommutativ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- (ii) Die strikten oberen und strikten unteren Dreiecksmatrizen bilden einen Unterring (aber keinen Unterring mit Eins) von $K^{n \times n}$. Im Fall $n = 1$ ist das der Nullring.

Beweis. **Aussage (i):** Nach [Definition 9.10](#) ist zu zeigen, dass die jeweilige Teilmenge mit der Addition eine Untergruppe von $(K^{n \times n}, +)$ bildet, dass sie bzgl. der Matrix-Multiplikation abgeschlossen ist und das Einselement (die Einheitsmatrix I_n) enthält.

Wir führen den Beweis nur für den Fall $K_{\swarrow}^{n \times n}$ aus. Sind $A, B \in K_{\swarrow}^{n \times n}$, dann ist auch $-B \in K_{\swarrow}^{n \times n}$ und damit $A - B \in K_{\swarrow}^{n \times n}$. Aus dem Untergruppenkriterium ([Satz 7.33](#)) folgt, dass $(K_{\swarrow}^{n \times n}, +)$ eine Untergruppe

¹³Quelle: https://en.wikipedia.org/wiki/Nilpotent_matrix#Example_5, genutzt unter der Lizenz CC-BY-SA 4.0

von $(K^{n \times n}, +)$ ist. Da $I_n \in (K_{\surd}^{n \times n}, +)$ klar ist, bleibt nur zu zeigen, dass das Matrix-Produkt $A \cdot B$ von zwei Matrizen $A, B \in K_{\surd}^{n \times n}$ wieder in $K_{\surd}^{n \times n}$ liegt. Für Indizes $1 \leq k < i \leq n$ gilt

$$[A \cdot B]_{ik} = \sum_{j=1}^n \underbrace{a_{ij}}_{=0 \text{ für } j < i} \underbrace{b_{jk}}_{=0 \text{ für } j > k} = 0,$$

da alle Summanden gleich Null sind, also ist tatsächlich $A \cdot B$ wieder eine obere Dreiecksmatrix.

Aussage (ii): Der Beweis der Unterring-Eigenschaft geht genauso wie in **Aussage (i)**. Da I_n keine strikte Dreiecksmatrix ist, handelt es sich nicht um einen Unterring mit Eins¹⁴ von $K^{n \times n}$. \square

§ 15.6 INVERTIERBARE MATRIZEN

Wir interessieren uns nun für die bzgl. der Matrix-Multiplikation invertierbaren Elemente im Ring der quadratischen Matrizen, also für die Einheitengruppe (**Beispiel 7.16**) des Monoids $(K^{n \times n}, \cdot)$.

Definition 15.36 (invertierbare Matrix).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}_0$.

- (i) Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ heißt **invertierbar** (englisch: **invertible matrix**) oder **regulär** (englisch: **non-singular matrix**), wenn sie ein invertierbares Element (**Definition 7.11**) des Monoids $(K^{n \times n}, \cdot)$ ist. Das heißt, es gibt eine Matrix $B \in K^{n \times n}$ mit der Eigenschaft

$$AB = I \quad \text{und} \quad BA = I. \tag{15.29}$$

In diesem Fall heißt B die zu A **inverse Matrix** (englisch: **inverse matrix**) oder kurz die **Inverse** (englisch: **inverse**) von A , in Symbolen: $B = A^{-1}$.

- (ii) Andernfalls heißt A **nicht invertierbar** (englisch: **non-invertible matrix**) oder **singulär** (englisch: **singular matrix**).
- (iii) Die Menge der invertierbaren Matrizen in $K^{n \times n}$, also die Einheitengruppe des Monoids $(K^{n \times n}, \cdot)$, heißt die **allgemeine lineare Gruppe** (englisch: **general linear group**) **vom Grad n über dem Körper K** , in Symbolen

$$GL(n, K) := \{A \in K^{n \times n} \mid A \text{ ist invertierbar}\}. \tag{15.30}$$

\triangle

Beachte: B ist Inverse von A genau dann, wenn A Inverse von B ist. Wie in jedem Monoid ist das neutrale Element, also die Einheitsmatrix I , immer invertierbar und selbstinvers.

Beispiel 15.37 (invertierbare Matrix).

Die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

¹⁴Im Fall $n = 1$ besteht der Unterring nur aus der Nullmatrix, ist also der Nullring. Der Nullring hat zwar 0 als Einselement (**Beispiel 9.2**), dieses ist aber verschieden von der 1×1 -Einheitsmatrix, daher handelt es sich auch in diesem Fall nicht um einen Unterring mit Eins im Sinne von **Definition 9.10**.

ist invertierbar, denn es gilt

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{17} \begin{bmatrix} 3 & 7 & 0 \\ 1 & -9 & 17 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{1}{17} \begin{bmatrix} 3 & 7 & 0 \\ 1 & -9 & 17 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad \Delta$$

Satz 15.38 (Rechenregeln für Inverse, vgl. Satz 7.17).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}_0$ sowie $A, B, B_1, B_2 \in K^{n \times n}$.

(i) Ist A invertierbar, dann gelten die **Kürzungsregeln**

$$A B_1 = A B_2 \quad \Rightarrow \quad B_1 = B_2 \quad (15.31a)$$

$$B_1 A = B_2 A \quad \Rightarrow \quad B_1 = B_2. \quad (15.31b)$$

(ii) Die Invertierung ist **involutorisch**, d. h., für invertierbares A gilt

$$(A^{-1})^{-1} = A. \quad (15.32)$$

(iii) Sind A und B invertierbar, dann auch AB , und es gilt

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}. \quad (15.33)$$

(iv) Ist A invertierbar, dann auch A^T , und es gilt

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T. \quad (15.34)$$

Aus diesem Grund können wir statt $(A^T)^{-1}$ auch einfach A^{-T} schreiben.

Beweis. Der Beweis der Eigenschaften **Aussagen (i) bis (iii)** geht so wie in Satz 7.17.

Aussage (iv): Es sei A invertierbar. Dann gilt

$$A^T (A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = \text{id}^T = \text{id},$$

$$(A^{-1})^T A^T = (A A^{-1})^T = \text{id}^T = \text{id},$$

also ist $(A^{-1})^T$ in der Tat die Inverse zu A^T . □

Anhand der **Definition 15.36** kann man die Invertierbarkeit oder Nicht-Invertierbarkeit einer Matrix schlecht erkennen. Stattdessen geben wir nun Kriterien für die Invertierbarkeit an.

Lemma 15.39 (Elementarmatrizen sind invertierbar).

Die Elementarmatrizen aus **Definition 15.15** sind invertierbar.

Beweis. Der Beweis ist Gegenstand von **Hausaufgabe I-10.3**. □

Für Matrizen in Zeilenstufenform ist die Invertierbarkeit leicht zu erkennen:

Satz 15.40 (Invertierbarkeit von Matrizen durch Zeilenstufenform).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}_0$ und $A \in K^{n \times n}$. Weiter sei C eine zu A gehörige Matrix in Zeilenstufenform (**Satz 15.21**). Dann sind äquivalent:

- (i) A ist invertierbar.
- (ii) Es gilt $\text{Rang}(A) = n$.
- (iii) C ist invertierbar.
- (iv) Es gilt $\text{Rang}(C) = n$.
- (v) C hat keine Nullzeilen und keine Nullspalten.

Beachte: Eine quadratische Matrix ist also genau dann invertierbar, wenn sie maximalen Rang („vollen Rang“) besitzt. Das ist genau dann der Fall, wenn die Menge der Zeilenvektoren linear unabhängig ist und genau dann, wenn die Menge der Spaltenvektoren linear unabhängig ist.

Beweis. Es sei C eine zu A gehörige Matrix in Zeilenstufenform. C ist also aus A durch Multiplikation von links mit Elementarmatrizen E_i hervorgegangen:

$$C = E_k \cdots E_2 E_1 A.$$

Aussage (i) \Leftrightarrow Aussage (iii): Da die Elementarmatrizen nach Lemma 15.39 invertierbar sind, ist A genau dann invertierbar, wenn C invertierbar ist. (Quizfrage 15.5: Klar?)

Aussage (ii) \Leftrightarrow Aussage (iv): Wie in Lemma 15.16 gezeigt wurde, ändern elementare Zeilenumformungen den Zeilenraum und insbesondere den Rang nicht. Es gilt also $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(C)$.

Aussage (iv) \Rightarrow Aussage (iii): Im Fall $n = 0$ ist die einzig mögliche Matrix C die leere Matrix, diese hat $\text{Rang}(C) = 0$ und ist selbstinvers.

Für den Rest des Beweisschrittes betrachten wir nun $n \in \mathbb{N}$. $\text{Rang}(C) = n$ bedeutet, dass die Zeilenstufenform von C die Gestalt

$$\begin{bmatrix} \star & ? & ? \\ 0 & & ? \\ 0 & 0 & \star \end{bmatrix}$$

besitzt, vgl. Beispiel 15.19. Dabei sind die Pivot-Elemente $\star \in K \setminus \{0\}$. Durch die Multiplikation $\widehat{C} := DC$ mit der Diagonalmatrix D bestehend aus den multiplikativen Inversen der Pivot-Elemente können wir erreichen, dass die Pivot-Elemente in \widehat{C} alle gleich 1 sind.

\widehat{C} ist also nun von der Form $\widehat{C} = I + N$ mit einer strikten oberen Dreiecksmatrix N . Wir rechnen nach, dass die Inverse von \widehat{C} gegeben ist durch

$$\widehat{C}^{-1} = \sum_{k=0}^n (-N)^k.$$

Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} \widehat{C} \sum_{k=0}^n (-N)^k &= \sum_{k=0}^n \widehat{C} (-N)^k = \sum_{k=0}^n (I + N) (-N)^k = \sum_{k=0}^n (-N)^k - \sum_{k=1}^{n+1} (-N)^k \\ &= (-N)^0 - (-N)^{n+1} = I - 0 = I. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit gilt aufgrund von [Lemma 15.33](#). Ganz ähnlich können wir auch zeigen:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=0}^n (-N)^k \right) \widehat{C} &= \sum_{k=0}^n (-N)^k \widehat{C} = \sum_{k=0}^n (-N)^k (I + N) = \sum_{k=0}^n (-N)^k - \sum_{k=1}^{n+1} (-N)^k \\ &= (-N)^0 - (-N)^{n+1} = I - 0 = I. \end{aligned}$$

Tatsächlich ist also \widehat{C} invertierbar und besitzt die angegebene Inverse. Damit ist auch $C = D^{-1}\widehat{C}$ invertierbar.

Aussage (iv) \Leftrightarrow Aussage (v): Wir wissen: $\text{Rang}(C)$ ist die Anzahl der Pivot-Elemente von C . Da C eine $n \times n$ -Matrix ist, gilt:

$$\begin{aligned} \text{Rang}(C) &= n \\ \Leftrightarrow C &\text{ hat } n \text{ Pivot-Elemente} \\ \Leftrightarrow &\text{ die Hauptdiagonale von } C \text{ hat keine Nullen} \\ \Leftrightarrow C &\text{ hat keine Nullzeilen und keine Nullspalten.} \end{aligned}$$

Aussage (iii) \Rightarrow Aussage (v): Wir argumentieren mit einem Beweis durch Kontraposition. Angenommen, C habe eine Nullzeile. Dann hat CX für jede Matrix $X \in K^{n \times n}$ ebenfalls eine Nullzeile, kann also nicht die Einheitsmatrix I_n sein. Also ist C nicht invertierbar.

Angenommen, C habe eine Nullspalte. Dann hat XC für jede Matrix $X \in K^{n \times n}$ ebenfalls eine Nullspalte, kann also nicht die Einheitsmatrix I_n sein. Also ist C nicht invertierbar. \square

Folgerung 15.41 (Multiplikation mit invertierbaren Matrizen ändert den Rang nicht).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $m, n \in \mathbb{N}_0$. Für beliebige Matrizen $A \in K^{n \times m}$ und invertierbare Matrizen $B \in K^{n \times n}$, $C \in K^{m \times m}$ gilt:

$$\text{Rang}(BAC) = \text{Rang}(A). \quad (15.35)$$

Beweis. Der Beweis ist Gegenstand von [Hausaufgabe I-11.1](#). \square

Abschließend zeigen wir, dass es für den Nachweis, dass zwei $n \times n$ -Matrizen Inverse voneinander sind, ausreichend ist, diese in einer der beiden Reihenfolgen miteinander zu multiplizieren. Mit anderen Worten, jede Rechtsinverse einer quadratischen Matrix ist auch eine Linksinverse (und damit die eindeutige Inverse) und umgekehrt. In einer *Gruppe* kennen wir diese Eigenschaft bereits aus [Satz 7.17 Aussage \(ii\)](#). Allerdings bildet ja $(K^{n \times n}, \cdot)$ i. A. lediglich eine (nicht-kommutative) Halbgruppe, und dort gilt diese Eigenschaft i. A. nicht ([Hausaufgabe I-4.2](#)). Es ist also bemerkenswert, dass die (für $n \geq 2$ nicht-kommutative) Halbgruppe $(K^{n \times n}, \cdot)$ die Eigenschaft „Rechtsinverse sind Linksinverse und umgekehrt“ besitzt.

Satz 15.42 (Rechtsinverse quadratischer Matrizen sind Linksinverse und umgekehrt).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}_0$ und $A, B \in K^{n \times n}$. Dann sind äquivalent:

- (i) B ist eine Rechtsinverse von A , d. h., es gilt $AB = I_n$.
- (ii) B ist eine Linksinverse von A , d. h., es gilt $BA = I_n$.
- (iii) B ist die Inverse von A , d. h., es gilt $AB = BA = I_n$.

Beweis. Aussage (i) \Rightarrow Aussage (iii): Es sei $AB = I_n$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 n &= \text{Rang}(I_n) && \text{denn } I_n \text{ ist invertierbar und hat daher vollen Rang nach Satz 15.40} \\
 &= \text{Rang}(AB) && I_n = AB \text{ nach Voraussetzung} \\
 &\leq \min\{\text{Rang}(A), \text{Rang}(B)\} && \text{nach Satz 15.14 (Rang des Produkts von Matrizen)} \\
 &\leq n && \text{nach Satz 15.12 (Rang ist beschränkt durch die Dimensionen).}
 \end{aligned}$$

Es muss also überall Gleichheit gelten, insbesondere ist $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(B) = n$, und nach Satz 15.40 sind A und B invertierbar. Wir müssen noch nachweisen, dass B tatsächlich die Inverse von A ist. Es gilt nämlich $AA^{-1} = I$, aber nach Voraussetzung auch $AB = I_n$. Nach Kürzungsregel (15.31a) muss $A^{-1} = B$ sein.

Der Beweis von Aussage (ii) \Rightarrow Aussage (iii) geht analog.

Aussage (iii) \Rightarrow Aussage (i) und Aussage (iii) \Rightarrow Aussage (ii) sind klar. □

Ende der Vorlesung 22

§ 16 LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME

Literatur: Fischer, Springborn, 2020, Kapitel 1.4 und 3.3, Bosch, 2014, Kapitel 3.5, Beutelspacher, 2014, Kapitel 4.1, Deiser, 2022b, Kapitel 3.3, Jänich, 2008, Kapitel 7

Sehr viele Aufgabenstellungen in den quantitativen Wissenschaften führen früher oder später auf lineare Gleichungssysteme.

Definition 16.1 (lineares Gleichungssystem).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}_0$ und $A \in K^{n \times m}$.

- (i) Eine Gleichung der Form $Ax = b$ mit dem unbekanntem Koeffizientenvektor $x \in K^m$ heißt ein **lineares Gleichungssystem** (englisch: linear system of equations). A heißt die **Koeffizientenmatrix** (englisch: coefficient matrix) und $b \in K^n$ der **Vektor der rechten Seite** (englisch: right-hand side vector) oder kurz die **rechte Seite** (englisch: right-hand side).
- (ii) Die Matrix $[A, b] \in K^{n \times (m+1)}$ heißt die **erweiterte Koeffizientenmatrix** (englisch: augmented coefficient matrix).
- (iii) Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ heißt **homogen** (englisch: homogeneous), wenn $b = 0 \in K^n$ ist, andernfalls **nichthomogen** (englisch: non-homogeneous) oder **inhomogen** (englisch: inhomogeneous).
- (iv) Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ heißt **lösbar** (englisch: solvable), wenn es ein $x_0 \in K^m$ gibt, das $Ax_0 = b$ erfüllt, andernfalls **unlösbar** oder **nicht lösbar** (englisch: unsolvable). △

Beispiel 16.2 (lineares Gleichungssystem).

- (i) Wir betrachten folgendes Beispiel mit $m = 3$ (Anzahl der Gleichungen) und $n = 3$ (Anzahl der unbekannt Koeffizienten):

$$\left. \begin{array}{rcl} 6x_1 + 1x_2 + 1x_3 & = & 11 \\ 3x_1 + 3x_2 + 1x_3 & = & 5 \\ -6x_1 - 6x_2 - 3x_3 & = & -9 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ -6 & -6 & -3 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_x = \underbrace{\begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix}}_b.$$

- (ii) Gesucht ist ein Polynom über dem Körper \mathbb{Z}_5 vom Höchstgrad 2, also $p = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 \in (\mathbb{Z}_5)_2[t]$, dessen zugehörige Polynomfunktion \tilde{p} folgende Bedingungen erfüllt:

$$\tilde{p}(0) = 3, \quad \tilde{p}(1) = 2, \quad \tilde{p}(3) = 4.$$

Das ist ein Beispiel einer **Interpolationsaufgabe**¹⁵ (englisch: **interpolation problem**). Durch Einsetzen der drei **Interpolationsbedingungen** in die Polynomfunktion erhalten wir das lineare Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}}_c = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}}_b$$

für den gesuchten Koeffizientenvektor $c = (c_0, c_1, c_2)^\top$. △

Beachte: Jede Spalte der Matrix gehört zu einer der Variablen x_1, \dots, x_m . Jede Zeile der Matrix gehört zu einer Gleichung.

Unser Ziel ist es, *alle* Lösungen von $Ax = b$ zu bestimmen, also die gesamte **Lösungsmenge** (englisch: **solution set**)

$$\mathcal{L}(A, b) := \{x \in K^m \mid Ax = b\}. \quad (16.1)$$

Dabei spielt die Zeilenstufenform der Koeffizientenmatrix A bzw. der erweiterten Koeffizientenmatrix $[A, b]$ eine entscheidende Rolle, wie wir am Beweis des folgenden Satzes und auch anschließend beim Lösungsverfahren sehen werden.

Satz 16.3 (Struktur der Lösungsmenge, Lösbarkeit).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}_0$ und $A \in K^{n \times m}$ und $b \in K^n$.

- (i) $\mathcal{L}(A, 0)$ ist ein Unterraum von K^m der Dimension $m - \text{Rang}(A)$.
- (ii) Ist $x_0 \in K^m$ irgendeine („**partikuläre**“) (englisch: **particular solution**) **Lösung** von $Ax = b$, dann gilt

$$\mathcal{L}(A, b) = x_0 + \mathcal{L}(A, 0). \quad (16.2)$$

Beachte: Die Lösungsmenge eines allgemeinen Systems $Ax = b$ ergibt sich aus einer partikulären Lösung plus der Lösungsmenge des zugehörigen homogenen Systems.

- (iii) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (a) $Ax = b$ ist lösbar.
 (b) $b \in \text{SR}(A)$.
 (c) $\text{Rang}(A) = \text{Rang}([A, b])$.

¹⁵lateinisch: **interpolare**: neu herrichten, auffrischen

(iv) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (a) $Ax = b$ ist eindeutig lösbar.
- (b) $\text{Rang}(A) = \text{Rang}([A, b]) = m$.

(v) Ist A quadratisch, gilt also $m = n$, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) $Ax = b$ ist eindeutig lösbar.
- (b) $Ax = c$ ist für jedes $c \in K^n$ eindeutig lösbar.
- (c) A ist invertierbar.

In diesem Fall ist die eindeutige Lösung von $Ax = b$ gegeben durch $x = A^{-1}b$.

Beweis. Aussage (i): Das Unterraumkriterium (Satz 12.8) zeigt, dass $\mathcal{L}(A, 0)$ ein Unterraum von K^m ist, denn: Gehören die Vektoren $x, y \in K^m$ zu $\mathcal{L}(A, 0)$, erfüllen also die Bedingungen $Ax = 0$ und $Ay = 0$, und sind $\alpha, \beta \in K$, dann gehört auch $\alpha x + \beta y$ zu $\mathcal{L}(A, 0)$, denn es gilt

$$A(\alpha x + \beta y) = A(\alpha x) + A(\beta y) = \alpha Ax + \beta Ay = 0.$$

Wir bestätigen nun $\dim(\mathcal{L}(A, 0)) = m - \text{Rang}(A)$, indem wir eine Basis dieses Unterraumes angeben. Es sei dazu $\widehat{C} = E_k \cdots E_2 E_1 A$ eine zu A gehörige Zeilenstufenform. Da die Elementarmatrizen E_i invertierbar sind, gilt $Ax = 0 \Leftrightarrow \widehat{C}x = E_k \cdots E_2 E_1 0 = 0$, also $\mathcal{L}(A, 0) = \mathcal{L}(\widehat{C}, 0)$. Zur Abkürzung setzen wir $r := \text{Rang}(A) = \text{Rang}(\widehat{C})$, $0 \leq r \leq \min\{m, n\}$. Eventuell in \widehat{C} auftretende Nullzeilen können wir streichen und erhalten die Matrix $C \in K^{r \times m}$ in Zeilenstufenform ohne Nullzeilen. Es gilt weiterhin $\mathcal{L}(A, 0) = \mathcal{L}(\widehat{C}, 0) = \mathcal{L}(C, 0)$.

Wir bezeichnen mit $\mathcal{A} := (j_1, \dots, j_r)$ die Familie der Pivot-Spalten und mit \mathcal{I} die komplementäre Familie der Nicht-Pivot-Spalten mit $\#\mathcal{I} = m - r$. Wir können jeden Vektor $x \in K^m$ in zwei Teilvektoren $x_{\mathcal{A}} \in K^r$ und $x_{\mathcal{I}} \in K^{m-r}$ partitionieren. Dies geschieht durch Einführung der beiden Matrizen

$$\Pi_{\mathcal{A}} := (e_j^T)_{j \in \mathcal{A}} \quad \text{und} \quad \Pi_{\mathcal{I}} := (e_j^T)_{j \in \mathcal{I}},$$

die aus komplementären Zeilen der $m \times m$ -Einheitsmatrix bestehen. (**Quizfrage 16.1:** Können Sie sich davon überzeugen, dass die nachfolgenden Ausführungen auch in den Grenzfällen $r = 0$ und $r = m$ Sinn ergeben?) Dann gilt

$$x_{\mathcal{A}} = \Pi_{\mathcal{A}} x \quad \text{und} \quad x_{\mathcal{I}} = \Pi_{\mathcal{I}} x \quad \text{sowie} \quad x = \Pi_{\mathcal{A}}^T x_{\mathcal{A}} + \Pi_{\mathcal{I}}^T x_{\mathcal{I}}.$$

Die wesentliche Erkenntnis hierbei ist, dass wir

$$Cx = C \Pi_{\mathcal{A}}^T x_{\mathcal{A}} + C \Pi_{\mathcal{I}}^T x_{\mathcal{I}}$$

schreiben können, wobei die Matrix $C \Pi_{\mathcal{A}}^T = [a_{\bullet j_1}, \dots, a_{\bullet j_r}]$ aus den Pivot-Spalten von C besteht und damit eine invertierbare obere Dreiecksmatrix (Satz 15.40) der Dimension $r \times r$ darstellt. Wir können also jede Lösung von $Cx = 0$ in der Form

$$x_{\mathcal{A}} = -(C \Pi_{\mathcal{A}}^T)^{-1} C \Pi_{\mathcal{I}}^T x_{\mathcal{I}}$$

schreiben, wobei $x_{\mathcal{I}} \in K^{m-r}$ frei gewählt werden kann. Setzen wir diese Darstellung in $x = \Pi_{\mathcal{A}}^T x_{\mathcal{A}} + \Pi_{\mathcal{I}}^T x_{\mathcal{I}}$ ein, so erhalten wir mit

$$x = -\Pi_{\mathcal{A}}^T (C \Pi_{\mathcal{A}}^T)^{-1} C \Pi_{\mathcal{I}}^T x_{\mathcal{I}} + \Pi_{\mathcal{I}}^T x_{\mathcal{I}} = [I_m - \Pi_{\mathcal{A}}^T (C \Pi_{\mathcal{A}}^T)^{-1} C] \Pi_{\mathcal{I}}^T x_{\mathcal{I}}$$

mit beliebigem $x_I \in K^{m-r}$ genau die Lösungen von $Cx = 0$. Da die Spalten der Einheitsmatrix I_{m-r} eine Basis von K^{m-r} bilden, sind die Spalten der Matrix

$$[I_m - \Pi_{\mathcal{A}}^T (C \Pi_{\mathcal{A}}^T)^{-1} C] \Pi_I^T \in K^{n \times (m-r)}$$

eine Basis von $\mathcal{L}(C, 0) = \mathcal{L}(A, 0)$, und die Kardinalität der Basis ist $m - r$. In der Tat können wir auch

$$C [I_m - \Pi_{\mathcal{A}}^T (C \Pi_{\mathcal{A}}^T)^{-1} C] \Pi_I^T = [C - C \Pi_{\mathcal{A}}^T (C \Pi_{\mathcal{A}}^T)^{-1} C] \Pi_I^T = 0 \in K^{r \times (m-r)}$$

hier nochmal bestätigen.

Aussage (ii): Es sei $x_0 \in K^m$ mit $Ax_0 = b$ gegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned} x &\in \mathcal{L}(A, b) \\ \Leftrightarrow Ax &= b \\ \Leftrightarrow A(x - x_0) &= 0 \\ \Leftrightarrow x - x_0 &\in \mathcal{L}(A, 0) \\ \Leftrightarrow x &\in x_0 + \mathcal{L}(A, 0). \end{aligned}$$

Nun zu **Aussage (iii)**:

Aussage (a) \Leftrightarrow Aussage (b): $Ax = b$ ist lösbar genau dann, wenn b als Linearkombination der Spalten von A darstellbar ist, also genau dann, wenn $b \in \text{SR}(A)$ liegt.

Aussage (b) \Leftrightarrow Aussage (c): Die Hinzunahme des Spaltenvektors b zu einer Matrix A erhöht genau dann den $\text{Rang}(A) = \text{SRang}(A) = \dim(\text{SR}(A))$ nicht, wenn b bereits in $\text{SR}(A)$ enthalten ist.

Wir beweisen **Aussage (iv)**:

Aussage (a) \Rightarrow Aussage (b): Es besitze $Ax = b$ eine eindeutige Lösung x_0 . Aufgrund der Lösbarkeit folgt aus **Aussage (iii)** $\text{Rang}(A) = \text{Rang}([A, b])$. Aufgrund der Eindeutigkeit der Lösung und der Darstellung (16.2) $\mathcal{L}(A, b) = x_0 + \mathcal{L}(A, 0)$ muss $\mathcal{L}(A, 0) = \{0\}$, also $\dim(\mathcal{L}(A, 0)) = 0$ sein. Das bedeutet nach **Aussage (i)** aber gerade $m = \text{Rang}(A)$.

Aussage (b) \Rightarrow Aussage (a): Es gelte $\text{Rang}(A) = \text{Rang}([A, b]) = m$. Dann ist aufgrund von **Aussage (iii)** $Ax = b$ lösbar. Aufgrund der Darstellung (16.3) und $\dim(\mathcal{L}(A, 0)) = m - \text{Rang}(A) = 0$ folgt, dass die Lösung eindeutig ist.

Schließlich **Aussage (v)**: Es sei nun A quadratisch, also $m = n$.

Aussage (a) \Rightarrow Aussage (c): Es sei $Ax = b$ eindeutig lösbar. Nach **Aussage (iv)** folgt, dass $\text{Rang}(A) = \text{Rang}([A, b]) = n$ gilt. $\text{Rang}(A) = n$ impliziert nach **Satz 15.40** aber, dass A invertierbar ist.

Aussage (c) \Rightarrow Aussage (b): Wenn A invertierbar ist, dann ist $Ax = c$ äquivalent zu $A^{-1}Ax = x = A^{-1}c$. Also ist $Ax = c$ für jedes $c \in K^n$ eindeutig lösbar.

Aussage (b) \Rightarrow Aussage (a): Das ist offensichtlich. □

Bemerkung 16.4 (zu **Satz 16.3** über die Struktur der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems).

(i) Wir illustrieren den Beweis von Aussage (i) aus Satz 16.3 anhand eines Beispiels (vgl. Beispiel 15.19). Die Zeilenstufenform von A habe die Gestalt

$$\widehat{C} = \begin{bmatrix} \star & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & \star & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und nach Streichen von Nullzeilen} \quad C = \begin{bmatrix} \star & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & \star & ? \end{bmatrix}.$$

Hieraus lesen wir ab:

- Anzahl der Variablen $m = 4$
- Rang der Matrix $\text{Rang}(A) = r = 2$
- Familie der Pivot-Spalten $\mathcal{A} = (1, 3)$
- Familie der Nicht-Pivot-Spalten $\mathcal{I} = (2, 4)$

Die Auswahlmatrizen $\Pi_{\mathcal{A}}$ und $\Pi_{\mathcal{I}}$ haben also die Form

$$\Pi_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \Pi_{\mathcal{I}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Es gilt

$$x_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x_{\mathcal{I}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\begin{aligned} x &= \Pi_{\mathcal{A}}^T x_{\mathcal{A}} + \Pi_{\mathcal{I}}^T x_{\mathcal{I}} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{abhängige Variable}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \\ x_4 \end{pmatrix}}_{\text{unabhängige Variable}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir nennen die Variablen x_2 und x_4 auch die **unabhängigen Variablen** (englisch: independent variables), während x_1 und x_3 als die **abhängigen Variablen** (englisch: dependent variables) bezeichnet werden.

Die Teilmatrix $C \Pi_{\mathcal{A}}^T$ (Auswahl der \mathcal{A} -Spalten von C) hat die Gestalt

$$\begin{bmatrix} \star & ? \\ 0 & \star \end{bmatrix}$$

einer invertierbaren oberen $r \times r$ -Dreiecksmatrix.

Wir halten fest, dass die kompliziert aussehende Darstellung

$$[I_m - \Pi_{\mathcal{A}}^T (C \Pi_{\mathcal{A}}^T)^{-1} C] \Pi_{\mathcal{I}}^T \in K^{n \times (m-r)} \tag{16.3}$$

einer spaltenweisen Basis von $\mathcal{L}(A, 0)$ praktisch Folgendes bedeutet: Wir setzen genau eine der unabhängigen Variablen x_i auf den Wert 1 und die anderen unabhängigen Variablen auf den Wert 0. (Das entspricht einer Spalte von Π_I^T .) Dann rechnen wir die Werte der abhängigen Variablen mit Hilfe der Gleichung

$$(C \Pi_{\mathcal{A}}^T) x_{\mathcal{A}} = - \underbrace{C \Pi_I^T x_I}_{\text{genau eine der } I\text{-Spalten von } C} \quad (16.4)$$

aus. Weil $C \Pi_{\mathcal{A}}^T$ eine obere Dreiecksmatrix ist, können wir die Werte der abhängigen Variablen von hinten nach vorne bestimmen und an der richtigen Stelle in den Lösungsvektor einsortieren ($\Pi_{\mathcal{A}}^T x_{\mathcal{A}}$). Ein Beispiel folgt in [Beispiel 16.7](#).

- (ii) Die Dimension des Lösungsraumes $\dim(\mathcal{L}(A, 0)) = m - \text{Rang}(A)$ sollten wir uns merken in der Form „Anzahl der Variablen (m) minus Anzahl der wesentlichen (sprich: linear unabhängigen) Gleichungen ($\text{Rang}(A)$) im System $Ax = b$ “.
- (iii) Bei einem linearen Gleichungssystem $Ax = b$ können drei mögliche Fälle auftreten:
 - (1) Das System ist eindeutig lösbar.
 - (2) Das System ist lösbar, aber nicht eindeutig lösbar. In diesem Fall hat die Lösungsmenge die Struktur (16.2), also irgendeine beliebige, aber feste Lösung x_0 von $Ax = b$, plus den Unterraum $\mathcal{L}(A, 0)$ der Dimension $m - \text{Rang}(A) \geq 1$.¹⁶
 - (3) Das System ist nicht lösbar. △

Wie berechnet man nun praktisch die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ bzw. stellt fest, dass das System nicht lösbar ist? Das Vorgehen ist wie folgt:

- (1) Wir bringen die erweiterte Koeffizientenmatrix $[A, b]$ zunächst in Zeilenstufenform. Hier können wir bereits die Lösbarkeit und ggf. die Dimension des Lösungsraumes ablesen.
- (2) Wenn das System lösbar ist, so überführen wir die erweiterte Koeffizientenmatrix in die sogenannte **reduzierte Zeilenstufenform**, aus der wir die Lösungsmenge ablesen können.¹⁷

Dieses Verfahren heißt **Gaußsches Eliminationsverfahren** (englisch: [Gaussian elimination method](#)).¹⁸

Definition 16.5 (reduzierte Zeilenstufenform, vgl. [Definition 15.17](#)).

Eine Matrix $A \in K^{n \times m}$ heißt in **reduzierter Zeilenstufenform** (englisch: [reduced row echelon form](#)), wenn sie in Zeilenstufenform ist ([Definition 15.17](#)) und zusätzlich gilt:

- (i) Alle Pivot-Elemente sind gleich 1.
- (ii) Elemente, die in einer Spalte oberhalb eines Pivot-Elements stehen, sind gleich 0. △

¹⁶Die Lösungsmenge $\mathcal{L}(A, b)$ ist dann also eine unendliche Menge, falls der Körper K eine unendliche Menge ist. Ist dagegen der Körper K endlich, dann gilt $\#\mathcal{L}(A, b) = (\#K)^{m - \text{Rang}(A)}$.

¹⁷Der zusätzliche Aufwand für die Überführung in die reduzierte Zeilenstufenform ist gerechtfertigt, weil dann die \mathcal{A} -Spalten $C \Pi_{\mathcal{A}}^T$, aus denen sich – siehe (16.4) – die Werte der abhängigen Variablen ergeben, nicht nur eine obere Dreiecksmatrix, sondern die Einheitsmatrix ist, sodass wir die Werte direkt ablesen können.

¹⁸Das Wort „Elimination“ bezieht sich darauf, dass durch Überführung in reduzierte Zeilenstufenform Variablen aus den Gleichungen derart eliminiert wurden (erkennbar an Null-Koeffizienten), dass zwischen benachbarten Zeilen von unten nach oben immer nur eine Variable (Pivot-Spalte) hinzukommt, nach der diese Zeile aufgelöst werden kann.

Beachte: Die reduzierte Zeilenstufenform einer Matrix ist eindeutig. Eine Matrix ist genau dann invertierbar, wenn ihre reduzierte Zeilenstufenform die Einheitsmatrix ist.

Beispiel 16.6 (reduzierte Zeilenstufenform, vgl. [Beispiel 15.19](#)).

Hier sind die Besetzungsmuster einiger 3×4 -Matrizen in reduzierter Zeilenstufenform, wobei ? für einen beliebigen Eintrag aus dem Körper K steht. Die Zahl r gibt wieder den Rang der Matrix an.

$$\begin{array}{l}
 j_1 = 1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & ? \\ 0 & 1 & 0 & ? \\ 0 & 0 & 1 & ? \end{bmatrix} \\
 j_2 = 2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & ? & 0 & ? \\ 0 & 0 & 1 & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 j_3 = 3 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 r = 3
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 j_1 = 1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & ? & 0 & ? \\ 0 & 0 & 1 & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 j_2 = 3 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 r = 2
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 j_1 = 3 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 j_2 = 4 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 r = 2
 \end{array}
 \quad \Delta$$

Wir geben nun anhand von Beispielen die Bestimmung der reduzierten Zeilenstufenform erweiterter Koeffizientenmatrizen $[A, b]$ an und wie wir daraus die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ ablesen können. Dabei kommen alle drei Fälle (eindeutige Lösbarkeit, nicht-eindeutige Lösbarkeit und Nicht-Lösbarkeit) vor.

Beispiel 16.7 (Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme (Gaußsches Eliminationsverfahren)).

Wir betrachten drei lineare Gleichungssysteme über dem endlichen Körper $(\mathbb{Z}_5, +_5, \cdot_5)$, vgl. [Folgerung 10.6](#). Der Einfachheit halber schreiben wir die Verknüpfungen als $+$ und \cdot (statt $+_5$ und \cdot_5) und wiederholen sie hier:

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

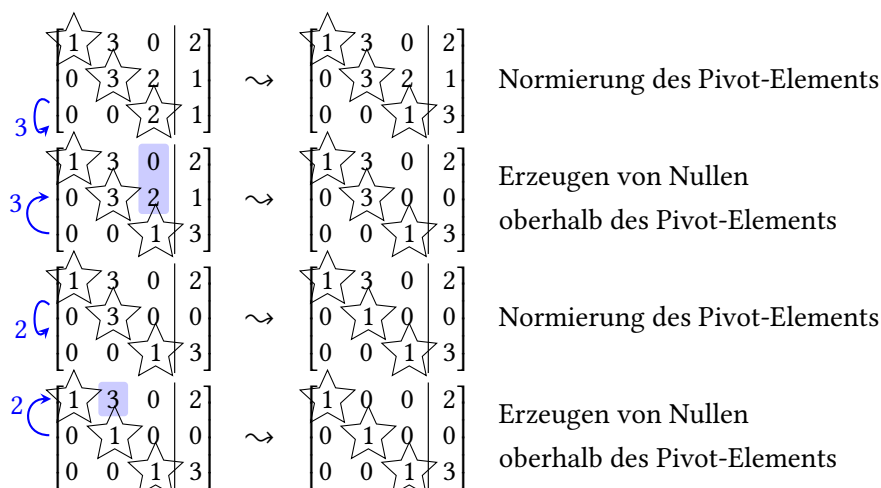
·	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

In allen Fällen werden wir $m = 3$ Variablen und $n = 3$ Gleichungen verwenden.

(i) Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & | & 1 \\ 1 & 3 & 0 & | & 2 \\ 3 & 2 & 2 & | & 2 \end{bmatrix} \end{array} \sim \begin{array}{c} \star \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 2 & | & 1 \\ 3 & 2 & 2 & | & 2 \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{Tauschen der Zeilen 1 und 2} \\
 \begin{array}{c} \star \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 2 & | & 1 \\ 3 & 2 & 2 & | & 2 \end{bmatrix} \end{array} \sim \begin{array}{c} \star \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & 3 & 2 & | & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Erzeugen von Nullen} \\ \text{unterhalb des Pivot-Elements} \end{array} \\
 \begin{array}{c} \star \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & 3 & 2 & | & 1 \end{bmatrix} \end{array} \sim \begin{array}{c} \star \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & | & 2 \\ 0 & 3 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 2 & | & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{Tauschen der Zeilen 2 und 3} \\
 \begin{array}{c} \star \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & | & 2 \\ 0 & 3 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 2 & | & 1 \end{bmatrix} \end{array} \sim \begin{array}{c} \star \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & | & 2 \\ 0 & 3 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 2 & | & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Erzeugen von Nullen} \\ \text{unterhalb des Pivot-Elements} \end{array}
 \end{array}$$

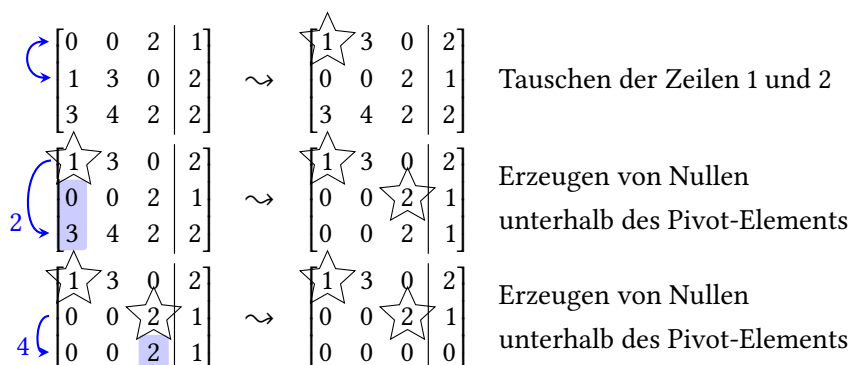
An dieser Stelle ist eine Zeilenstufenform hergestellt. Wir erkennen $\text{Rang}(A) = \text{Rang}([A, b]) = 3 = m$, also ist das System eindeutig lösbar. Wir gehen weiter zur reduzierten Zeilenstufenform:



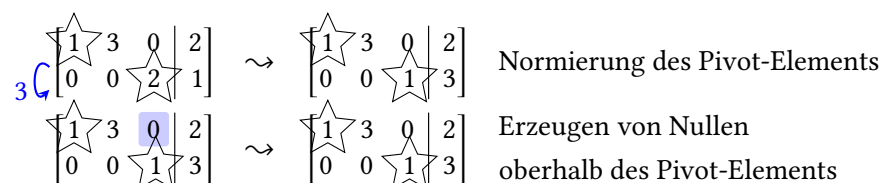
Wir haben in diesem Fall also die abhängigen Indizes $\mathcal{A} = (1, 2, 3)$ und keinen unabhängigen Index, also die leere Familie $\mathcal{I} = ()$. Hier können wir nun die eindeutige Lösung ablesen, nämlich $x = (2, 0, 3)^T$. Wir führen die Probe durch:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(ii) Wir betrachten das lineare Gleichungssystem



An dieser Stelle ist eine Zeilenstufenform hergestellt. Wir erkennen $\text{Rang}(A) = \text{Rang}([A, b]) = 2 = m - 1$, also ist das System lösbar, und die Lösungsmenge des homogenen Systems hat $\dim(\mathcal{L}(A, 0)) = 1$. Wir gehen weiter zur reduzierten Zeilenstufenform:



Wir haben in diesem Fall also die abhängigen Indizes $\mathcal{A} = (1, 3)$ und einen einzelnen unabhängigen Index $\mathcal{I} = (2)$.

Eine partikuläre Lösung erhalten wir, indem wir die unabhängige Variable $x_2 := 0$ setzen und die abhängigen Variablen mit Hilfe des Systems berechnen. Da wir die Pivot-Elemente auf 1

normiert haben, müssen wir dazu lediglich die rechte Seite ablesen und die Elemente an der richtigen Stelle (wie durch die Pivot-Spalten vorgegeben) in den Lösungsvektor eintragen. Wir erhalten so die partikuläre Lösung $x_0 = (2, 0, 3)^T$. Wir führen die Probe durch:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Eine Basis der Lösungsmenge des homogenen Systems

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \star 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \star 1 & 0 \end{array} \right]$$

erhalten wir nach [Bemerkung 16.4](#) dadurch, dass wir für die unabhängigen Variablen (hier nur x_2) einen der Einheitsvektoren von K^{m-r} einsetzen (hier also nur die Zahl $x_2 := 1$) und die abhängigen Variablen von hinten nach vorne mit Hilfe der Gleichungen ausrechnen. Im vorliegenden Beispiel lesen wir aus der zweiten Gleichung

$$x_3 = 0$$

ab und anschließend aus der ersten Gleichung

$$x_1 + 3x_2 = 0 \iff x_1 = -3x_2 = 2x_2 = 2 \cdot 1 = 2.$$

Die Lösungsmenge des homogenen Systems besteht also gerade aus allen Vielfachen des Vektors $(2, 1, 0)^T$. Wir führen auch hier die Probe durch:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da wir es in unserem Beispiel mit dem endlichen Körper \mathbb{Z}_5 zu tun haben, können wir die Elemente des eindimensionalen Lösungsraumes sogar aufzählen. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(A, b) &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

(iii) Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{l} \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \end{array} \right] \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \star \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \end{array} \right] \end{array} \text{ Tauschen der Zeilen 1 und 2} \\ \begin{array}{c} \star \\ \curvearrowright \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \end{array} \right] \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \star \\ \star \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \star & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right] \end{array} \text{ Erzeugen von Nullen} \\ \text{unterhalb des Pivot-Elements} \\ \begin{array}{c} \star \\ \star \\ \curvearrowright \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \star & 1 \\ 0 & 0 & \star & 2 \end{array} \right] \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \star \\ \star \\ \star \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \star & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array} \text{ Erzeugen von Nullen} \\ \text{unterhalb des Pivot-Elements} \end{array}$$

An dieser Stelle ist eine Zeilenstufenform hergestellt. Wir erkennen nun $\text{Rang}(A) = 2$, aber $\text{Rang}([A, b]) = 3$. Das heißt, das System ist nicht lösbar, vgl. [Satz 16.3](#). \triangle

Abschließend bemerken wir, dass wir mit Hilfe der Transformation in reduzierte Zeilenstufenform nicht nur ein einzelnes lineares Gleichungssystem $Ax = b$ lösen können, sondern mehrere Systeme gleichzeitig, sofern diese sich nur in der rechten Seite unterscheiden. Haben wir $k \in \mathbb{N}_0$ rechte Seiten, so schreiben wir diese spaltenweise als $n \times k$ -Matrix B . Das System für die k unbekannt Spaltenvektoren in der $n \times k$ -Matrix X lautet dann $AX = B$. Die Transformation auf Zeilenstufenform geschieht einfach für alle Spalten der erweiterten Koeffizientenmatrix $[A, B]$ gleichzeitig. Wie gewohnt können wir an der Zeilenstufenform ablesen, für welche rechten Seiten das System lösbar ist. Die rechten Seiten, die zu unlösbaren Systemen führen, können wir vor der Herstellung der reduzierten Zeilenstufenform einfach herausstreichen (oder auch stehenlassen). Wir erhalten dann für jede rechte Seite, für die das System lösbar ist, eine partikuläre Lösung. Die Lösungsmenge des homogenen System ist für alle rechten Seite dieselbe, da das homogene System ja dasselbe ist.

Ein wichtiger Anwendungsfall ist die Bestimmung der inversen Matrix einer quadratischen $n \times n$ -Matrix A . Dies kann man durch die rechte Seite $B = I_n$ und Lösen des Systems $AX = I_n$ erreichen. An der Zeilenstufenform erkennt man, ob A invertierbar ist. Wenn ja, hat man am Ende rechts die inverse Matrix stehen.

Beispiel 16.8 (Berechnung der inversen Matrix).

Wir führen die Berechnung der inversen Matrix für die erste Matrix aus [Beispiel 16.7](#) vor. Wir erinnern daran, dass wir es hier mit Matrizen über dem Körper \mathbb{Z}_5 zu tun haben.

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \star \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array} \quad \text{Tauschen der Zeilen 1 und 2} \\
 \begin{array}{c} \star \\ \curvearrowright \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \star \\ \star \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right] \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Erzeugen von Nullen} \\ \text{unterhalb des Pivot-Elements} \end{array} \\
 \begin{array}{c} \star \\ \star \\ \curvearrowright \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right] \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \star \\ \star \\ \star \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array} \quad \text{Tauschen der Zeilen 2 und 3} \\
 \begin{array}{c} \star \\ \star \\ \star \\ \curvearrowright \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \star \\ \star \\ \star \\ \star \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Erzeugen von Nullen} \\ \text{unterhalb des Pivot-Elements} \end{array}
 \end{array}$$

An dieser Stelle ist eine Zeilenstufenform hergestellt. Wir erkennen $\text{Rang}(A) = \text{Rang}([A, b]) = 3 = m$ für jede Spalte b der rechten Seite, also ist das System für jede der rechten Seiten eindeutig lösbar. Wir gehen weiter zur reduzierten Zeilenstufenform:

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{c} \star \\ \star \\ \curvearrowright \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \star \\ \star \\ \star \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array} \quad \text{Normierung des Pivot-Elements} \\
 \begin{array}{c} \star \\ \star \\ \star \\ \curvearrowright \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \star \\ \star \\ \star \\ \star \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Erzeugen von Nullen} \\ \text{oberhalb des Pivot-Elements} \end{array} \\
 \begin{array}{c} \star \\ \star \\ \star \\ \star \\ \curvearrowright \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \star \\ \star \\ \star \\ \star \\ \star \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array} \quad \text{Normierung des Pivot-Elements}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 2 \\ \curvearrowright \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{Erzeugen von Nullen} \\ \text{oberhalb des Pivot-Elements} \end{array}$$

Die Matrix auf der rechten Seite ist die Inverse der Ausgangsmatrix.

Wir führen die Probe durch:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad \Delta$$

Ende der Vorlesung 23

Ende der Woche 11

§ 17 HOMOMORPHISMEN VON VEKTORRÄUMEN

Literatur: Fischer, Springborn, 2020, Kapitel 3.1–3.2, Bosch, 2014, Kapitel 2, Beutelspacher, 2014, Kapitel 5.1 und 5.3, Deiser, 2022b, Kapitel 3.3, Jänich, 2008, Kapitel 4

In diesem Abschnitt geht es um die Homomorphismen, also die strukturverträglichen Abbildungen zwischen Vektorräumen über demselben Körper.

Definition 17.1 (Vektorraumhomomorphismus, vgl. Definition 8.1 eines Halbgruppenhomomorphismus).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(V, +_1, \cdot_1)$, $(W, +_2, \cdot_2)$ zwei Vektorräume über K .

- (i) Eine Abbildung $f: V \rightarrow W$ heißt **strukturverträglich** oder ein **(Vektorraum-)Homomorphismus** (englisch: **vector space homomorphism**) oder eine **lineare Abbildung** (englisch: **linear map**) von $(V, +_1, \cdot_1)$ in $(W, +_2, \cdot_2)$, wenn gilt:

$$f(u +_1 v) = f(u) +_2 f(v) \quad \text{für alle } u, v \in V, \tag{17.1a}$$

$$f(\alpha \cdot_1 u) = \alpha \cdot_2 f(u) \quad \text{für alle } u \in V \text{ und alle } \alpha \in K. \tag{17.1b}$$

Man bezeichnet die Eigenschaft (17.1a) auch als die **Additivität** (englisch: **additivity**) und die Eigenschaft (17.1b) als die **Homogenität** (englisch: **homogeneity**) der Abbildung f .

- (ii) Wie in Definition 8.1 sprechen wir im Fall $(V, +_1, \cdot_1) = (W, +_2, \cdot_2)$ von einem **(Vektorraum-)Endomorphismus** (englisch: **vector space endomorphism**) oder einem **linearen Endomorphismus** (englisch: **linear endomorphism**).
- (iii) Ist $f: V \rightarrow W$ bijektiv, so heißt f auch **strukturerehaltend** oder ein **(Vektorraum-)Isomorphismus** (englisch: **vector space isomorphism**) oder ein **linearer Isomorphismus** (englisch: **linear isomorphism**). In diesem Fall nennen wir $(V, +_1, \cdot_1)$ und $(W, +_2, \cdot_2)$ auch zueinander **isomorphe Vektorräume** (englisch: **isomorphic vector spaces**) und schreiben

$$(V, +_1, \cdot_1) \cong (W, +_2, \cdot_2).$$

- (iv) Im Fall $(V, +_1, \cdot_1) = (W, +_2, \cdot_2)$ und $f: V \rightarrow W$ bijektiv sprechen wir auch von einem **(Vektorraum-)Automorphismus** (englisch: **vector space automorphism**) oder einem **linearen Automorphismus** (englisch: **linear automorphism**).

- (v) Das **Bild** (englisch: **image**) und der **Kern** (englisch: **kernel**, **null space**¹⁹) eines Vektorraumhomomorphismus $f: V \rightarrow W$ sind definiert als

$$\text{Bild}(f) := \{f(u) \in W \mid u \in V\} = f(V), \quad (17.2)$$

$$\text{Kern}(f) := \{u \in V \mid f(u) = 0_W\} = f^{-1}(\{0_W\}). \quad (17.3)$$

△

Bemerkung 17.2 (zu [Definition 17.1](#)).

- (i) Die Vektorräume $(V, +_1)$ und $(W, +_2)$ sind insbesondere (abelsche) Gruppen. Aufgrund der Bedingung [\(17.1a\)](#) ist jeder Vektorraumhomomorphismus insbesondere ein Gruppenhomomorphismus. Wir können daher Ergebnisse aus [§ 8](#) verwenden.
- (ii) Im Folgenden werden wir zulassen, die Vektorraumoperationen $+$ und \cdot in beiden Vektorräumen mit demselben Symbol zu notieren. △

Beispiel 17.3 (Vektorraumhomomorphismus).

- (i) Die Vektorräume K_n und K^n über einem Körper K sind zueinander isomorph. Die Abbildung

$$\cdot^T: K_n \ni x \mapsto x^T \in K^n$$

ist ein linearer Isomorphismus, vgl. [\(15.25a\)](#) und [\(15.25b\)](#). (**Quizfrage 17.1**: Wie sieht der inverse Vektorraumisomorphismus aus?)

- (ii) Der Vektorraum der $n \times m$ -Matrizen $K^{n \times m}$ über einem Körper K ist isomorph zum Vektorraum K^{nm} . Die **Vektorisierung** (englisch: **vectorization**)

$$\text{vec}: K^{n \times m} \ni A \mapsto \text{vec}(A) \in K^{nm},$$

definiert durch „Übereinanderstapeln“ der Spalten, also

$$\text{vec} \left(\begin{bmatrix} \left| \right. & & \left| \right. \\ \left| \right. & \cdots & \left| \right. \\ a_{\bullet 1} & & a_{\bullet m} \\ \left| \right. & & \left| \right. \end{bmatrix} \right) := \begin{pmatrix} a_{\bullet 1} \\ \vdots \\ a_{\bullet m} \end{pmatrix},$$

ist ein linearer Isomorphismus. (**Quizfrage 17.2**: Wie sieht der inverse Vektorraumisomorphismus aus?)

- (iii) Im Standardvektorraum K^n über einem Körper K ist die **Projektion auf die i -te Koordinate** (englisch: **projection onto the i -th coordinate**), gegeben durch

$$\pi_i: K^n \ni x \mapsto x_i \in K \quad (17.4)$$

für $1 \leq i \leq n \in \mathbb{N}$, eine surjektive lineare Abbildung. (**Quizfrage 17.3**: Ist sie auch injektiv?)

- (iv) Die Grenzwert-Abbildung, definiert beispielsweise auf dem Vektorraum der konvergenten \mathbb{R} -wertigen Folgen $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})_c$ (siehe [Beispiel 12.9](#)) nach \mathbb{R} , also

$$\lim: (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})_c \ni (y_i)_{i \in \mathbb{N}_0} \mapsto \lim_{i \rightarrow \infty} (y_i) \in \mathbb{R}$$

ist eine surjektive lineare Abbildung. (**Quizfrage 17.4**: Ist sie auch injektiv?)

¹⁹nicht zu verwechseln mit dem Begriff *zero vector space* (Nullraum) $\{0\}$, siehe [Beispiel 12.3](#)

- (v) Die **Ableitungsabbildung** (englisch: **differentiation map**), definiert beispielsweise auf dem Vektorraum der differenzierbaren Funktionen $(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ in den Vektorraum der Funktionen $(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, also

$$.: \{f \in \mathbb{R}^{(a,b)} \mid f \text{ ist differenzierbar}\} \ni f \mapsto f' \in \mathbb{R}^{(a,b)}$$

ist eine lineare Abbildung, die nicht surjektiv und nicht injektiv ist. (**Quizfrage 17.5**: Warum?)

- (vi) Für eine Matrix $A \in K^{n \times m}$ über einem Körper K ist die Matrix-Vektor-Multiplikation mit A

$$f_A: K^m \ni x \mapsto f_A(x) := Ax \in K^n \quad (17.5)$$

eine lineare Abbildung. Sie wird die **von A induzierte lineare Abbildung** genannt (englisch: **linear map induced by A**). Ihre Eigenschaften untersuchen wir in § 17.2.

Wie wir in § 19 sehen werden, ist die Matrix-Vektor-Multiplikation der Prototyp einer linearen Abbildung zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen. Jede lineare Abbildung kann in Form von Matrix-Vektor-Multiplikation geschrieben werden. \triangle

Lemma 17.4 (Komposition linearer Abbildungen).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(U, +, \cdot)$, $(V, +, \cdot)$, $(W, +, \cdot)$ Vektorräume über K . Sind $f: V \rightarrow W$ und $g: U \rightarrow V$ lineare Abbildungen, dann ist auch $f \circ g: U \rightarrow W$ eine lineare Abbildung.

Beweis. Der Beweis ist Gegenstand von [Hausaufgabe I-12.1](#). \square

Als Folgerung ergibt sich (wie auch bereits bei Halbgruppen, Monoiden, Gruppen, Ringen und Körpern), dass Isomorphie eine Äquivalenzrelation auf der Klasse aller Vektorräume über demselben Körper K ist.

Lemma 17.5 (Eigenschaften linearer Abbildungen).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(V, +, \cdot)$, $(W, +, \cdot)$ zwei Vektorräume über K . Weiter sei $f: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung.

- (i) $f(0) = 0$.
- (ii) $f(-v) = -f(v)$ für alle $v \in V$.
- (iii) $f(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(v_i)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, $\alpha_i \in K$ und $v_i \in V$.
- (iv) Ist $E \subseteq V$, dann gilt $f(\langle E \rangle) = \langle f(E) \rangle$.
- (v) Ist $F = (v_i)_{i \in I}$ eine Familie von Vektoren in V , dann gilt $f(\langle F \rangle) = \langle f(F) \rangle$.
- (vi) Ist $U \subseteq V$ ein Unterraum, dann ist $f(U) \subseteq W$ ein Unterraum.
- (vii) Ist $Z \subseteq W$ ein Unterraum, dann ist $f^{-1}(Z) \subseteq V$ ein Unterraum.
- (viii) Ist $M \subseteq V$ eine linear abhängige Menge von Vektoren, dann ist auch $f(M) \subseteq W$ eine linear abhängige Menge von Vektoren.
- (ix) Ist $F = (v_i)_{i \in I}$ eine linear abhängige Familie von Vektoren in V , dann ist auch $(f(v_i))_{i \in I}$ eine linear abhängige Familie von Vektoren.

Beweis. Aussage (i) und Aussage (ii) folgen sofort aus Lemma 8.5.

Aussage (iii):

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right) &= \sum_{i=1}^n f(\alpha_i v_i) \quad \text{durch wiederholte Anwendung von (17.1a)} \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i f(v_i) \quad \text{durch Anwendung von (17.1b) auf jeden Summanden} \end{aligned}$$

Aussage (iv): Nach Satz 12.13 besteht $\langle E \rangle$ gerade aus den Linearkombinationen von E , während $\langle f(E) \rangle$ aus den Linearkombinationen von $f(E)$ besteht. Nach Aussage (iii) sind das aber dieselben Mengen.

Aussage (v): Nach Satz 12.13 besteht $\langle F \rangle$ gerade aus den Linearkombinationen von F , während $\langle f(F) \rangle$ aus den Linearkombinationen von $(f(v_i))_{i \in I}$ besteht. Nach Aussage (iii) sind das aber dieselben Mengen.

Aussage (vi): Wir verwenden das Unterraumkriterium (Satz 12.8). Wegen $0 \in U$ und Aussage (i) ist $0 \in f(U)$, also ist $f(U) \neq \emptyset$. Sind weiter $w_1, w_2 \in f(U)$, dann gibt es $u_1, u_2 \in U$ mit $w_1 = f(u_1)$ und $w_2 = f(u_2)$. Für $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ gilt

$$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 = \alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2) = f(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2).$$

Wegen der Unterraumeigenschaft gehört $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ zu U , also gehört $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2$ zu $f(U)$.

Aussage (vii): Wir verwenden nochmal das Unterraumkriterium (Satz 12.8). Wegen $0 \in Z$ und Aussage (i) ist $0 \in f^{-1}(Z)$, also ist $f^{-1}(Z) \neq \emptyset$. Sind weiter $u_1, u_2 \in f^{-1}(Z)$, dann gibt es $w_1, w_2 \in Z$ mit $w_1 = f(u_1)$ und $w_2 = f(u_2)$. Für $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ gilt

$$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 = \alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2) = f(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2).$$

Wegen der Unterraumeigenschaft gehört $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ zu Z , also gehört $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2$ zu $f^{-1}(Z)$.

Aussage (viii): Es sei $M \subseteq V$ eine linear abhängige Menge, d. h., es gibt ein $n \in \mathbb{N}_0$ und paarweise verschiedene Vektoren $v_1, \dots, v_n \in M$ sowie Koeffizienten $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$, die nicht alle gleich 0 sind, sodass gilt: $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0$. Es folgt mit Aussage (iii) und Aussage (i)

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i f(v_i) = f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right) = f(0) = 0.$$

Das bedeutet aber gerade die lineare Abhängigkeit der Menge $f(M)$.

Aussage (ix): Es sei $F = (v_i)_{i \in I}$ eine linear abhängige Familie von Vektoren in V , d. h., es gibt ein $n \in \mathbb{N}_0$ und paarweise verschiedene Indizes $i_1, \dots, i_n \in I$ sowie Koeffizienten $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$, die nicht alle gleich 0 sind, sodass gilt: $\sum_{\ell=1}^n \alpha_\ell v_{i_\ell} = 0$. Es folgt mit Aussage (iii) und Aussage (i)

$$\sum_{\ell=1}^n \alpha_\ell f(v_{i_\ell}) = f\left(\sum_{\ell=1}^n \alpha_\ell v_{i_\ell}\right) = f(0) = 0.$$

Das bedeutet aber gerade die lineare Abhängigkeit der Familie $(f(v_i))_{i \in I}$. □

Lemma 17.6 (Kern und Bild linearer Abbildungen).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(V, +, \cdot)$, $(W, +, \cdot)$ zwei Vektorräume über K sowie $f: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung.

- (i) $\text{Bild}(f)$ ist ein Unterraum von W .
- (ii) f ist surjektiv genau dann, wenn $\text{Bild}(f) = W$ gilt.
- (iii) $\text{Kern}(f)$ ist ein Unterraum von V .
- (iv) f ist injektiv genau dann, wenn $\text{Kern}(f) = \{0\}$ gilt.

Beweis. **Aussage (i):** V ist selbst ein Unterraum von V , daher ist $\text{Bild}(f) = f(V)$ nach Lemma 17.5 (vi) ein Unterraum von W .

Aussage (ii): Die Aussage folgt sofort aus der Definition von $\text{Bild}(f) = f(V)$.

Aussage (iii): $\{0\}$ ist ein Unterraum von W , daher ist $\text{Kern}(f) = f^{-1}(\{0\})$ nach Lemma 17.5 (vii) ein Unterraum von V .

Aussage (iv): Weder der Begriff der Injektivität noch die Definition von $\text{Kern}(f) := \{u \in V \mid f(u) = 0\}$ ändern sich, wenn wir die lineare Abbildung $f: (V, +, \cdot) \rightarrow (W, +, \cdot)$ als Gruppenhomomorphismus $f: (V, +) \rightarrow (W, +)$ auffassen. Die **Aussage (iv)** folgt daher aus Lemma 8.9. \square

§ 17.1 KONSTRUKTION LINEARER ABBILDUNGEN

Wir zeigen nun, dass eine lineare Abbildung $V \rightarrow W$ durch die Bilder auf einer Basis von V bereits eindeutig festgelegt ist. Zu diesem Zweck bietet es sich an, mit **indizierten Basen** (englisch: **indexed basis**) zu arbeiten, um eine „Nummerierung“ der Basisvektoren zu erhalten. Das heißt, dass wir von nun an bevorzugt mit Basen in Form von *Familien* von Vektoren (Definition 6.29) arbeiten anstatt mit Mengen von Vektoren. Ist die Indexmenge I dabei eine Teilmenge von \mathbb{N}_0 , so sprechen wir auch von einer **geordneten Basis** (englisch: **ordered basis**).

Satz 17.7 (Existenz- und Eindeutigkeitsatz für Vektorraumhomomorphismen).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(V, +, \cdot)$, $(W, +, \cdot)$ zwei Vektorräume über K . Weiter sei $(v_i)_{i \in I}$ eine Familie von Vektoren in V und $(w_i)_{i \in I}$ eine Familie von Vektoren in W mit gleicher Indexmenge I .

- (i) Ist $(v_i)_{i \in I}$ linear unabhängig, dann gibt es eine lineare Abbildung $f: V \rightarrow W$ mit der Eigenschaft $f(v_i) = w_i$ für alle $i \in I$.²⁰
- (ii) Ist $B := (v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V , dann gibt es genau eine lineare Abbildung $f: V \rightarrow W$ mit der Eigenschaft $f(v_i) = w_i$ für alle $i \in I$.

Diese Abbildung hat außerdem folgende Eigenschaften:

- (a) $\text{Bild}(f) = \langle (w_i)_{i \in I} \rangle$.
- (b) f ist surjektiv genau dann, wenn $\langle (w_i)_{i \in I} \rangle = W$ gilt.
- (c) f ist injektiv genau dann, wenn $(w_i)_{i \in I}$ linear unabhängig ist.
- (d) f ist bijektiv genau dann, wenn $(w_i)_{i \in I}$ eine Basis von W ist.

Beweis. Wir beweisen zunächst die **Aussage (ii)**.

²⁰Dieses Resultat hängt im Fall, dass V unendlich-dimensional ist, vom Zornschen Lemma und damit vom Auswahlaxiom ab.

Schritt 1: Wir konstruieren eine Abbildung $f: V \rightarrow W$ mit den gesuchten Eigenschaften.

Da $B = (v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V ist, kann jedes $v \in V$ nach [Satz 13.10](#) auf (bis auf Nullkoeffizienten) eindeutige Art und Weise als Linearkombination $v = \sum_{\ell=1}^n \alpha_\ell v_{i_\ell}$ geschrieben werden. Daher ist die Setzung

$$f(v) := \sum_{\ell=1}^n \alpha_\ell w_{i_\ell}$$

wohldefiniert. (**Quizfrage 17.6:** Warum ist die Eindeutigkeit der Darstellung von v bis auf Nullkoeffizienten für die Wohldefiniertheit schon ausreichend?)

Wegen $v_i = 1 \cdot v_i$ gilt

$$f(v_i) = f(1 \cdot v_i) = 1 w_i = w_i$$

erfüllt f die Bedingung $f(v_i) = w_i$.

Schritt 2: Wir zeigen: Die so definierte Abbildung $f: V \rightarrow W$ ist linear.

Sind $v = \sum_{\ell=1}^n \alpha_\ell v_{i_\ell}$ und $u = \sum_{k=1}^m \beta_k v_{j_k}$ zwei beliebige Vektoren aus V , dann können wir durch Hinzufügen von Nullkoeffizienten erreichen, dass beide Darstellungen dieselben endlich vielen Indizes aus I verwenden, also $v = \sum_{\ell=1}^n \alpha_\ell v_{i_\ell}$ und $u = \sum_{\ell=1}^n \beta_\ell v_{i_\ell}$. Es gilt

$$\begin{aligned} f(v+u) &= f\left(\sum_{\ell=1}^n \alpha_\ell v_{i_\ell} + \sum_{\ell=1}^n \beta_\ell v_{i_\ell}\right) && \text{nach Darstellung von } v \text{ und } u \\ &= f\left(\sum_{\ell=1}^n (\alpha_\ell + \beta_\ell) v_{i_\ell}\right) && \text{nach Distributivgesetz (12.1b) und Kommutativität} \\ &= \sum_{\ell=1}^n (\alpha_\ell + \beta_\ell) w_{i_\ell} && \text{nach Definition von } f \\ &= \sum_{\ell=1}^n \alpha_\ell w_{i_\ell} + \sum_{\ell=1}^n \beta_\ell w_{i_\ell} && \text{nach Distributivgesetz (12.1b)} \\ &= f(v) + f(u) && \text{nach Definition von } f \end{aligned}$$

und außerdem für $\alpha \in K$

$$\begin{aligned} f(\alpha v) &= f\left(\alpha \sum_{\ell=1}^n \alpha_\ell v_{i_\ell}\right) && \text{nach Darstellung von } v \\ &= f\left(\sum_{\ell=1}^n (\alpha \alpha_\ell) v_{i_\ell}\right) && \text{nach Distributivgesetz (12.1a)} \\ &= \sum_{\ell=1}^n (\alpha \alpha_\ell) w_{i_\ell} && \text{nach Definition von } f \\ &= \alpha \sum_{\ell=1}^n \alpha_\ell w_{i_\ell} && \text{nach Distributivgesetz (12.1a)} \\ &= \alpha f(v) && \text{nach Definition von } f. \end{aligned}$$

Schritt 3: Wir zeigen die Eindeutigkeit von f .

Dazu sei $g: V \rightarrow W$ eine weitere lineare Abbildung mit der Eigenschaft $g(v_i) = w_i$. Ist $v \in V$ ein beliebiger Vektor mit der i. W. eindeutigen Darstellung $v = \sum_{\ell=1}^n \alpha_\ell v_{i_\ell}$, dann gilt

$$\begin{aligned} g(v) &= g\left(\sum_{\ell=1}^n \alpha_\ell v_{i_\ell}\right) && \text{wegen der Darstellung von } v \\ &= \sum_{\ell=1}^n \alpha_\ell g(v_{i_\ell}) && \text{wegen der Linearität von } g \\ &= \sum_{\ell=1}^n \alpha_\ell w_{i_\ell} && \text{wegen der Eigenschaft } g(v_i) = w_i \\ &= f(v) && \text{nach Definition von } f. \end{aligned}$$

Also muss g notwendig mit f übereinstimmen.

Wir kommen zu den weiteren Eigenschaften der Abbildung f .

Aussage (a): Es gilt

$$\begin{aligned} \text{Bild}(f) &= f(V) && \text{nach Definition von } \text{Bild}(f) \\ &= f(\langle (v_i)_{i \in I} \rangle) && \text{denn } (v_i)_{i \in I} \text{ ist eine Basis von } V \\ &= \langle (f(v_i))_{i \in I} \rangle && \text{nach Lemma 17.5 (v)} \\ &= \langle (w_i)_{i \in I} \rangle. \end{aligned}$$

Aussage (b): $f: V \rightarrow W$ ist nach Definition surjektiv genau dann, wenn $\text{Bild}(f) = W$ ist, also nach **Aussage (a)** genau dann, wenn $\langle (w_i)_{i \in I} \rangle = W$ gilt.

Aussage (c): Es sei zunächst $(w_i)_{i \in I}$ linear abhängig, d. h., es gibt ein $n \in \mathbb{N}_0$ und paarweise verschiedene Indizes $i_1, \dots, i_n \in I$ sowie Koeffizienten $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$, die nicht alle gleich 0 sind, sodass gilt: $\sum_{\ell=1}^n \alpha_\ell w_{i_\ell} = 0$ gilt. Dann ist $v := \sum_{\ell=1}^n \alpha_\ell v_{i_\ell}$ nicht der Nullvektor in V , da $(v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V ist, jedoch gilt

$$f(v) = f\left(\sum_{\ell=1}^n \alpha_\ell v_{i_\ell}\right) = \sum_{\ell=1}^n \alpha_\ell w_{i_\ell} = 0.$$

Das bedeutet, dass v und der Nullvektor durch f beide auf den Nullvektor in W abgebildet werden, also ist f nicht injektiv.

Nun sei umgekehrt $(w_i)_{i \in I}$ linear unabhängig und $v \in V$ ein Vektor mit $f(v) = 0$. Der Vektor v hat eine Darstellung $v = \sum_{\ell=1}^n \alpha_\ell v_{i_\ell}$, und es gilt

$$0 = f(v) = f\left(\sum_{\ell=1}^n \alpha_\ell v_{i_\ell}\right) = \sum_{\ell=1}^n \alpha_\ell w_{i_\ell}.$$

Aufgrund der linearen Unabhängigkeit der Familie $(w_i)_{i \in I}$ ist das nur möglich, wenn alle $\alpha_\ell = 0$ sind, also nur dann, wenn $v = 0$ ist. Mit anderen Worten, $\text{Kern}(f) = \{0\}$, und nach **Lemma 17.6 (iv)** ist f injektiv.

Aussage (d) folgt sofort aus **Aussage (b)** und **Aussage (c)**.

Nun kommen wir zur **Aussage (i)**. Es sei also $(v_i)_{i \in I}$ linear unabhängig. Wir nutzen den **Basisergänzungssatz 13.11** (der im Fall, dass V unendlich-dimensional ist, das Zornsche Lemma und damit das Auswahlaxiom verwendet) und ergänzen die Menge zu einer Basis $(v_i)_{i \in \tilde{I}}$ von V . Wir wählen die

fehlenden $(w_i)_{\widehat{I}}$ als beliebige Vektoren in W (beispielsweise alle als den Nullvektor). Nach Aussage (i) gibt es dann eine (eindeutige) lineare Abbildung $f: V \rightarrow W$ mit der Eigenschaft $f(v_i) = w_i$ für alle $i \in \widehat{I}$, insbesondere für alle $i \in I$. \square

Beispiel 17.8 (Konstruktion linearer Abbildungen).

- (i) Es sei K ein Körper und V ein Vektorraum über K . Dann ist eine lineare Abbildung $f: K \rightarrow V$ durch einen einzigen Funktionswert, etwa $f(1) \in V$, festgelegt.
- (ii) Es sei K ein Körper und (e_1, \dots, e_m) die Standardbasis im Vektorraum K^m . Eine lineare Abbildung $f: K^m \rightarrow K^n$ ist dadurch festgelegt, dass wir die Bilder $f(e_1), \dots, f(e_m)$ der m Basisvektoren angeben, also m Elemente von K^n . Tragen wir diese Bilder spaltenweise in eine Matrix

$$A := \left[\begin{array}{c|ccc|c} & & & & \\ & & & & \\ f(e_1) & \cdots & f(e_m) & & \\ & & & & \end{array} \right]$$

ein, so gilt

$$f(x) = f\left(\sum_{j=1}^m x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^m x_j f(e_j) = Ax.$$

Eine lineare Abbildung $K^m \rightarrow K^n$ kann also durch Matrix-Vektor-Produkte $x \mapsto Ax$ realisiert werden.

- (iii) Im Vektorraum \mathbb{R}^2 mit der Standardbasis $(e_1, e_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ legt

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f(e_2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

eine lineare Abbildung fest, und zwar eine Drehung um den Winkel 30° im mathematisch positiven Sinn (gegen den Uhrzeigersinn) um den Ursprung. Allgemeiner beschreibt

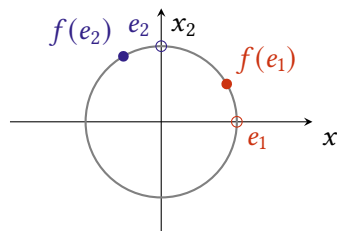
$$f(e_1) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f(e_2) = \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

eine Drehung um den Winkel α . Da $(f(e_1), f(e_2))$ eine Basis von \mathbb{R}^2 bildet, ist die Drehabbildung nach Satz 17.7 (ii) bijektiv, also ein Isomorphismus $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Die Drehabbildung kann durch Matrix-Vektor-Produkte mit der Matrix

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \tag{17.6}$$

realisiert werden.



(iv) Im Vektorraum \mathbb{R}^2 mit der Standardbasis $(e_1, e_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ legt

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

eine lineare Abbildung fest, und zwar eine Spiegelung an der x_1 -Achse. Allgemeiner beschreibt

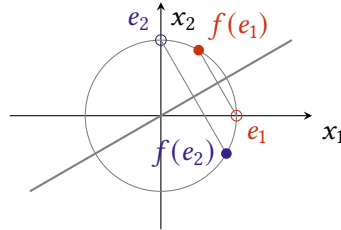
$$f(e_1) = \begin{pmatrix} \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) \\ 2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f(e_2) = \begin{pmatrix} 2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) \\ \sin^2(\alpha) - \cos^2(\alpha) \end{pmatrix}$$

eine Spiegelung an derjenigen Achse durch den Ursprung, die den Winkel α gegen die x_1 -Achse bildet. Da $(f(e_1), f(e_2))$ eine Basis von \mathbb{R}^2 bildet, ist die Spiegelungsabbildung nach Satz 17.7 (ii) bijektiv, also ein Isomorphismus $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Die Spiegelungsabbildung kann durch Matrix-Vektor-Produkte mit der Matrix

$$\begin{bmatrix} \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) & 2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) \\ 2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) & \sin^2(\alpha) - \cos^2(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{bmatrix} \quad (17.7)$$

realisiert werden. Das bedeutet, dass beide Basisvektoren e_1 und e_2 um den Winkel 2α rotiert werden, während der Basisvektor e_2 anschließend noch am Ursprung punktgespiegelt wird.



(v) Im Vektorraum \mathbb{R}^2 mit der Standardbasis $(e_1, e_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ legt

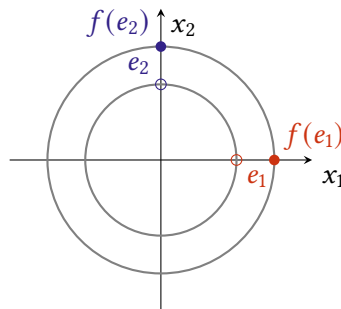
$$f(e_1) = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung fest, und zwar eine Streckung bzw. (wenn $\alpha < 0$ ist) eine Streckung und Punktspiegelung am Ursprung. Da $(f(e_1), f(e_2))$ für $\alpha \neq 0$ eine Basis von \mathbb{R}^2 bildet, ist die Streckungsabbildung nach Satz 17.7 (ii) in diesem Fall bijektiv, also ein Isomorphismus $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Die Streckungsabbildung kann durch Matrix-Vektor-Produkte mit der Matrix

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \quad (17.8)$$

realisiert werden.



- (vi) Es sei K ein Körper und $K[t]$ der Polynomraum über K (Beispiel 12.3). Die **Ableitungsabbildung** $f: K[t] \rightarrow K[t]$ ist ein linearer Endomorphismus, der durch die Festlegung

$$f(t^n) := \begin{cases} n t^{n-1} & \text{für } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{für } n = 0 \end{cases}$$

eindeutig bestimmt ist, da die Monome $(t^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Basis von $K[t]$ bilden (Beispiel 13.9).
Dabei △

Ende der Vorlesung 24

§ 17.2 DIE MATRIX-VEKTOR-MULTIPLIKATION ALS LINEARE ABBILDUNG

Die Matrix-Vektor-Multiplikation als Prototyp einer linearen Abbildung (Beispiel 17.3) ist von so zentraler Bedeutung, dass wir hier ihre Eigenschaften zusammenstellen. Kurz gesagt: Matrix-Vektor-Produkte sind die einzigen linearen Abbildungen $K^n \rightarrow K^m$, die es gibt; die Komposition linearer Abbildungen entspricht dem Produkt von Matrizen; und die inverse Abbildung entspricht der inversen Matrix.

Lemma 17.9 (Matrix-Vektor-Multiplikation als lineare Abbildung).

Es sei K ein Körper und $n, m, k \in \mathbb{N}_0$.

- (i) Ist $A \in K^{n \times m}$, dann definiert die **von A induzierte lineare Abbildung**

$$f_A: K^m \ni x \mapsto f_A(x) := Ax \in K^n \quad (17.9)$$

eine lineare Abbildung $K^m \rightarrow K^n$.

- (ii) Ist $f: K^m \rightarrow K^n$ eine lineare Abbildung, dann gibt es eine Matrix $A \in K^{n \times m}$, sodass $f = f_A$ gilt.
(iii) Sind $A \in K^{n \times m}$ und $B \in K^{m \times k}$, dann gilt

$$f_A \circ f_B = f_{AB}. \quad (17.10)$$

- (iv) $A \in K^{n \times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn $f_A: K^n \rightarrow K^n$ invertierbar ist. In diesem Fall gilt

$$(f_A)^{-1} = f_{A^{-1}}. \quad (17.11)$$

Beweis. Der Beweis ist Gegenstand von [Hausaufgabe I-12.3](#). □

§ 17.3 DER VEKTORRAUM DER VEKTORRAUMHOMOMORPHISMEN

Definition 17.10 (Menge der Homomorphismen, Endomorphismen).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(V, +, \cdot)$, $(W, +, \cdot)$ zwei Vektorräume über K .

- (i) Wir bezeichnen die Menge der linearen Abbildungen (Homomorphismen) $V \rightarrow W$ mit

$$\text{Hom}(V, W) := \{f: V \rightarrow W \mid f \text{ ist Vektorraumhomomorphismus}\}. \quad (17.12)$$

Wollen wir den Skalarkörper betonen, so schreiben wir auch $\text{Hom}_K(V, W)$.

(ii) Wir bezeichnen die Menge der Endomorphismen $V \rightarrow V$ mit

$$\text{End}(V) := \text{Hom}(V, V) = \{f: V \rightarrow V \mid f \text{ ist Vektorraumendomorphismus}\}. \quad (17.13)$$

Wollen wir den Skalarkörper betonen, so schreiben wir auch hier $\text{End}_K(V)$. \triangle

Satz 17.11 (die Homomorphismen zwischen Vektorräumen bilden einen Vektorraum).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(V, +, \cdot)$, $(W, +, \cdot)$ zwei Vektorräume über K . $(\text{Hom}(V, W), +, \cdot)$ mit der punktweisen Addition $+$ und der punktweisen S-Multiplikation \cdot

$$\begin{aligned} +: \text{Hom}(V, W) \times \text{Hom}(V, W) &\rightarrow \text{Hom}(V, W) && \text{mit } f + g \text{ definiert durch } (f + g)(u) := f(u) + g(u) \\ \cdot: K \times \text{Hom}(V, W) &\rightarrow \text{Hom}(V, W) && \text{mit } \alpha \cdot f \text{ definiert durch } (\alpha \cdot f)(u) := \alpha f(u) \end{aligned}$$

bildet einen Vektorraum über K . Der Nullvektor in $(\text{Hom}(V, W), +, \cdot)$ ist die **Nullabbildung** (englisch: *zero map*) $0: V \rightarrow W$, die jeden Vektor in V auf den Nullvektor $0 \in W$ abbildet.

Beweis. Wir prüfen die Bedingungen aus der [Definition 12.1](#) nach. Wir wissen bereits, dass die Menge der Funktionen, die auf irgendeiner Menge definiert sind und die Werte in einer abelschen Gruppe haben, selbst eine abelsche Gruppe mit der punktweisen Gruppenoperation bildet ([Beispiel 10.2](#)). Insbesondere ist also $(\text{Hom}(V, W), +)$ eine abelsche Gruppe, da $(W, +)$ eine abelsche Gruppe ist.

Weiter gelten die Distributivgesetze

$$\begin{aligned} \alpha(f + g) &= \alpha f + \alpha g \\ \text{und } (\alpha + \beta)f &= \alpha f + \beta f \end{aligned}$$

für alle $\alpha, \beta \in K$ und $f, g \in \text{Hom}(V, W)$, denn wir haben

$$\begin{aligned} [\alpha(f + g)](u) &= \alpha[(f + g)(u)] = \alpha[f(u) + g(u)] = \alpha f(u) + \alpha g(u) \\ &= (\alpha f)(u) + (\alpha g)(u) = [\alpha f + \alpha g](u) \\ \text{und } [(\alpha + \beta)f](u) &= (\alpha + \beta)f(u) = \alpha f(u) + \beta f(u) \\ &= [\alpha f + \beta f](u) \end{aligned}$$

für alle $u \in V$.

Das Assoziativgesetz

$$(\alpha\beta)f = \alpha(\beta f)$$

gilt, denn wir haben

$$[(\alpha\beta)f](u) = (\alpha\beta)f(u) = \alpha(\beta f(u)) = \alpha([\beta f](u)) = [\alpha(\beta f)](u)$$

für alle $u \in V$.

Schließlich gilt $(1f)(u) = 1f(u) = f(u)$ für alle $u \in V$, d. h., $1 \in K$ ist auch neutrales Element der S-Multiplikation. \square

Als Spezialfall von [Satz 17.11](#) ergibt sich, dass insbesondere die Endomorphismen $(\text{End}(V), +, \cdot)$ einen Vektorraum bilden. Ersetzen wir die S-Multiplikation durch die Komposition \circ , so erhalten wir einen Ring wie schon beim Endomorphismenring einer abelschen Gruppe (vgl. [Beispiel 9.2](#)):

Satz 17.12 (die Endomorphismen eines Vektorraumes bilden einen Ring).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über K . $(\text{End}(V), +, \circ)$ mit der punktweisen Addition $+$ und der Komposition \circ

$$+: \text{End}(V) \times \text{End}(V) \rightarrow \text{End}(V) \quad \text{mit } f + g \text{ definiert durch } (f + g)(u) := f(u) + g(u)$$

$$\circ: \text{End}(V) \times \text{End}(V) \rightarrow \text{End}(V) \quad \text{mit } f \circ g \text{ definiert durch } (f \circ g)(u) := f(g(u))$$

bildet einen Ring mit dem Einselement id_V , genannt der **Endomorphismenring** (englisch: **ring of endomorphisms**) des Vektorraumes $(V, +, \cdot)$, vgl. [Beispiel 9.2](#). Er ist i. A. nicht kommutativ.

Beweis. Der Beweis ist derselbe wie für den Endomorphismenring der abelschen Gruppe $(V, +)$ aus [Beispiel 9.2](#), siehe [Hausaufgabe I-6.3](#). Die Vektorraumstruktur von V spielt hier überhaupt keine Rolle. \square

§ 17.4 FAKTORRÄUME

In [§ 8.1](#) hatten wir gesehen, dass bestimmte Untergruppen namens Normalteiler N aus einer Gruppe G ausfaktoriert werden können, sodass die Faktormenge $G/N = \{[a] = a \star N \mid a \in G\}$ bestehend aus den Nebenklassen²¹ von N wieder eine Gruppenstruktur trägt, die mit der Struktur der Gruppe verträglich ist. Die letzte Aussage bedeutete, dass die kanonische Surjektion $\pi: a \mapsto [a]$, also der Übergang von einem Gruppenelement zu seiner Nebenklasse, ein (surjektiver) Gruppenhomomorphismus ist, sodass also $[a \star b] = [a] \tilde{\star} [b]$ gilt: „Erst verknüpfen, dann Übergang zur Nebenklasse ergibt dasselbe wie erst Übergang zur Nebenklasse und dann verknüpfen.“

Dieser Übergang zur Faktorgruppe $(G/N, \tilde{\star})$ – einer gröberen Version der Gruppe G – war wichtig für das Verständnis der Wirkungsweise von Gruppenhomomorphismen ([Homomorphiesatz für Gruppen 8.17](#)). Dieser Satz besagte, dass ein Gruppenhomomorphismus $f: G_1 \rightarrow G_2$ „nebenklassenweise“ in der Faktorgruppe $G_1/\text{Kern}(f)$ wirkt, also eine ganze Nebenklasse $[a] = a \star \text{Kern}(f)$ auf ein Element in $\text{Bild}(f)$ abbildet, und zwar verschiedene Nebenklassen auf verschiedene Bildelemente. Kurz gesagt: $G_1/\text{Kern}(f) \cong \text{Bild}(f)$.

Die gleiche Konstruktion könnten wir in einem Vektorraum $(V, +, \cdot)$ einsetzen, da ja $(V, +)$ eine abelsche Gruppe ist und daher sogar jede Untergruppe einen Normalteiler bildet. Allerdings zielen wir darauf ab, dass die Faktormenge nicht nur eine Gruppenstruktur trägt, sondern wieder zu einem Vektorraum wird. Diese zusätzliche Kompatibilität der Nebenklassenbildung mit der S-Multiplikation erhalten wir genau dann, wenn wir als Normalteiler nicht beliebige Untergruppen verwenden, sondern **Unterräume** von V .

Aus der Faktormenge wird damit der **Faktorraum** (englisch: **factor space**) oder **Quotientenraum** (englisch: **quotient space**) von V nach U . Man sagt auch: „Aus dem Vektorraum $(V, +, \cdot)$ wird der Unterraum U ausfaktoriert.“ Jede Nebenklasse $[v] = v + U$ heißt auch ein **affiner Unterraum parallel zu U** (englisch: **affine subspace parallel to U**). Zwei Vektoren $v_1, v_2 \in V$ gehören zur selben Nebenklasse genau dann, wenn $v_1 + U = v_2 + U$ gilt, also genau dann, wenn $v_1 - v_2 \in U$ gilt. Man ordnet einem affinen Unterraum $v + U$ die **Dimension** (englisch: **dimension**) $\dim(v + U) := \dim(U)$ zu.

Satz 17.13 (Faktorraum, vgl. [Satz 8.13](#) über Faktorgruppen).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper, $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über K und U ein Unterraum von V . Dann gilt:

²¹**Nebenklasse** war nur ein anderer Name für eine Äquivalenzklasse der durch einen Normalteiler N induzierten Äquivalenzrelation $a \stackrel{N}{\sim} b \Leftrightarrow a \star N = b \star N \Leftrightarrow a' \star b \in N$, siehe [§ 7.5](#).

(i) Auf der Faktormenge

$$V/U = \{[v] = v + U \mid v \in V\}$$

sind $\tilde{+}$ und $\tilde{\cdot}$, definiert als

$$[v] \tilde{+} [w] := [v + w] \quad \text{für } v, w \in V, \quad (17.14a)$$

$$\alpha \tilde{\cdot} [v] := [\alpha \cdot v] \quad \text{für } \alpha \in K \text{ und } v \in V, \quad (17.14b)$$

eine innere bzw. äußere Verknüpfung, bzgl. der $(V/U, \tilde{+}, \tilde{\cdot})$ einen Vektorraum über K bildet. Das neutrale Element bzgl. $\tilde{+}$ ist $[0] = U$, und für die Inversen gilt $\tilde{-}[v] = [-v]$.

(ii) Die Abbildung

$$\pi: \begin{cases} V \rightarrow V/U \\ v \mapsto [v], \end{cases} \quad (17.15)$$

die jedem Vektor $v \in V$ seine Nebenklasse $[v]$ zuordnet, ist ein surjektiver Vektorraumhomomorphismus. Sie heißt die **kanonische Surjektion** (englisch: **canonical surjection**) von V auf V/U . Es gilt $\text{Kern}(\pi) = U$.

Beweis. **Aussage (i):** Wir weisen die Bedingungen aus der **Definition 12.1** eines Vektorraumes nach.

Nach **Satz 8.13** ist $(V/U, \tilde{+})$ eine abelsche Gruppe, da $(U, +)$ insbesondere eine Untergruppe und damit ein Normalteiler der abelschen Gruppe $(V, +)$ ist.

Nun müssen wir uns zunächst davon überzeugen, dass die S-Multiplikation $\tilde{\cdot}$ überhaupt wohldefiniert ist. Es sei dazu $\alpha \in K$ und $v_1, v_2 \in V$ mit $[v_1] = [v_2]$, also $v_1 + U = v_2 + U$. Im Fall $\alpha \neq 0$ gilt $\alpha U = U$. (**Quizfrage 17.7:** Warum?) Damit folgt

$$\begin{aligned} \alpha \tilde{\cdot} [v_1] &= [\alpha v_1] && \text{nach Definition von } \tilde{\cdot} \\ &= \alpha v_1 + U && \text{nach Definition von } [\cdot] \\ &= \alpha (v_1 + U) && \text{da } \alpha U = U \text{ ist} \\ &= \alpha (v_2 + U) && \text{da } [v_1] = [v_2] \text{ vorausgesetzt wurde} \\ &= \alpha v_2 + U && \text{da } \alpha U = U \text{ ist} \\ &= [\alpha v_2] && \text{nach Definition von } [\cdot] \\ &= \alpha \tilde{\cdot} [v_2] && \text{nach Definition von } \tilde{\cdot}. \end{aligned}$$

Im Fall $\alpha = 0$ gilt

$$\begin{aligned} \alpha \tilde{\cdot} [v_1] &= [0 v_1] && \text{nach Definition von } \tilde{\cdot} \\ &= [0 v_2] && \text{da } 0 v_1 = 0 = 0 v_2 \text{ gilt} \\ &= \alpha \tilde{\cdot} [v_2] && \text{nach Definition von } \tilde{\cdot}. \end{aligned}$$

Nun weisen wir die Distributivgesetze (**12.1a**) und (**12.1b**) in $(V/U, \tilde{+}, \tilde{\cdot})$ nach:

$$\begin{aligned} \alpha \tilde{\cdot} ([v_1] \tilde{+} [v_2]) &= \alpha \tilde{\cdot} [v_1 + v_2] && \text{nach Definition von } \tilde{+} \\ &= [\alpha (v_1 + v_2)] && \text{nach Definition von } \tilde{\cdot} \\ &= [\alpha v_1 + \alpha v_2] && \text{aufgrund des Distributivgesetzes (12.1a) in } (V, +, \cdot) \\ &= [\alpha v_1] \tilde{+} [\alpha v_2] && \text{nach Definition von } \tilde{+} \\ &= \alpha \tilde{\cdot} [v_1] \tilde{+} \alpha \tilde{\cdot} [v_2] && \text{nach Definition von } \tilde{\cdot} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 (\alpha + \beta) \sim [v] &= [(\alpha + \beta)v] && \text{nach Definition von } \sim \\
 &= [\alpha v + \beta v] && \text{aufgrund des Distributivgesetzes (12.1b) in } (V, +, \cdot) \\
 &= [\alpha v] \tilde{+} [\beta v] && \text{nach Definition von } \tilde{+} \\
 &= \alpha \sim [v] \tilde{+} \beta \sim [v] && \text{nach Definition von } \sim.
 \end{aligned}$$

Es folgt das Assoziativgesetz (12.1c):

$$\begin{aligned}
 (\alpha \beta) \sim [v] &= [(\alpha \beta)v] && \text{nach Definition von } \sim \\
 &= [\alpha(\beta v)] && \text{aufgrund des Assoziativgesetzes (12.1c) in } (V, +, \cdot) \\
 &= \alpha \sim [\beta v] && \text{nach Definition von } \sim \\
 &= \alpha \sim (\beta \sim [v]) && \text{nach Definition von } \sim.
 \end{aligned}$$

Und schließlich zeigen wir, dass $1 \in K$ neutrales Element bzgl. \sim ist:

$$\begin{aligned}
 1 \sim [v] &= [1v] && \text{nach Definition von } \sim \\
 &= [v] && \text{da } 1 \text{ neutrales Element bzgl. } \cdot \text{ in } (V, +, \cdot) \text{ ist.}
 \end{aligned}$$

Damit ist $(V/U, \tilde{+}, \sim)$ als Vektorraum bestätigt. Die Aussagen über das neutrale Element $[0] = U$ und über die Inversen $\sim [v] = [-v]$ folgen bereits aus dem Satz 8.13 über die Eigenschaften der abelschen Gruppe $(V/U, \tilde{+})$.

Aussage (ii): Die Eigenschaft, ein Vektorraumhomomorphismus zu sein, bedeutet

$$\begin{aligned}
 \pi(v + w) &= \pi(v) \tilde{+} \pi(w) \\
 \text{und } \pi(\alpha v) &= \alpha \sim \pi(v)
 \end{aligned}$$

für alle $v, w \in V$ und $\alpha \in K$. Nach Definition von π heißt das aber gerade

$$\begin{aligned}
 [v + w] &= [v] \tilde{+} [w] \\
 \text{und } [\alpha v] &= \alpha \sim [v],
 \end{aligned}$$

was gerade die Definition von $\tilde{+}$ und \sim war. Die Surjektivität von π ist klar, denn ein beliebiges Element $[v]$ von V/U ist gerade das Bild von v unter π . Es gilt $\text{Kern}(\pi) = \pi^{-1}([0]) = U$. \square

Bemerkung 17.14 (Faktorraum, vgl. Bemerkung 8.14).

Praktisch können wir den Faktorraum $(V/U, \tilde{+}, \sim)$ benutzen, um wie im Vektorraum $(V, +, \cdot)$ zu „rechnen“, wobei jedoch Vektoren v, w in derselben Äquivalenzklasse (für die also $v - w \in U$ gilt) nicht mehr unterschieden werden. Der Faktorraum $(V/U, \tilde{+}, \sim)$ ist also eine „gröbere Version“ des Vektorraumes $(V, +, \cdot)$.

Die Dimension von V/U werden wir später noch charakterisieren, siehe Satz 18.6. \triangle

Beispiel 17.15 (Faktorraum, vgl. Beispiel 8.15).

- (i) Es sei V ein beliebiger Vektorraum und $U = \{0\}$ der Nullraum, einer der beiden trivialen Unterräume von V . Der zugehörige Faktorraum V/U ist isomorph zum Ausgangsraum V selbst.
- (ii) Es sei V ein beliebiger Vektorraum und $U = V$ der andere triviale Unterraum von V . Der zugehörige Faktorraum V/U ist isomorph zum Nullraum $\{0\}$.

- (iii) Es sei V der Polynomraum $K[t]$ über einem Körper K . Wählen wir $U = K_0[t]$ als den Unterraum der konstanten Polynome, dann besteht der Faktorraum V/U gerade aus Äquivalenzklassen von Polynomen, wobei zwei Polynome genau dann in derselben Äquivalenzklasse (Nebenklasse) liegen, wenn sie sich nur um eine additive Konstante unterscheiden. \triangle

Bemerkung 17.16 (Unterräume sind genau die Kerne von Vektorraumhomomorphismen, vgl. [Bemerkung 8.16](#)).

Es sei $(V, +, \cdot)$ über dem Körper K .

- (i) Nach [Lemma 17.6](#) ist $\text{Kern}(f)$ für jeden beliebigen Vektorraumhomomorphismus $f: V \rightarrow W$ in jeden beliebigen Vektorraum $(W, +, \cdot)$ über demselben Körper K immer ein Unterraum von $(V, +, \cdot)$.
- (ii) Umgekehrt ist jeder Unterraum U von V der Kern eines geeignet gewählten Vektorraumhomomorphismus: Wähle z. B. W als den Faktorraum $(V/U, \tilde{+}, \tilde{\cdot})$ und als Homomorphismus die kanonische Surjektion $V \rightarrow V/U$. \triangle

§ 17.5 DER HOMOMORPHIESATZ FÜR VEKTORRÄUME

Mit Hilfe des Wissens über Faktorräume können wir nun die Struktur von Vektorraumhomomorphismen genauer analysieren. Der folgende Struktursatz besagt, dass ein Vektorraumhomomorphismus $f: V \rightarrow W$ „nebenklassenweise“ wirkt. Er bildet also eine gesamte Nebenklasse von $\text{Kern}(f)$ (das ist ein affiner Unterraum parallel zu $\text{Kern}(f)$) auf ein- und dasselbe Element von W ab und verschiedene Nebenklassen auf verschiedene Elemente. Dadurch ist das Bild $\text{Bild}(f)$ eines solchen Vektorraumhomomorphismus bereits im Wesentlichen (d. h. bis auf Isomorphie) festgelegt durch $(V, +, \cdot)$ und den Unterraum $\text{Kern}(f)$.

Satz 17.17 (Homomorphiesatz für Vektorräume²², vgl. [Homomorphiesatz für Gruppen 8.17](#)).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(V, +, \cdot), (W, +, \cdot)$ zwei Vektorräume über K . Weiter sei $f: V \rightarrow W$ ein Homomorphismus. Dann gilt

$$V / \text{Kern}(f) \cong \text{Bild}(f) \quad (17.16a)$$

mit dem Isomorphismus

$$I([v]) := f(v) \quad \text{für } [v] = v + \text{Kern}(f) \in V / \text{Kern}(f). \quad (17.16b)$$

Beweis. Der Vektorraumhomomorphismus ist insbesondere ein Gruppenhomomorphismus $f: (V, +) \rightarrow (W, +)$, und $\text{Kern}(f) = \{u \in V \mid f(u) = 0\}$ hängt nicht davon ab, ob wir f als Homomorphismus von Gruppen oder von Vektorräumen betrachten. Aus dem [Homomorphiesatz für Gruppen 8.17](#) folgt also sofort, dass $V / \text{Kern}(f)$ und $\text{Bild}(f)$ im Sinne von Gruppen isomorph sind, und zwar durch den Isomorphismus (17.16b).

Es bleibt nur zu zeigen, dass I tatsächlich auch ein Isomorphismus im Sinne von Vektorräumen ist. Dazu fehlt nur der Nachweis der Homogenität (17.1b), der aber einfach zu erbringen ist:

$$\begin{aligned} I(\alpha \cdot [v]) &= I([\alpha v]) && \text{nach Definition von } \cdot \\ &= f(\alpha v) && \text{nach Definition von } I \\ &= \alpha f(v) && \text{aufgrund der Homogenität von } f \\ &= \alpha I([v]) && \text{nach Definition von } I. \end{aligned} \quad \square$$

²²englisch: [fundamental theorem on vector space homomorphisms](#)

Beispiel 17.18 (Homomorphiesatz für Vektorräume, vgl. [Beispiel 8.18](#)).

- (i) Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(V, +, \cdot)$, $(W, +, \cdot)$ zwei Vektorräume über K . Wir betrachten den Nullhomomorphismus $f: V \rightarrow W$ mit $f(v) = 0$ für alle $v \in V$. Gemäß [Homomorphiesatz für Vektorräume 17.17](#) ist

$$V / \text{Kern}(f) = V / V \cong \{0\}.$$

- (ii) Es seien K ein Körper und $V := K[t]$ der Polynomraum über K ([Beispiel 12.3](#)). Wir betrachten die Ableitungsabbildung $f: K[t] \rightarrow K[t]$ aus [Beispiel 17.8](#), einen linearen Endomorphismus. Diese Abbildung ist surjektiv, aber nicht injektiv. Es gilt $\text{Kern}(f) = K_0[t]$, der Unterraum der konstanten Polynome. Gemäß [Homomorphiesatz für Vektorräume 17.17](#) ist

$$V / \text{Kern}(f) = K[t] / K_0[t] \cong \text{Bild}(f) = K[t].$$

In diesem Fall wird also das Bild trotz Ausfaktorisierung eines eindimensionalen Unterraumes nicht kleiner (geringer in der Dimension) als der Ursprungsraum $V = K[t]$. Das kann nur passieren, wenn $\dim(V) = \infty$ gilt.

Jede Äquivalenzklasse besteht aus denjenigen Polynomen, die sich nur um eine additive Konstante unterscheiden und daher durch die Ableitungsabbildung auf dasselbe Polynom abgebildet werden. Durch $\text{Kern}(f)$ werden die konstante Polynom ausfaktoriert.

- (iii) Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $V := (K^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ der Vektorraum aller K -wertigen Folgen. Wir betrachten den Homomorphismus $f: K^{\mathbb{N}} \rightarrow K$, der definiert ist durch

$$f((y_i)_{i \in \mathbb{N}}) := y_1 \in K,$$

der also die Folge auf das erste Folgeelement abbildet. Dann ist $\text{Kern}(f) = \{(y_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid y_1 = 0\}$, also besteht $K^{\mathbb{N}} / \text{Kern}(f)$ aus Äquivalenzklassen von Folgen, die jeweils im ersten Folgenglied übereinstimmen. Eine gesamte Äquivalenzklasse wird auf ein- und dasselbe Element von K abgebildet. Gemäß [Homomorphiesatz für Vektorräume 17.17](#) ist

$$V / \text{Kern}(f) = K^{\mathbb{N}} / \text{Kern}(f) \cong \text{Bild}(f) = K. \quad \triangle$$

Abschließend stellen wir den [Homomorphiesatz für Vektorräume 17.17](#) nochmal schematisch mit Hilfe eines kommutativen Diagrammes dar. Dazu sei $i: \text{Bild}(f) \ni w \mapsto w \in W$ der injektive Homomorphismus der kanonischen Einbettung.

$$\begin{array}{ccc} W & \xleftarrow{f} & V \\ i \uparrow & & \downarrow \pi \\ \text{Bild}(f) & \xleftarrow{I} & V / \text{Kern}(f) \end{array}$$

Das Diagramm besagt:

$$f = \underbrace{i}_{\text{einbetten}} \circ \underbrace{I}_{\text{isomorph abbilden}} \circ \underbrace{\pi}_{\text{vergrößern}}.$$

§ 18 DIMENSIONSSÄTZE

Literatur: Fischer, Springborn, 2020, Kapitel 3.2, Bosch, 2014, Kapitel 2, Beutelspacher, 2014, Kapitel 5.2

Wir wollen in diesem Abschnitt den Zusammenhang der Dimensionen der am **Homomorphiesatz für Vektorräume 17.17** beteiligten Räume V , $\text{Kern}(f)$ und $\text{Bild}(f)$ untersuchen.

§ 18.1 ZUSAMMENHANG VON DIMENSION UND ISOMORPHIE

Als Folgerungen aus dem **Existenz- und Eindeutigkeitsatz für Vektorraumhomomorphismen 17.7** erhalten wir folgende bemerkenswerte Resultate:

Folgerung 18.1 (isomorphe Vektorräume besitzen dieselbe Dimension²³).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(V, +, \cdot)$, $(W, +, \cdot)$ zwei Vektorräume über K . Sind V und W isomorph, dann gilt $\dim(V) = \dim(W)$.

Beweis. Es sei $f: V \rightarrow W$ ein Isomorphismus. Nach **Folgerung 13.12** existiert eine Basis $(v_i)_{i \in I}$ von V . Setze $w_i := f(v_i)$ für $i \in I$. Dann ist nach **Satz 17.7 (ii) (d)** $(w_i)_{i \in I}$ eine Basis von W . Beide Basen sind gleichmächtig, also gilt $\dim(V) = \dim(W)$. \square

Folgerung 18.2 (Vektorräume gleicher endlicher Dimension sind isomorph).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(V, +, \cdot)$, $(W, +, \cdot)$ zwei **endlich-dimensionale** Vektorräume über K . Dann sind äquivalent:

- (i) V und W sind isomorphe Vektorräume.
- (ii) $\dim(V) = \dim(W)$.

Beweis. **Aussage (i) \Rightarrow Aussage (ii)** ist gerade die Aussage des **Lemmas 18.2**.

Aussage (ii) \Rightarrow Aussage (i): Es gelte $\dim(V) = \dim(W) = n \in \mathbb{N}_0$. Es seien (v_1, \dots, v_n) eine beliebige Basis von V und (w_1, \dots, w_n) eine beliebige Basis von W . Nach **Satz 17.7 (ii)** gibt es genau eine lineare Abbildung $f: V \rightarrow W$ mit der Eigenschaft $f(v_i) = w_i$ für alle $i = 1, \dots, n$. Nach **Satz 17.7 (ii) (d)** ist dieses f bijektiv, also sind V und W zueinander isomorph. \square

Folgerung 18.2 besagt, dass es bis auf Isomorphie nur einen einzigen K -Vektorraum der Dimension $n \in \mathbb{N}_0$ gibt! Alle K -Vektorräume V mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$ sind zueinander isomorph. Das werden wir später in § 19 noch ausnutzen.

Es gilt sogar:

Satz 18.3 (Vektorräume mit gleichmächtigen Basen sind isomorph²⁴).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(V, +, \cdot)$, $(W, +, \cdot)$ zwei Vektorräume über K . Dann sind äquivalent:

- (i) V und W sind isomorphe Vektorräume.

²³Dieses Resultat hängt im Fall, dass V unendlich-dimensional ist, vom Zornschen Lemma und damit vom Auswahlaxiom ab.

²⁴Dieses Resultat verwendet das Auswahlaxiom.

(ii) Es gibt eine Basis $(v_i)_{i \in I}$ von V und eine Basis $(w_j)_{j \in J}$ von W , die gleichmächtig sind.

Als Folgerung gibt es also zu jeder Kardinalzahl eine Äquivalenzklasse isomorpher Vektorräume. Wir können die Vektorräume K^n , $n \in \mathbb{N}_0$, als natürliche Repräsentanten der Vektorräume mit Basis der Mächtigkeit n ansehen. Weiter ist der Polynomraum $K[t]$ der natürliche Repräsentant der Vektorräume mit abzählbar unendlicher Basis.

§ 18.2 DIMENSION VON FAKTORRÄUMEN

In diesem Abschnitt bestimmen wir die Dimension eines Faktorraumes V/U . Zur Vorbereitung benötigen wir folgendes Resultat.

Satz 18.4 (Isomorphiesatz).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über K sowie U_1, U_2 zwei Unterräume von V . Dann gilt:

$$(U_1 + U_2) / U_1 \cong U_2 / (U_1 \cap U_2). \quad (18.1)$$

Beweis. Die Beweisidee basiert darauf, einen surjektiven Homomorphismus $f: U_2 \rightarrow (U_1 + U_2) / U_1$ anzugeben mit $\text{Kern}(f) = U_1 \cap U_2$. Aus dem [Homomorphiesatz für Vektorräume 17.17](#) folgt dann $U_2 / \text{Kern}(f) = U_2 / (U_1 \cap U_2) \cong \text{Bild}(f) = (U_1 + U_2) / U_1$, also die Behauptung (18.1).

Wir definieren $f(u_2) := [u_2] = u_2 + U_1$ für $u_2 \in U_2$. (Im gesamten Beweis bedeutet $[\cdot]$ immer eine Nebenklasse von U_1 .)

Schritt 1: $f: U_2 \rightarrow (U_1 + U_2) / U_1$ ist ein Homomorphismus:

Zunächst stellen wir fest, dass $f(u_2) = u_2 + U_1$ in U_2 / U_1 liegt, also erst recht in $(U_1 + U_2) / U_1$. Wir weisen die Linearität nach:

$$\begin{aligned} f(u_2 + v_2) &= [u_2 + v_2] && \text{nach Definition von } f \\ &= [u_2] \tilde{+} [v_2] && \text{mit } \tilde{+} \text{ in } (U_1 + U_2) / U_1 \\ &= f(u_2) \tilde{+} f(v_2) && \text{nach Definition von } f \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f(\alpha u_2) &= [\alpha u_2] && \text{nach Definition von } f \\ &= \alpha \tilde{\cdot} [u_2] && \text{mit } \tilde{\cdot} \text{ in } (U_1 + U_2) / U_1 \\ &= \alpha \tilde{\cdot} f(u_2) && \text{nach Definition von } f. \end{aligned}$$

Schritt 2: $\text{Kern}(f) = U_1 \cap U_2$:

Es ist

$$\begin{aligned} \text{Kern}(f) &= \{u_2 \in U_2 \mid f(u_2) = [0]\} && \text{nach Definition des Kerns} \\ &&& \text{und des neutralen Elements } [0] \text{ in } (U_1 + U_2) / U_1 \\ &= \{u_2 \in U_2 \mid [u_2] = [0]\} && \text{nach Definition von } f \\ &= \{u_2 \in U_2 \mid u_2 - 0 \in U_1\} && \text{nach Definition von } [\cdot] \\ &= U_1 \cap U_2. \end{aligned}$$

Schritt 3: f ist surjektiv, d. h., $\text{Bild}(f) = (U_1 + U_2) / U_1$.

Es sei $[w] \in (U_1 + U_2) / U_1$. Wegen $w \in U_1 + U_2$ existieren $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$ mit $w = u_1 + u_2$. Das heißt aber $[w] = u_1 + u_2 + U_1 = u_2 + U_1 = [u_2] = f(u_2)$. \square

Folgerung 18.5 (Isomorphiesatz).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über K sowie U_1, U_2 zwei Unterräume von V . Wenn $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ gilt, dann ist

$$(U_1 \oplus U_2) / U_1 \cong U_2. \quad (18.2)$$

Beweis. Nach [Satz 18.4](#) gilt

$$(U_1 + U_2) / U_1 \cong U_2 / (U_1 \cap U_2).$$

Die Direktheit der Summe $U_1 \oplus U_2$ bedeutet $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, also gilt

$$(U_1 + U_2) / U_1 \cong U_2 / \{0\} = \{[u_2] = u_2 + \{0\} \mid u_2 \in U_2\} \cong U_2,$$

vgl. auch [Beispiel 17.15](#). \square

Nun können wir die Dimension von Faktorräumen bestimmen:

Satz 18.6 (Dimension des Faktorraumes²⁵).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über K sowie U ein Unterraum von V . Dann gilt

$$(i) \quad \dim(V) = \dim(U) + \dim(V/U) \quad (18.3)$$

Wenn $\dim(V) = \infty$ ist, dann hat also mindestens einer der Räume U und V/U ebenfalls unendliche Dimension.

$$(ii) \quad \dim(V/U) = \text{codim}(U). \quad (18.4)$$

(iii) Ist V endlich-dimensional, dann gilt auch

$$\dim(V/U) = \dim(V) - \dim(U). \quad (18.5)$$

Beweis. [Aussage \(i\)](#) und [Aussage \(ii\)](#): Nach [Folgerung 14.9](#) existiert ein zu U komplementärer Unterraum W , sodass also $V = U \oplus W$ gilt. Dieses Resultat haben wir, ausgehend von einer Basis B_U von U , mit Hilfe des [Basisergänzungssatzes 13.11](#) durch Ergänzung zu einer Basis B von V bewiesen, wobei $B_W := B \setminus B_U$ eine Basis von B_W ergibt.

Es gilt also

$$\dim(V) = \dim(U) + \dim(W) \quad \text{und} \quad \dim(W) = \text{codim}(U)$$

nach [Definition 14.10](#) der Kodimension. Diese Gleichung gilt auch im Fall $\dim(V) = \infty$, wobei dann mindestens einer der Räume U und W ebenfalls unendliche Dimension besitzt. Nach [Folgerung 18.5](#) ist

²⁵Dieses Resultat hängt im Fall, dass V unendlich-dimensional ist, vom Zornschen Lemma und damit vom Auswahlaxiom ab.

$V/U = (U \oplus W)/U \cong W$. Da isomorphe Vektorräume dieselbe Dimension besitzen ([Folgerung 18.1](#)), folgen

$$\dim(V) = \dim(U) + \dim(V/U) \quad \text{und} \quad \dim(V/U) = \text{codim}(U),$$

also [\(18.3\)](#) und [\(18.4\)](#).

Aussage (iii): Wenn $\dim(V)$ endlich ist, dann sind auch die Dimensionen der Unterräume $\dim(U)$ und $\dim(W) = \dim(V/U)$ endlich ([Folgerung 13.22](#)), und wir können [\(18.3\)](#) auflösen nach $\dim(V/U)$ auflösen, um [\(18.5\)](#) zu erhalten. \square

§ 18.3 DIMENSIONEN IM HOMOMORPHIESATZ

Mit Hilfe von [Satz 18.6](#) können wir nun die Dimensionen der Räume V , $\text{Kern}(f)$ und $\text{Bild}(f)$ im [Homomorphiesatz für Vektorräume 17.17](#) untersuchen:

Folgerung 18.7 (Dimensionen der Räume im [Homomorphiesatz für Vektorräume 17.17](#)²⁶).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(V, +, \cdot)$, $(W, +, \cdot)$ zwei Vektorräume über K . Weiter sei $f: V \rightarrow W$ ein Homomorphismus. Dann gilt

$$\dim(\text{Kern}(f)) + \dim(\text{Bild}(f)) = \dim(V). \quad (18.6)$$

Beweis. Mit $U := \text{Kern}(f)$ folgt

$$\dim(V) = \dim(\text{Kern}(f)) + \dim(V/\text{Kern } f)$$

aus [\(18.3\)](#). Da nach dem [Homomorphiesatz für Vektorräume 17.17](#) $\text{Bild}(f)$ und $V/\text{Kern } f$ isomorph sind und nach [Folgerung 18.1](#) isomorphe Vektorräume dieselbe Dimension besitzen, ist [\(18.6\)](#) gezeigt. \square

Definition 18.8 (Rang und Defekt eines Homomorphismus).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(V, +, \cdot)$, $(W, +, \cdot)$ zwei Vektorräume über K . Weiter sei $f: V \rightarrow W$ ein Homomorphismus. Dann heißt

$$\text{Rang}(f) := \dim(\text{Bild}(f)) \quad (18.7)$$

der **Rang** (englisch: **rank**) der linearen Abbildung f , und

$$\text{Defekt}(f) := \dim(\text{Kern}(f)) \quad (18.8)$$

heißt der **Defekt** (englisch: **defect**) von f . \triangle

Wir können also die Dimensionsformel [\(18.6\)](#) auch in der Form

$$\text{Defekt}(f) + \text{Rang}(f) = \dim(V) \quad (18.9)$$

schreiben.

Das folgende Resultat erleichtert der Nachweis der Bijektivität (also der Isomorphismus-Eigenschaft) einer linearen Abbildung erheblich.

²⁶Dieses Resultat hängt im Fall, dass V unendlich-dimensional ist, vom Zornschen Lemma und damit vom Auswahlaxiom ab.

Folgerung 18.9 (Charakterisierung der Bijektivität von Homomorphismen endlich-dimensionaler Vektorräume).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(V, +, \cdot)$, $(W, +, \cdot)$ zwei Vektorräume über K sowie $f: V \rightarrow W$ ein Homomorphismus.

- (i) Haben V und W **dieselbe endliche Dimension** $\dim(V) = \dim(W)$, dann sind äquivalent:
- (a) f ist injektiv.
 - (b) $\text{Defekt}(f) = 0$.
 - (c) f ist surjektiv.
 - (d) $\text{Rang}(f) = \dim(V)$.
 - (e) f ist bijektiv.
- (ii) Ist V endlich-dimensional und gilt $\dim(V) < \dim(W) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, dann kann f nicht surjektiv sein.
- (iii) Ist W endlich-dimensional und gilt $\dim(W) < \dim(V) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, dann kann f nicht injektiv sein.
- (iv) Es sei V oder W endlich-dimensional. Ein Isomorphismus $V \rightarrow W$ existiert genau dann, wenn der andere Vektorraum auch endlich-dimensional ist und $\dim(V) = \dim(W)$ gilt.

Beweis. Der Beweis ist Gegenstand von [Hausaufgabe I-13.2](#). □

Beispiel 18.10 (Charakterisierung der Bijektivität von Homomorphismen endlich-dimensionaler Vektorräume).

In diesem Beispiel illustrieren wir verschiedene Fälle aus [Folgerung 18.9](#).

- (i) Ein injektiver Homomorphismus $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, der nicht surjektiv ist:

$$f(x) := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x.$$

- (ii) Ein surjektiver Homomorphismus $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, der nicht injektiv ist:

$$f(x) := \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x.$$

- (iii) Sind V und W beide unendlich-dimensional, so können alle Fälle auftreten:

- Die Ableitungsabbildung $f: K[t] \rightarrow K[t]$ ist surjektiv, aber nicht injektiv ([Beispiel 17.18](#)).
- Die Abbildung $f: K[t] \rightarrow K[t]$ definiert durch $f(p) = t \cdot p$ ist injektiv, aber nicht surjektiv.
- Die Abbildung $f: K[t] \rightarrow K[t]$ definiert durch $f(p) = -p$ ist bijektiv.
- Die Nullabbildung $f: K[t] \rightarrow K[t]$ definiert durch $f(p) = 0$ ist weder injektiv noch surjektiv. △

§ 19 MATRIZEN ZUR DARSTELLUNG LINEARER ABBILDUNGEN

Literatur: Fischer, Springborn, 2020, Kapitel 3.4–3.5, Beutelspacher, 2014, Kapitel 5.2

Im gesamten § 19 sind alle Vektorräume **endlich-dimensional**. Wir erinnern an **Folgerung 18.2**, die besagt, dass es bis auf Isomorphie nur einen einzigen K -Vektorraum der Dimension $n \in \mathbb{N}_0$ gibt! Alle K -Vektorräume V mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$ sind also zueinander isomorph. Es ist daher möglich und praktisch, für jeden n -dimensionalen K -Vektorraum V eine Art gemeinsame Standarddarstellung zu finden. Dafür bietet sich der Standardvektorraum K^n an.

§ 19.1 DIE KOORDINATENDARSTELLUNG EINES ENDLICH-DIMENSIONALEN VEKTORRAUMES

Der folgende Satz gibt an, wie wir mit Hilfe einer Basis von V einen Isomorphismus $K^n \rightarrow V$ erhalten können.

Satz 19.1 (Koordinatendarstellung).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über K mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei die Familie $B = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V . Dann ist die Abbildung

$$\Phi_B: K^n \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^n x_i v_i \in V \quad (19.1)$$

ein linearer Isomorphismus $K^n \rightarrow V$. Der zu Φ_B inverse Isomorphismus ist die Abbildung

$$\Phi_B^{-1}: V \ni v \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n, \quad (19.2)$$

die jedem Vektor $v \in V$ seinen eindeutigen **Koordinatenvektor** (englisch: **coordinate vector**) $x \in K^n$ bzgl. der Basis B zuordnet. Wir nennen daher Φ_B^{-1} auch die **Koordinatenabbildung** (englisch: **coordinate map**) bzgl. der Basis B .²⁷ Der Eintrag $x_i \in K$ heißt die i -te **Koordinate** (englisch: **coordinate**) des Vektors $v \in V$ bzgl. der Basis B .

Beweis. Φ_B ist linear und bildet die Basis (e_1, \dots, e_n) in K^n auf die Basis (v_1, \dots, v_n) ab. Damit ist Φ_B nach **Satz 17.7 (ii) (d)** bijektiv, also ein linearer Isomorphismus, und die Inverse Φ_B^{-1} ebenfalls. \square

Wir werden Koordinatenvektoren typischerweise mit x bezeichnen.

Beispiel 19.2 (Koordinatendarstellung).

- (i) Das Polynom $7t^2 - 3t + 5$ hat in der Monombasis $(1, t, t^2)$ von $\mathbb{R}_2[t]$ den Koeffizientenvektor $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$, denn es gilt

$$7t^2 - 3t + 5 = 5 \cdot 1 + (-3) \cdot t + 7 \cdot t^2.$$

²⁷Hier zeigt sich der Grund, warum wir den Standardvektorraum K^n , der in **Beispiel 12.3** eingeführt wurde, auch als **Koordinatenraum** bezeichnen. Statt **Koordinaten** kann man auch von den **Komponenten** (englisch: **components**) bzgl. der Basis B sprechen.

(ii) Um dasselbe Polynom $7t^2 - 3t + 5$ in der Basis $(t^2 - t + 1, t^2 + 3, t + 1)$ darzustellen, schreiben wir es als Linearkombination der Basisvektoren mit unbekanntem Koeffizientenvektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ auf:

$$7t^2 - 3t + 5 = x_1(t^2 - t + 1) + x_2(t^2 + 3) + x_3(t + 1).$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

mit der eindeutigen Lösung $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix}$. (**Quizfrage 19.1:** Warum muss sich hier zwingend eine eindeutige Lösung ergeben?)

Probe:

$$\begin{aligned} & 13(t^2 - t + 1) + (-6)(t^2 + 3) + 10(t + 1) \\ &= (13 - 6)t^2 + (-13 + 10)t + (13 - 18 + 10) \\ &= 7t^2 - 3t + 5. \end{aligned}$$

△

Beachte: Zur Bestimmung des Koordinatenvektors $\Phi_B^{-1}(v)$ eines Vektors $v \in V$ muss man i. A. ein lineares Gleichungssystem lösen!

§ 19.2 DARSTELLUNG LINEARER ABBILDUNGEN DURCH MATRIZEN

Aus Satz 17.7 wissen wir, dass eine lineare Abbildung bereits durch die Bilder der Vektoren einer Basis eindeutig festgelegt ist. Die wesentliche Idee bei der Darstellung einer linearen Abbildung $V \rightarrow W$ mit Hilfe einer Matrix ist nun,

- alle Vektoren in V durch ihre Koordinatenvektoren bzgl. einer Basis darzustellen,
- ebenso alle Vektoren in W durch ihre Koordinatenvektoren bzgl. einer Basis darzustellen
- und nur noch mit den Koordinatenvektoren zu rechnen, für die die lineare Abbildung notwendigerweise die Form von Matrix-Vektor-Produkten hat.

Als Konsequenz können wir jede lineare Abbildung zwischen beliebigen endlich-dimensionalen Vektorräumen immer in der gleichen, einfachen und konkreten Form von Matrix-Vektor-Produkten darstellen.

Satz 19.3 (Darstellungssatz für lineare Abbildungen).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(V, +, \cdot), (W, +, \cdot)$ zwei endlich-dimensionale Vektorräume über K . Weiter seien $B_V = (v_1, \dots, v_m)$ und $B_W = (w_1, \dots, w_n)$ Basen von V bzw. von W . Dann gibt es zu jeder linearen Abbildung $f: V \rightarrow W$ eine eindeutig definierte Matrix $A \in K^{n \times m}$ mit der Eigenschaft

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} w_i \quad \text{für alle } j = 1, \dots, m. \tag{19.3}$$

Diese Matrix A heißt auch die **Darstellungsmatrix der Abbildung f bzgl. der Basen B_V und B_W** (englisch: **representation matrix**), in Symbolen: $A = \mathcal{M}_{B_W}^{B_V}(f)$.

Beweis. f ist durch die Bilder $f(v_j)$ der Basisvektoren $v_j, j = 1, \dots, m$, nach [Satz 17.7](#) eindeutig festgelegt. Für jeden Vektor $f(v_j) \in W$ ist wiederum sein Koordinatenvektor bzgl. der Basis (w_1, \dots, w_n) eindeutig festgelegt. Dieser Koordinatenvektor $\Phi_{B_W}^{-1}(f(v_j))$ bildet aber gerade die j -Spalte von A , die damit eindeutig festgelegt ist. \square

Die Darstellung (19.3) definiert das Bild des j -ten Basisvektors v_j als Linearkombination in der Basis von W . Die j -te Spalte $a_{\bullet j}$ der Darstellungsmatrix A enthält die Koordinaten von $f(v_j) \in W$ bzgl. der Basis B_W . Unsere Konvention beim Symbol der Darstellungsmatrix ist $\mathcal{M}_{\text{nach}}^{\text{von}}$, d. h., die Basis des Definitionsraumes („von“) der darzustellenden Abbildung steht oben, und die Basis des Zielraumes („nach“) steht unten.

Beispiel 19.4 (Darstellungsmatrizen von Homomorphismen).

- (i) Ist $V = K^m$ und $W = K^n$ und die lineare Abbildung $f_A: K^m \rightarrow K^n$ durch Matrix-Vektor-Multiplikation mit einer Matrix A ([Lemma 17.9](#)) gegeben, also $f_A(x) = Ax$, dann ist A selbst die Darstellungsmatrix $\mathcal{M}_{B_W}^{B_V}(f)$, wenn $B_V = (e_1, \dots, e_m)$ und $B_W = (e_1, \dots, e_n)$ als die Standardbasen in K^m und K^n gewählt werden. Insbesondere hat beispielsweise die Drehabbildung aus [Beispiel 17.8](#) als Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ bzgl. der Standardbasis die Darstellungsmatrix

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix},$$

siehe (17.6).

- (ii) Im Vektorraum $V = K^{\llbracket 1,5 \rrbracket}$ der endlichen Folgen (hier der Länge 5) über einem Körper K ist die **Shift-Abbildung** (englisch: **shift map**)

$$f: V \ni (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) \mapsto (0, y_1, y_2, y_3, y_4) \in W = V$$

definiert durch Einfügen einer Null am Anfang der Folge und die **zyklische Shift-Abbildung** (englisch: **cyclic shift map**) definiert durch

$$g: V \ni (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) \mapsto (y_5, y_1, y_2, y_3, y_4) \in W = V.$$

Bzgl. der Basen $B_V = B_W = ((1, 0, 0, 0, 0), \dots, (0, 0, 0, 0, 1))$ haben diese Endomorphismen die folgende Darstellung:

$$\mathcal{M}_{B_W}^{B_V}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{M}_{B_W}^{B_V}(g) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (iii) Auf dem Vektorraum $V = \mathbb{R}_3[t]$ der Polynome über \mathbb{R} vom Höchstgrad 3 mit der Monombasis $(1, t, t^2, t^3)$ betrachten wir die lineare Abbildung (drei Punktauswertungen der zugehörigen Polynomfunktion) mit Werten in $W = \mathbb{R}^3$

$$\mathbb{R}_3[t] \ni p \mapsto \begin{pmatrix} \tilde{p}(-2) \\ \tilde{p}(0) \\ \tilde{p}(2) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Verwenden wir in \mathbb{R}^3 die Standardbasis, so besitzt diese Abbildung die Darstellungsmatrix

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

(iv) Wir betrachten den zweidimensionalen Vektorraum $V = \mathbb{C}$ über dem Körper \mathbb{R} mit der Basis $B_V = (1, i)$ sowie den eindimensionalen Vektorraum $W = \mathbb{R}$ über dem Körper \mathbb{R} mit der Basis $B_W = (1)$. Die lineare Abbildung $\text{Re}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ (Realteil) hat dann die Darstellungsmatrix

$$\mathcal{M}_{B_W}^{B_V}(\text{Re}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},$$

während die lineare Abbildung $\text{Im}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ (Imaginärteil) die Darstellungsmatrix

$$\mathcal{M}_{B_W}^{B_V}(\text{Im}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{19.4}$$

besitzt.

(v) Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und V und W Vektorräume über K . Es sei $\dim(V) = m$, $\dim(W) = n$ und $f: V \rightarrow W$ ein Homomorphismus mit $r = \text{Rang}(f)$ und daher $\text{Defekt}(f) = \dim(\text{Kern}(f)) = m - r$ nach Dimensionsformel (18.6). Wir wählen die Basen so, dass gilt

$$B_W = (\underbrace{w_1, \dots, w_r}_{\text{Basis von Bild}(f)}, \underbrace{w_{r+1}, \dots, w_n}_{\text{Ergänzung zu einer Basis von } W})$$

und

$$B_V = (\underbrace{v_1, \dots, v_r}_{\text{siehe unten}}, \underbrace{v_{r+1}, \dots, v_m}_{\text{Basis von Kern}(f)}).$$

Dabei sei $v_j \in f^{-1}(\{w_j\})$, sodass also $f(v_j) = w_j$ gilt für $j = 1, \dots, r$. Bzgl. dieser angepassten Basen hat f die Darstellungsmatrix

$$\mathcal{M}_{B_W}^{B_V}(f) = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \in K^{n \times m}.$$

(vi) Im Fall $V = W$ und für eine beliebige Wahl $B_V = B_W$ der Basis hat die Identitätsabbildung $\text{id}_V: V \rightarrow V$ die Darstellungsmatrix

$$\mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(\text{id}_V) = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & \diagdown & & \\ 0 & & \diagdown & \\ & & & \diagdown \\ 0 & & & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

also die Einheitsmatrix der passenden Dimension. △

Satz 19.5 (die Zuordnung zur Darstellungsmatrix ist ein Vektorraumisomorphismus).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(V, +, \cdot)$, $(W, +, \cdot)$ zwei endlich-dimensionale Vektorräume über K . Weiter seien $B_V = (v_1, \dots, v_m)$ und $B_W = (w_1, \dots, w_n)$ Basen von V bzw. von W . Die Zuordnung

$$\mathcal{M}_{B_W}^{B_V}: \text{Hom}(V, W) \ni f \mapsto \mathcal{M}_{B_W}^{B_V}(f) \in K^{n \times m} \tag{19.5}$$

eines Homomorphismus zu seiner Darstellungsmatrix ist ein Isomorphismus von Vektorräumen.

Beweis. Schritt 1: Wir zeigen zunächst die Linearität von $\mathcal{M}_{B_W}^{B_V}$.

Es seien dazu $f, g \in \text{Hom}(V, W)$, $A := \mathcal{M}_{B_W}^{B_V}(f)$ und $B := \mathcal{M}_{B_W}^{B_V}(g)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (f+g)(v_j) &= f(v_j) + g(v_j) \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ij} w_i + \sum_{i=1}^n b_{ij} w_i \\ &= \sum_{i=1}^n (a_{ij} + b_{ij}) w_i \end{aligned}$$

für alle $j = 1, \dots, m$. Das heißt $\mathcal{M}_{B_W}^{B_V}(f+g) = \mathcal{M}_{B_W}^{B_V}(f) + \mathcal{M}_{B_W}^{B_V}(g)$. Weiter gilt für $\alpha \in K$

$$\begin{aligned} (\alpha f)(v_j) &= \alpha f(v_j) \\ &= \alpha \sum_{i=1}^n a_{ij} w_i \\ &= \sum_{i=1}^n (\alpha a_{ij}) w_i \end{aligned} \tag{19.6}$$

für alle $j = 1, \dots, m$. Das heißt $\mathcal{M}_{B_W}^{B_V}(\alpha f) = \alpha \mathcal{M}_{B_W}^{B_V}(f)$.

Schritt 2: Wir zeigen: $\mathcal{M}_{B_W}^{B_V}$ ist injektiv.

Es sei dazu $f \in \text{Hom}(V, W)$ so, dass $\mathcal{M}_{B_W}^{B_V}(f) = 0 \in K^{n \times m}$ (die Nullmatrix) ergibt. Das heißt,

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^n 0 w_i = 0$$

für alle $j = 1, \dots, m$. Damit ist $f: V \rightarrow W$ der Nullhomomorphismus, also der Nullvektor von $\text{Hom}(V, W)$. Daher gilt $\text{Kern}(\mathcal{M}_{B_W}^{B_V}) = \{0\}$, und nach [Lemma 17.6](#) ist $\mathcal{M}_{B_W}^{B_V}$ injektiv.

Schritt 3: Wir zeigen: $\mathcal{M}_{B_W}^{B_V}$ ist surjektiv.

Es sei dazu $A \in K^{n \times m}$. Nach [Satz 17.7](#) gibt es (genau) einen Homomorphismus $f: V \rightarrow W$, der $f(v_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} w_i$ als Bilder und damit A als Darstellungsmatrix hat. \square

Quizfrage 19.2: Warum haben wir, um die Bijektivität von $\mathcal{M}_{B_W}^{B_V}$ zu zeigen, nicht die Charakterisierung der Bijektivität von Homomorphismen nach [Folgerung 18.9](#) genutzt?

Folgerung 19.6 (Dimension des Vektorraumes der Homomorphismen).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(V, +, \cdot)$, $(W, +, \cdot)$ zwei endlich-dimensionale Vektorräume über K mit $\dim(V) = m$ und $\dim(W) = n$ sowie $m, n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$\dim(\text{Hom}(V, W)) = n m. \tag{19.7}$$

Beweis. Das Resultat folgt sofort aus $\dim(K^{n \times m}) = n m$ ([Lemma 15.3](#)) und der Isomorphie $\text{Hom}(V, W) \cong K^{n \times m}$, aufgrund derer beide Räume dieselbe Dimension haben ([Folgerung 18.2](#)). \square

Satz 19.7 (Zusammenhang zwischen einem Homomorphismus und seiner Darstellungsmatrix).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(V, +, \cdot)$, $(W, +, \cdot)$ zwei endlich-dimensionale Vektorräume über K . Weiter seien $B_V = (v_1, \dots, v_m)$ und $B_W = (w_1, \dots, w_n)$ Basen von V bzw. von W und $f: V \rightarrow W$ ein Homomorphismus. Dann gilt für die Darstellungsmatrix $A := \mathcal{M}_{B_W}^{B_V}(f)$ und die durch A induzierte lineare Abbildung f_A der Zusammenhang

$$f_A = \underbrace{\Phi_{B_W}^{-1}}_{\text{Koordinaten} \leftarrow \text{Vektor}} \circ f \circ \underbrace{\Phi_{B_V}}_{\text{Vektor} \leftarrow \text{Koordinaten}}: K^m \rightarrow K^n \quad (19.8a)$$

$$f = \underbrace{\Phi_{B_W}}_{\text{Vektor} \leftarrow \text{Koordinaten}} \circ f_A \circ \underbrace{\Phi_{B_V}^{-1}}_{\text{Koordinaten} \leftarrow \text{Vektor}}: V \rightarrow W. \quad (19.8b)$$

Mit anderen Worten, folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} W & \xleftarrow{f} & V \\ \Phi_{B_W} \uparrow & & \downarrow \Phi_{B_V}^{-1} \\ K^n & \xleftarrow{f_A} & K^m \end{array}$$

Beachte: (19.8a) besagt, dass Matrix-Vektor-Produkte $f_A(x) = Ax$ wie folgt wirken: Der Koordinatenvektor $x \in K^m$ wird durch Linearkombinationen der Basisvektoren in B_V in den Vektor $\Phi_{B_V}(x) \in V$ umgerechnet, dann wirkt f , und schließlich wird das Ergebnis durch $\Phi_{B_W}^{-1}$ als Koordinatenvektor bzgl. der Basis B_W angegeben. (**Quizfrage 19.3:** Wie lässt sich (19.8b) interpretieren?)

Beweis. Wir zeigen, dass die Abbildungen $\Phi_{B_W} \circ f_A \in \text{Hom}(K^m, W)$ und $f \circ \Phi_{B_V} \in \text{Hom}(K^m, W)$ übereinstimmen. Dazu reicht es nach Satz 17.7 aus, zu zeigen, dass ihre Bilder auf einer Basis gleich sind. Wir wählen dazu die Standardbasis (e_1, \dots, e_m) von K^m . Es gilt einerseits

$$\begin{aligned} (\Phi_{B_W} \circ f_A)(e_j) &= \Phi_{B_W}(f_A(e_j)) && \text{nach Definition 6.13 der Komposition } \circ \\ &= \Phi_{B_W}(A e_j) && \text{nach Definition der von } A \text{ induzierten Abbildung } f_A \\ &= \Phi_{B_W}(a_{\bullet j}) && \text{nach Definition des Matrix-Vektor-Produkts} \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ij} w_i && \text{nach Definition (19.1) von } \Phi_{B_W} \end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} (f \circ \Phi_{B_V})(e_j) &= f(\Phi_{B_V}(e_j)) && \text{nach Definition 6.13 der Komposition } \circ \\ &= f(v_j) && \text{nach Definition (19.1) von } \Phi_{B_V} \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ij} w_i && \text{nach Definition (19.3) der Darstellungsmatrix } A. \end{aligned}$$

Aus $\Phi_{B_W} \circ f_A \in \text{Hom}(K^m, W) = f \circ \Phi_{B_V}$ können wir nun (19.8a) und (19.8b) leicht durch Auflösen herleiten, weil Φ_{B_V} und Φ_{B_W} bijektiv sind. \square

Wir zeigen nun noch, dass die Komposition linearer Abbildungen durch das Matrix-Matrix-Produkt ihrer Darstellungsmatrizen dargestellt wird.

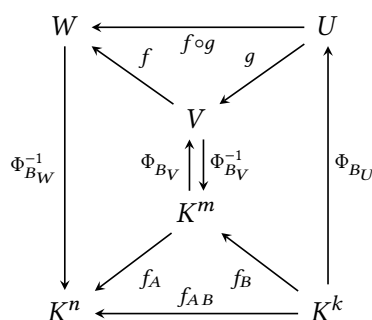
Satz 19.8 (Darstellungsmatrix der Komposition von Homomorphismen).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(U, +, \cdot)$, $(V, +, \cdot)$ und $(W, +, \cdot)$ endlich-dimensionale Vektorräume über K . Weiter seien $B_U = (u_1, \dots, u_k)$, $B_V = (v_1, \dots, v_m)$ und $B_W = (w_1, \dots, w_n)$ Basen von U bzw. von V bzw. von W und $g: U \rightarrow V$ sowie $f: V \rightarrow W$ Homomorphismen. Dann gilt für die Darstellungsmatrizen der Zusammenhang

$$\mathcal{M}_{B_W}^{B_U}(f \circ g) = \mathcal{M}_{B_W}^{B_V}(f) \mathcal{M}_{B_V}^{B_U}(g). \quad (19.9)$$

Beachte: Im mittleren Raum V muss für die Darstellung der ankommenden Abbildung g und für die Darstellung der ausgehenden Abbildung f dieselbe Basis B_V verwendet werden.

Beweis. Wir führen den Beweis mit Hilfe eines Diagrammes:



Zur Abkürzung setzen wir $A := \mathcal{M}_{B_W}^{B_V}(f)$ und $B := \mathcal{M}_{B_V}^{B_U}(g)$. Das rechte und das linke Trapez sind kommutativ nach [Satz 19.7](#), d. h., es gilt

$$f_A = \Phi_{B_W}^{-1} \circ f \circ \Phi_{B_V} \quad \text{und} \quad f_B = \Phi_{B_V}^{-1} \circ g \circ \Phi_{B_U}.$$

Das obere Dreieck ist kommutativ aufgrund der Definition von $f \circ g$. Das untere Dreieck ist kommutativ wegen $f_A \circ f_B = f_{AB}$, siehe [Lemma 17.9](#). Damit folgt

$$\begin{aligned} f_{AB} &= f_A \circ f_B \\ &= \Phi_{B_W}^{-1} \circ f \circ \Phi_{B_V} \circ \Phi_{B_V}^{-1} \circ g \circ \Phi_{B_U} \\ &= \Phi_{B_W}^{-1} \circ f \circ g \circ \Phi_{B_U} \\ &= \Phi_{B_W}^{-1} \circ (f \circ g) \circ \Phi_{B_U}. \end{aligned}$$

Das heißt aber, AB ist die Darstellungsmatrix $\mathcal{M}_{B_W}^{B_U}(f \circ g)$, was zu beweisen war. \square

§ 19.3 EIGENSCHAFTEN LINEARER ABBILDUNGEN UND IHRER DARSTELLUNGSMATRIZEN

Der isomorphe Zusammenhang zwischen linearen Abbildungen und ihren Darstellungsmatrizen (bzgl. beliebiger, aber fester Basen) erlaubt es, Eigenschaften linearer Abbildungen an ihren Darstellungsmatrizen abzulesen und umgekehrt. Um die bisher für Matrizen bzw. lineare Abbildungen schon bekannten Begriffe einmal zu rekapitulieren und **fehlendes Vokabular** zu ergänzen, geben wir folgende Tabelle an. Dabei ist K ein Körper und V, W sind Vektorräume über K .

Matrix $A \in K^{n \times m}$		lineare Abbildung $f: V \rightarrow W$	
Begriff	siehe	Begriff	siehe
$\text{Bild}(A) := \text{SR}(A)$	(15.15a)	$\text{Bild}(f) = \{f(u) \in W \mid u \in V\} = f(V)$	(17.2)
$\text{SRang}(A) = \dim(\text{SR}(A))$	(15.15b)	$\text{Rang}(f) = \dim(\text{Bild}(f))$	(18.7)
$\text{Kern}(A) := \{x \in K^m \mid Ax = 0\}$		$\text{Kern}(f) = \{u \in V \mid f(u) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$	(17.3)
$\text{Defekt}(A) := \dim(\text{Kern}(A))$		$\text{Defekt}(f) = \dim(\text{Kern}(f))$	(18.8)

Beachte: Aus den Definitionen folgt sofort $\text{Bild}(A) = \text{Bild}(f_A)$ und $\text{Kern}(A) = \text{Kern}(f_A)$.

Wir können nun bestätigen, dass die oben genannten Eigenschaften für lineare Abbildungen zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen und ihren Darstellungsmatrizen übereinstimmen.

Satz 19.9 (Eigenschaften linearer Abbildungen und ihrer Darstellungsmatrizen).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(V, +, \cdot)$, $(W, +, \cdot)$ zwei endlich-dimensionale Vektorräume über K mit $\dim(V) = m$ und $\dim(W) = n$. Weiter seien $B_V = (v_1, \dots, v_m)$ und $B_W = (w_1, \dots, w_n)$ Basen von V bzw. von W und $f: V \rightarrow W$ ein Homomorphismus. Schließlich sei $A := \mathcal{M}_{B_W}^{B_V}(f) \in K^{n \times m}$ die Darstellungsmatrix von f . Dann gilt:

- (i) $\text{Bild}(f) = \Phi_{B_W}(\text{Bild}(A))$.
- (ii) $\text{Rang}(f) = \text{SRang}(A) = \text{Rang}(A)$.
- (iii) $\text{Kern}(f) = \Phi_{B_V}(\text{Kern}(A))$.
- (iv) $\text{Defekt}(f) = \text{Defekt}(A)$.

Beweis. Aussage (i):

$$\begin{aligned}
 & w \in \text{Bild}(f) \\
 \Leftrightarrow & w \in \text{Bild}(\Phi_{B_W} \circ f_A \circ \Phi_{B_V}^{-1}) \quad \text{wegen } f = \Phi_{B_W} \circ f_A \circ \Phi_{B_V}^{-1}, \text{ siehe (19.8b)} \\
 \Leftrightarrow & w \in \Phi_{B_W}(\text{Bild}(f_A \circ \Phi_{B_V}^{-1})) \quad \text{nach Definition von Bild} \\
 \Leftrightarrow & w \in \Phi_{B_W}(\text{Bild}(f_A)) \quad \text{wegen der Bijektivität von } \Phi_{B_V}^{-1} \\
 \Leftrightarrow & w \in \Phi_{B_W}(\text{Bild}(A)) \quad \text{wegen } f_A(x) = Ax.
 \end{aligned}$$

Aussage (ii): $\text{Bild}(f)$ und $\text{Bild}(A)$ sind nach **Aussage (i)** zueinander isomorphe Unterräume von W bzw. von K^n . Nach **Folgerung 18.9** haben sie also dieselbe Dimension.

Aussage (iii):

$$\begin{aligned}
 & v \in \text{Kern}(f) \\
 \Leftrightarrow & v \in \text{Kern}(\Phi_{B_W} \circ f_A \circ \Phi_{B_V}^{-1}) \quad \text{wegen } f = \Phi_{B_W} \circ f_A \circ \Phi_{B_V}^{-1}, \text{ siehe (19.8b)} \\
 \Leftrightarrow & v \in \Phi_{B_V}(\text{Kern}(\Phi_{B_W} \circ f_A)) \quad \text{wegen der Bijektivität von } \Phi_{B_V}^{-1} \\
 \Leftrightarrow & v \in \Phi_{B_V}(\text{Kern}(f_A)) \quad \text{wegen der Bijektivität von } \Phi_{B_W} \\
 \Leftrightarrow & v \in \Phi_{B_V}(\text{Kern}(A)) \quad \text{wegen } f_A(x) = Ax.
 \end{aligned}$$

Aussage (iv): $\text{Kern}(f)$ und $\text{Bild}(A)$ sind nach **Aussage (iii)** zueinander isomorphe Unterräume von V bzw. von K^m . Nach **Folgerung 18.9** haben sie also dieselbe Dimension. \square

Bemerkung 19.10 (zur Bestimmung von Bild und Kern einer Matrix).

Wie können wir für eine gegebene Matrix $A \in K^{n \times m}$ eine Basis von $\text{Bild}(A) \subseteq K^n$ und eine Basis von $\text{Kern}(A) \subseteq K^m$ bestimmen?

(i) Für $\text{Bild}(A)$ haben wir folgende Möglichkeiten:

- (1) Wir bestimmen mit Hilfe einer Erweiterung von [Algorithmus 15.20](#), wie in [Bemerkung 15.23](#) beschrieben, eine Rangfaktorisierung $A = BC$ mit $B \in K^{n \times r}$ und $C \in K^{r \times m}$ (in Zeilenstufenform) und $r = \text{Rang}(A)$. Dann bilden die Spalten von B eine Basis von $\text{Bild}(A) = \text{SR}(A)$.
- (2) Wir nutzen die Beziehung $\text{Bild}(A) = \text{SR}(A) = [\text{ZR}(A^T)]^T$, bringen A^T in Zeilenstufenform ([Algorithmus 15.20](#)) und erhalten somit eine Basis von $\text{ZR}(A^T)$. Durch Transposition der Basisvektoren von $\text{ZR}(A^T)$ bekommen wir die gesuchte Basis von $\text{Bild}(A)$.

Für die Rechnung per Hand erscheint die zweite Möglichkeit günstiger, weil wir den linken Faktor „ B “ nicht mitführen müssen.

- (ii) Die Bestimmung von $\text{Kern}(A) = \mathcal{L}(A, 0)$ haben wir in [§ 16](#) bei der Lösung linearer Gleichungssysteme bereits durchgeführt. Zur Erinnerung: Wir bringen die erweiterte Koeffizientenmatrix $[A, 0]$ zunächst in Zeilenstufenform. Daran können wir bereits $\text{Rang}(A)$ und damit auch $\dim(\text{Kern}(A)) = m - \text{Rang}(A)$ ablesen. Nur wenn $\dim(\text{Kern}(A)) > 0$ ist, überführen wir das System weiter in die reduzierte Zeilenstufenform. Anschließend können wir nacheinander Basisvektoren von $\text{Kern}(A)$ bestimmen, indem wir eine der unabhängigen Variablen x_i auf den Wert 1 und die anderen unabhängigen Variablen auf den Wert 0 setzen und die Werte der abhängigen Variablen von hinten nach vorne aus den Gleichungen ausrechnen ([Bemerkung 16.4](#) und [Beispiel 16.7](#)).

Ist die Matrix A die Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung f , also $A = \mathcal{M}_{B_W}^{B_V}(f)$, dann erhalten wir so auch eine Basis von $\text{Bild}(f)$ und von $\text{Kern}(f)$. Wir müssen lediglich die Basisvektoren von $\text{Bild}(A)$ als Koordinatenvektoren bzgl. der Basis B_W und die Basisvektoren von $\text{Kern}(A)$ als Koordinatenvektoren bzgl. der Basis B_V interpretieren. \triangle

Beispiel 19.11 (zur Bestimmung von Bild und Kern einer Matrix).

Wir betrachten die Punktauswertungsabbildung

$$f: \mathbb{R}_3[t] \ni p \mapsto \begin{pmatrix} \tilde{p}(-2) \\ \tilde{p}(0) \\ \tilde{p}(2) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

aus [Beispiel 19.4](#). Bzgl. der Monombasis $(1, t, t^2, t^3)$ in $\mathbb{R}_3[t]$ und der Standardbasis (e_1, e_2, e_3) in \mathbb{R}^3 hat dieser Homomorphismus die Darstellungsmatrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

Eine Zeilenstufenform von A^T ist gegeben durch

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Es gilt also $\text{Rang}(A^T) = \text{Rang}(A) = 3$. Die ersten drei Zeilen bilden eine Basis von $\text{ZR}(A^T)$. Ihre Transponierten bilden also eine Basis von $\text{SR}(A) = \text{Bild}(A)$, d. h., wir haben

$$\text{Bild}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Da $\text{Bild}(A)$ aber maximale Dimension in \mathbb{R}^3 hat, also $\text{Bild}(A) = \mathbb{R}^3$ gilt, können wir auch jede andere Basis von \mathbb{R}^3 (z. B. die Standardbasis) als Basis von $\text{Bild}(A)$ verwenden.

Um $\text{Kern}(A)$ zu bestimmen, bringen wir $[A, 0]$ zunächst in Zeilenstufenform

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & -8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 0 \end{array} \right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & -8 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

wo wir wiederum $\text{Rang}(A) = 3$ und damit $\text{Defekt}(A) = \dim(\text{Kern}(A)) = 4 - 3 = 1$ ablesen können. Wir gehen weiter zu reduzierten Zeilenstufenform

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

an der wir

$$\text{Kern}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

ablesen.²⁸

Übersetzen wir $\text{Kern}(A)$ zurück in den Vektorraum $\mathbb{R}_3[t]$, so bedeutet das nach [Satz 19.9 Aussage \(iii\)](#), dass wir $\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Koordinatenvektor bzgl. der gewählten Basis $(1, t, t^2, t^3)$ interpretieren müssen. Es sind also genau die Vielfachen des Polynoms

$$p = 0 \cdot 1 - 4t + 0t^2 + 1t^3 = -4t + t^3,$$

die in $\text{Kern}(f)$ liegen, also die Eigenschaft besitzen, dass alle drei Punktauswertungen Null ergeben. In der Tat gilt

$$\begin{aligned} \tilde{p}(-2) &= -4 \cdot (-2) + (-2)^3 = 0 \\ \tilde{p}(0) &= -4 \cdot 0 + 0^3 = 0 \\ \tilde{p}(2) &= -4 \cdot 2 + 2^3 = 0. \end{aligned}$$

Wir haben also

$$\text{Kern}(f) = \langle -4t + t^3 \rangle \subseteq \mathbb{R}_3[t].$$

Für $\text{Bild}(A)$ ist in unserem Beispiel keine solche Übersetzung zurück erforderlich, denn wegen der Wahl der Standardbasis in \mathbb{R}^3 gilt $\text{Bild}(A) = \text{Bild}(f)$. (**Quizfrage 19.4:** Wie äußert sich das in [Satz 19.9 Aussage \(i\)](#)?) \triangle

Neben den Zusammenhängen in [Satz 19.9](#) können wir auch die Invertierbarkeit einer linearen Abbildung in Verbindung bringen mit der Invertierbarkeit ihrer Darstellungsmatrix. Wie wir aus [Folgerung 18.9](#) wissen, müssen dazu notwendigerweise beide endlich-dimensionalen Vektorräume dieselbe Dimension besitzen (und gleichbedeutend damit die Darstellungsmatrix quadratisch sein).

²⁸Noch geschickter wäre folgendes Vorgehen gewesen: Wir bestimmen eine (reduzierte) Zeilenstufenform von A , um damit $\text{Rang}(A)$, eine Basis von $\text{Kern}(A)$ und $\dim(\text{Kern}(A))$ zu bestimmen. Falls wie hier im Beispiel $\text{Rang}(A) = n$ gilt, können wir uns die Berechnung einer Basis von $\text{Bild}(A)$ sparen, da $\text{Bild}(A)$ den ganzen K^n ausfüllt.

Satz 19.12 (Invertierbarkeit linearer Abbildungen und ihrer Darstellungsmatrizen).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(V, +, \cdot), (W, +, \cdot)$ zwei endlich-dimensionale Vektorräume über K gleicher Dimension $\dim(V) = \dim(W) = n$ und $n \in \mathbb{N}$. Weiter seien $B_V = (v_1, \dots, v_n)$ und $B_W = (w_1, \dots, w_n)$ Basen von V bzw. von W und $f: V \rightarrow W$ ein Homomorphismus. Schließlich sei $A := \mathcal{M}_{B_W}^{B_V}(f) \in K^{n \times n}$ die Darstellungsmatrix von f . Dann sind äquivalent:

- (i) f ist bijektiv.
- (ii) $\text{Rang}(f) = n$.
- (iii) $\text{Defekt}(f) = 0$.
- (iv) A ist invertierbar.
- (v) $\text{Rang}(A) = n$
- (vi) $\text{Defekt}(A) = 0$

Ist f bijektiv, dann gilt für die Darstellungsmatrix der Inversen $f^{-1}: W \rightarrow V$

$$\mathcal{M}_{B_V}^{B_W}(f^{-1}) = A^{-1}. \quad (19.10)$$

Beweis. Die Äquivalenz der Aussagen (i) bis (iii) wurde in Folgerung 18.9 gezeigt. Die Äquivalenz der Aussagen (iv) und (v) wurde in Satz 15.40 gezeigt. Nach Satz 19.9 gilt $\text{Rang}(f) = \text{Rang}(A)$, also sind auch Aussagen (ii) und (v) äquivalent. Ebenfalls nach Satz 19.9 gilt $\text{Defekt}(f) = \text{Defekt}(A)$, also sind auch Aussagen (iii) und (vi) äquivalent.

Ist f bijektiv, dann gilt

$$\begin{aligned} f^{-1} \circ f &= \text{id}_V \\ \Rightarrow \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f^{-1} \circ f) &= \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(\text{id}_V) \\ \Rightarrow \mathcal{M}_{B_V}^{B_W}(f^{-1}) \mathcal{M}_{B_W}^{B_V}(f) &= I_n \quad \text{nach Satz 19.8 und Beispiel 19.4} \\ \Rightarrow \mathcal{M}_{B_V}^{B_W}(f^{-1}) A &= I_n. \end{aligned}$$

Das ist nach Satz 15.42 bereits ausreichend, um

$$A^{-1} = \mathcal{M}_{B_V}^{B_W}(f^{-1}),$$

also (19.10) zu bestätigen. □

§ 19.4 DARSTELLUNGSMATRIZEN VON ENDOMORPHISMEN

Wir betrachten abschließend noch einmal die Endomorphismen eines endlich-dimensionalen Vektorraumes V über einem Körper K . $\text{End}(V, +, \cdot)$ bildet als Spezialfall von $(\text{Hom}(V, V), +, \cdot)$ natürlich einen Vektorraum (Satz 17.11). Endomorphismen können daher wie andere Homomorphismen auch mit Hilfe ihrer Darstellungsmatrix beschrieben werden. Dafür müssen wir eine Basis im Definitionsraum und eine Basis im Zielraum wählen. Obwohl Definitions- und Zielraum bei einem Endomorphismus identisch sind, heißt das nicht, dass wir dieselbe Basis wählen müssten. Es gibt aber einen guten Grund, das zu tun.

Wie wir in Satz 17.12 nachgewiesen haben, bildet $\text{End}(V, +, \circ)$ mit der Komposition \circ einen Ring mit Einselement id_V . Insbesondere ist $\text{End}(V, \circ)$ eine (i. A. nicht-abelsche) Gruppe. Besitzen die Endomorphismen f und g die Darstellungsmatrizen A und B , so hätten wir gerne, dass $f \circ g$ durch die Matrix $A B$

dargestellt wird. Das gilt infolge von [Satz 19.8](#) auch, allerdings nur unter der Voraussetzung, dass wir in beiden Kopien des Vektorraumes V (als Definitions- und als Zielraum) dieselbe Basis verwenden!

Unter dieser Voraussetzung gilt folgendes Resultat:

Satz 19.13 (Darstellungssatz für Endomorphismen).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über K mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei $B_V = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V . Dann gilt:

(i) Die Zuordnung

$$\mathcal{M}_{B_V}^{B_V} : (\text{End}(V), +, \circ) \ni f \mapsto \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f) \in (K^{n \times n}, +, \cdot) \quad (19.11)$$

eines Endomorphismus zu seiner Darstellungsmatrix ist ein Isomorphismus von Ringen mit Eins.

(ii) Die Abbildung

$$\mathcal{M}_{B_V}^{B_V} : (\text{Aut}(V), \circ) \ni f \mapsto \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f) \in (\text{GL}(n, K), \cdot) \quad (19.12)$$

bildet außerdem die Untergruppe der Automorphismen von V , kurz: $\text{Aut}(V)$, bijektiv auf die Untergruppe der invertierbaren $n \times n$ -Matrizen, $\text{GL}(n, K)$, ab.

Beweis. **Aussage (i):** Die additive Verträglichkeit von $\mathcal{M}_{B_V}^{B_V} : (\text{End}(V), +, \circ) \rightarrow (K^{n \times n}, +, \cdot)$, also

$$\mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f + g) = \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f) + \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(g) \quad \text{für alle } f, g \in \text{End}(V),$$

folgt als Spezialfall von [Satz 19.5](#). Die multiplikative Verträglichkeit, also

$$\mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f \circ g) = \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f) \cdot \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(g) \quad \text{für alle } f, g \in \text{End}(V),$$

folgt als Spezialfall von [Satz 19.8](#). Schließlich gilt

$$\mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(\text{id}_V) = I_n,$$

siehe [Beispiel 19.4](#).

Aussage (ii): Nach [Satz 19.12](#) bildet $\mathcal{M}_{B_V}^{B_V}$ tatsächlich $(\text{Aut}(V), \circ) \rightarrow (\text{GL}(n, K), \cdot)$ bijektiv ab. \square

Ende der Vorlesung 27

Ende der Woche 13

§ 20 BASISWECHSEL UND NORMALFORMEN VON DARSTELLUNGSMATRIZEN

Literatur: [Fischer, Springborn, 2020](#), Kapitel 3.6 und 5.1, 5.3, [Bosch, 2014](#), Kapitel 3.4 und 6.1, [Beutelspacher, 2014](#), Kapitel 5.2 und 8.1–8.2, [Jänich, 2008](#), Kapitel 9.1 und 11.1–11.2

Die Darstellung eines Vektors v eines endlich-dimensionalen Vektorraumes V mit Hilfe seines Koordinatenvektors $x = \Phi_{B_V}^{-1}(v) \in K^n$ hängt von der Wahl der Basis B_V ab. Ebenso hängt die Beschreibung von Homomorphismen und insbesondere Endomorphismen über Darstellungsmatrizen von der Wahl der Basen im Definitions- und Zielraum ab. Es stellen sich daher folgende Fragen:

(1) Wie transformiert sich ein Koordinatenvektor beim Wechsel der Basis?

- (2) Wie transformiert sich die Darstellungsmatrix eines Homomorphismus, wenn wir die Basen wechseln?
- (3) In welcher Basis hat die Darstellungsmatrix besonders einfache Gestalt, die weitergehende Struktureinsichten zulässt?

Die Beantwortung der ersten beiden Fragen gelingt mit Hilfe von **Transformationsmatrizen** für den Basiswechsel.

Definition 20.1 (Transformationsmatrix).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über K mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$. Es seien $B_V = (v_1, \dots, v_n)$ und $\widehat{B}_V = (\widehat{v}_1, \dots, \widehat{v}_n)$ zwei Basen von V .²⁹ Dann heißt

$$\mathcal{T}_{\widehat{B}_V}^{B_V} := \mathcal{M}_{\widehat{B}_V}^{B_V}(\text{id}_V) \in K^{n \times n} \quad (20.1)$$

die **Transformationsmatrix des Basiswechsels, Übergangsmatrix** oder **Basiswechsellmatrix von B_V nach \widehat{B}_V** (englisch: transformation matrix, transition matrix, change-of-basis matrix). \triangle

Die Transformationsmatrix $\mathcal{T}_{\widehat{B}_V}^{B_V}$ ist also nichts anderes als die Darstellung der Identitätsabbildung bzgl. der „alten“ Basis B_V im Definitionsraum V und der „neuen“ Basis \widehat{B}_V im Zielraum V . Die Einträge t_{ij} der Transformationsmatrix $\mathcal{T}_{\widehat{B}_V}^{B_V}$ bestimmen sich daher aus den Bedingungen

$$\underbrace{\text{id}_V(v_j)} = v_j = \sum_{i=1}^n t_{ij} \widehat{v}_i \quad \text{für } j = 1, \dots, n. \quad (20.2)$$

Bild des „alten“ Basisvektors v_j unter der id_V -Abbildung

Wir müssen also die „alten“ Basisvektoren als Linearkombinationen der „neuen“ darstellen.

Beispiel 20.2 (Transformationsmatrix).

Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{R}_2[t]$ der Polynome vom Höchstgrad 2 über \mathbb{R} mit der „alten“ Basis $B_V = (1, t, t^2)$ und der „neuen“ Basis $\widehat{B}_V = (t^2 - t + 1, t^2 + 3, t + 1)$. Dann ist die Transformationsmatrix $\mathcal{T}_{\widehat{B}_V}^{B_V} = (t_{ij})$ gegeben durch die Bedingungen

$$\begin{aligned} 1 &= t_{11}(t^2 - t + 1) + t_{21}(t^2 + 3) + t_{31}(t + 1), \\ t &= t_{12}(t^2 - t + 1) + t_{22}(t^2 + 3) + t_{32}(t + 1), \\ t^2 &= t_{13}(t^2 - t + 1) + t_{23}(t^2 + 3) + t_{33}(t + 1), \end{aligned}$$

was durch Koeffizientenvergleich als lineares Gleichungssystem mit drei rechten Seiten

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

geschrieben werden kann. Dessen eindeutige Lösung ist

$$\mathcal{T}_{\widehat{B}_V}^{B_V} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

²⁹Wir verwenden die Konvention, dass wir zumindest anfänglich die „alte“ Basis in blau und die „neue“ Basis in rot kennzeichnen.

Zur Probe rechnen wir [Beispiel 19.2](#) nach, in dem wir das Polynom $7t^2 - 3t + 5$ mit dem bekannten Koordinatenvektor $x = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$ bzgl. der „alten“ Basis in der „neuen“ Basis dargestellt hatten. Für den „neuen“ Koordinatenvektor gilt

$$\widehat{x} = \mathcal{T}_{\widehat{B}_V}^{B_V} x = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix},$$

vgl. [Beispiel 19.2](#).

△

Das folgende Resultat beantwortet insbesondere die [Frage \(1\)](#).

Lemma 20.3 (Eigenschaften von Transformationsmatrizen).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über K mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$. Es seien $B_V = (v_1, \dots, v_n)$ und $\widehat{B}_V = (\widehat{v}_1, \dots, \widehat{v}_n)$ zwei Basen von V . Dann gilt:

- (i) Ist $x \in K^n$ der Koordinatenvektor eines Vektors $v \in V$ bzgl. der Basis B_V , dann ist $\widehat{x} = \mathcal{T}_{\widehat{B}_V}^{B_V} x$ der Koordinatenvektor von v bzgl. der Basis \widehat{B}_V .³⁰
- (ii) Die Transformationsmatrix $\mathcal{T}_{\widehat{B}_V}^{B_V} \in K^{n \times n}$ ist invertierbar.
- (iii) $(\mathcal{T}_{\widehat{B}_V}^{B_V})^{-1} = \mathcal{T}_{B_V}^{\widehat{B}_V}$.
- (iv) Die von der Matrix $\mathcal{T}_{\widehat{B}_V}^{B_V}$ induzierte lineare Abbildung $K^n \rightarrow K^n$ ist $\Phi_{\widehat{B}_V}^{-1} \circ \Phi_{B_V} \in \text{Aut}(K^n)$.

Beweis. [Aussage \(i\)](#): Es gilt

$$\begin{aligned} v &= \sum_{j=1}^n x_j v_j && \text{nach Voraussetzung} \\ &= \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^n t_{ij} \widehat{v}_i && \text{nach (20.2)} \\ &= \sum_{i=1}^n \underbrace{\sum_{j=1}^n (t_{ij} x_j)}_{\text{Koeffizient } \widehat{x}_i \text{ bzgl. der Basis } \widehat{B}_V = (\widehat{v}_1, \dots, \widehat{v}_n)} \widehat{v}_i && \text{wegen Distributivität und Kommutativität im Körper } K. \end{aligned}$$

Nach Definition des Matrix-Vektor-Produkts ([Bemerkung 15.9](#)) gilt also $\widehat{x} = \mathcal{T}_{\widehat{B}_V}^{B_V} x$.

[Aussage \(ii\)](#): Die Invertierbarkeit von $\mathcal{T}_{\widehat{B}_V}^{B_V}$ folgt aus [Satz 19.12](#), da $\mathcal{T}_{\widehat{B}_V}^{B_V}$ die Darstellungsmatrix des bijektiven Homomorphismus $\text{id}_V: V \rightarrow V$ ist.

³⁰Beachte das Muster $\widehat{x} = \mathcal{T}_{\widehat{B}_V}^{B_V} x$ mit **alter** und **neuer** Basis und zugehörigen Koordinatenvektoren.

Aussage (iii): Die Eigenschaft $(\mathcal{T}_{\widehat{B}_V}^{B_V})^{-1} = \mathcal{T}_{B_V}^{\widehat{B}_V}$ folgt ebenfalls aus Satz 19.12, denn es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{B_V}^{\widehat{B}_V} &= \mathcal{M}_{B_V}^{\widehat{B}_V}(\text{id}_V) && \text{nach Definition von Transformationsmatrizen} \\ &= \mathcal{M}_{B_V}^{\widehat{B}_V}((\text{id}_V)^{-1}) && \text{id}_V \text{ ist selbstinvers} \\ &= (\mathcal{M}_{\widehat{B}_V}^{B_V}(\text{id}_V))^{-1} && \text{nach Satz 19.12, (19.10)} \\ &= (\mathcal{T}_{\widehat{B}_V}^{B_V})^{-1} && \text{nach Definition von Transformationsmatrizen.} \end{aligned}$$

Aussage (iv): Mit $A := \mathcal{T}_{\widehat{B}_V}^{B_V}$ ist folgendes Diagramm kommutativ (vgl. Satz 19.7):

$$\begin{array}{ccc} V & \xleftarrow{\text{id}_V} & V \\ \Phi_{\widehat{B}_V}^{-1} \downarrow & & \uparrow \Phi_{B_V} \\ K^n & \xleftarrow{f_A} & K^n \end{array}$$

Also ist

$$f_A = \underbrace{\Phi_{\widehat{B}_V}^{-1} \circ \text{id}_V}_{\text{„neue“ Koordinaten} \leftrightarrow \text{Vektor}} \circ \underbrace{\Phi_{B_V}}_{\text{Vektor} \leftrightarrow \text{„alte“ Koordinaten}} = \Phi_{\widehat{B}_V}^{-1} \circ \Phi_{B_V}$$

die von A induzierte Abbildung $K^n \rightarrow K^n$. □

Folgerung 20.4 (Eigenschaften von Transformationsmatrizen in K^n).

Im Fall $V = K^n$ können wir die Basen $B_V = (v_1, \dots, v_n)$ und $\widehat{B}_V = (\widehat{v}_1, \dots, \widehat{v}_n)$ als Matrizen

$$B_V = \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \widehat{B}_V = \begin{bmatrix} | & & | \\ \widehat{v}_1 & \cdots & \widehat{v}_n \\ | & & | \end{bmatrix}$$

in $K^{n \times n}$ auffassen. Dann gilt

$$\mathcal{T}_{\widehat{B}_V}^{B_V} = (\widehat{B}_V)^{-1} B_V. \quad (20.3)$$

Ist insbesondere eine der Basen die Standardbasis (e_1, \dots, e_n) , so gilt

$$\mathcal{T}_{(e_1, \dots, e_n)}^{B_V} = B_V \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{T}_{\widehat{B}_V}^{(e_1, \dots, e_n)} = (\widehat{B}_V)^{-1}. \quad (20.4)$$

Beweis. In diesem Fall gilt $f_{B_V}^{-1} = \Phi_{B_V}$ und $f_{\widehat{B}_V}^{-1} = \Phi_{\widehat{B}_V}$ (**Quizfrage 20.1:** Warum?), also können wir das Diagramm aus dem Beweis von Lemma 20.3 schreiben als

$$\begin{array}{ccc} K^n & \xleftarrow{\text{id}_{K^n}} & K^n \\ \Phi_{\widehat{B}_V}^{-1} = f_{\widehat{B}_V}^{-1} \downarrow & & \uparrow \Phi_{B_V} = f_{B_V} \\ K^n & \xleftarrow{f_A} & K^n \end{array}$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
 f_A &= \Phi_{\widehat{B}_V}^{-1} \circ \Phi_{B_V} && \text{nach Lemma 20.3 (iv)} \\
 &= f_{\widehat{B}_V}^{-1} \circ f_{B_V} && \text{denn } f_{B_V} = \Phi_{B_V} \text{ und } f_{\widehat{B}_V} = \Phi_{\widehat{B}_V} \\
 &= f_{(\widehat{B}_V)^{-1}} \circ f_{B_V} && \text{nach Lemma 17.9} \\
 &= f_{(\widehat{B}_V)^{-1} B_V} && \text{nach Lemma 17.9.}
 \end{aligned}$$

Weil f_A die Matrix A eindeutig festlegt (nochmal Lemma 17.9), folgt $\mathcal{T}_{\widehat{B}_V}^{B_V} = A = (\widehat{B}_V)^{-1} B_V$, also (20.3). Die Spezialfälle (20.4) gelten, weil die zur Standardbasis gehörige Matrix \widehat{B}_V bzw. B_V die Einheitsmatrix ist. □

Beispiel 20.5 (Transformationsmatrizen in K^n).

Wir wollen im Raum $V = \mathbb{R}^2$ über dem Körper \mathbb{R} die Transformationsmatrix $\mathcal{T}_{\widehat{B}_V}^{B_V}$ von der Basis $B_V = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ zur Basis $\widehat{B}_V = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ finden. Nach (20.3) gilt

$$\mathcal{T}_{\widehat{B}_V}^{B_V} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}. \quad \triangle$$

§ 20.1 TRANSFORMATION DER DARSTELLUNGSMATRIZEN VON HOMOMORPHISMEN

Wir kommen nun zur Frage (2).

Satz 20.6 (Transformation der Darstellungsmatrix eines Homomorphismus beim Wechsel der Basen).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(V, +, \cdot), (W, +, \cdot)$ zwei endlich-dimensionale Vektorräume über K . Weiter seien B_V und \widehat{B}_V Basen von V sowie B_W und \widehat{B}_W Basen von W . Dann gilt für die Darstellungsmatrix eines Homomorphismus $f: V \rightarrow W$:³¹

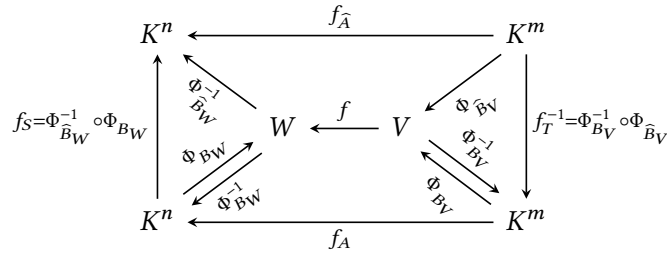
$$\mathcal{M}_{\widehat{B}_W}^{\widehat{B}_V}(f) = \mathcal{T}_{\widehat{B}_W}^{B_W} \mathcal{M}_{B_W}^{B_V}(f) \mathcal{T}_{B_V}^{\widehat{B}_V}. \quad (20.5)$$

Beweis. Wir setzen zur Abkürzung

$$\begin{aligned}
 T &:= \mathcal{T}_{\widehat{B}_V}^{B_V} && \text{Übergang von } B_V \text{ nach } \widehat{B}_V, \\
 \text{also } T^{-1} &= \mathcal{T}_{B_V}^{\widehat{B}_V} && \text{Übergang von } \widehat{B}_V \text{ nach } B_V, \\
 A &:= \mathcal{M}_{B_W}^{B_V}(f) && \text{„alte“ Darstellungsmatrix von } f, \\
 S &:= \mathcal{T}_{\widehat{B}_W}^{B_W} && \text{Übergang von } B_W \text{ nach } \widehat{B}_W, \\
 \widehat{A} &:= \mathcal{M}_{\widehat{B}_W}^{\widehat{B}_V}(f) && \text{„neue“ Darstellungsmatrix von } f.
 \end{aligned}$$

Wir betrachten das Diagramm

³¹Die Farben deuten wieder den Übergang von den „alten“ Basen zu den „neuen“ Basen an.



Das obere und das untere Trapez sind kommutativ nach Satz 19.7. Das linke Dreieck und das rechte Dreieck sind kommutativ nach Lemma 20.3. Damit kommutiert auch das äußere Rechteck, d. h., es gilt

$$f_{\widehat{A}} = f_S \circ f_A \circ f_T^{-1} = f_S \circ f_A \circ f_{T^{-1}} = f_{SAT^{-1}}.$$

Das heißt nach Lemma 17.9 aber gerade

$$\widehat{A} = SAT^{-1}, \tag{20.6}$$

also die Behauptung (20.5). □

Beispiel 20.7 (Transformation der Darstellungsmatrix eines Homomorphismus beim Wechsel der Basen).

Wir betrachten die Abbildung $f_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, die durch die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

induziert ist. Das heißt, A ist die Darstellungsmatrix $\mathcal{M}_{\substack{(e_1, e_2) \\ (e_1, e_2, e_3)}}^{(e_1, e_2)}(f_A)$ bzgl. der Standardbasen in \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 .

Wir wollen die Darstellungsmatrix in die neuen Basen $\widehat{B}_V = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ und $\widehat{B}_W = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ umrechnen, also

$$\widehat{A} = \mathcal{M}_{\widehat{B}_W}^{\widehat{B}_V}(f_A) = SAT^{-1}$$

bestimmen. Es gilt

$$T^{-1} := \mathcal{T}_{(e_1, e_2)}^{\widehat{B}_V} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

und

$$S := \mathcal{T}_{\widehat{B}_W}^{(e_1, e_2, e_3)} = \left[\mathcal{T}_{(e_1, e_2, e_3)}^{\widehat{B}_W} \right]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wir erhalten also die transformierte Darstellungsmatrix bzgl. der neuen Basen gemäß (20.5)

$$\widehat{A} = SAT^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 7 \\ 1 & 15 \end{bmatrix}. \tag{20.7}$$

Definition 20.8 (Äquivalenztransformation, äquivalente Matrizen).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $n, m \in \mathbb{N}_0$. Zwei Matrizen $A, \widehat{A} \in K^{n \times m}$ heißen **äquivalent** (englisch: **equivalent**), wenn es invertierbare Matrizen $S \in K^{n \times n}$ und $T \in K^{m \times m}$ gibt, sodass gilt:

$$\widehat{A} = SAT^{-1}. \tag{20.7}$$

Der Übergang von A zu SAT^{-1} , also die Multiplikation von links und von rechts mit invertierbaren Matrizen, heißt auch eine **Äquivalenztransformation** (englisch: **equivalence transformation**) von A . △

Beachte: Die Äquivalenz von Matrizen ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge $K^{n \times m}$.

Satz 20.9 (über äquivalente Matrizen).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper, $n, m \in \mathbb{N}_0$ und $A, \hat{A} \in K^{n \times m}$. Weiter seien V und W zwei Vektorräume über K mit $\dim(V) = m$ und $\dim(W) = n$ und B_V eine Basis von V , B_W eine Basis von W und $f: V \rightarrow W$ ein Homomorphismus und $A = \mathcal{M}_{B_W}^{B_V}(f)$.³² Dann sind äquivalent:

- (i) A und \hat{A} sind äquivalente Matrizen.
- (ii) \hat{A} ist die Darstellungsmatrix von f bzgl. geeigneter Basen \hat{B}_V und \hat{B}_W .
- (iii) Es gilt $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(\hat{A})$.

Beweis. **Aussage (i) \Rightarrow Aussage (ii):** Es sei \hat{A} äquivalent zu A , d. h., es existieren invertierbare Matrizen $S \in K^{n \times n}$ und $T \in K^{m \times m}$, sodass $\hat{A} = SAT^{-1}$ gilt. Wir können T^{-1} als Transformationsmatrix eines Basiswechsels $T^{-1} = \mathcal{T}_{B_V}^{\hat{B}_V}$ auffassen, indem wir die „neue“ Basis von V durch

$$\hat{v}_j = \sum_{i=1}^m [T^{-1}]_{ij} v_i \quad \text{für } j = 1, \dots, m$$

definieren, vgl. (20.2). Ebenso können wir S als Transformationsmatrix eines Basiswechsels $S = \mathcal{T}_{B_W}^{\hat{B}_W}$ auffassen, indem wir die „neue“ Basis von W durch

$$\hat{w}_j = \sum_{i=1}^n [S^{-1}]_{ij} w_i \quad \text{für } j = 1, \dots, n$$

definieren. Wir sehen jetzt

$$\begin{aligned} f_{\hat{A}} &= f_{SAT^{-1}} && \text{nach Voraussetzung} \\ &= f_S \circ f_A \circ f_{T^{-1}} && \text{nach Lemma 17.9} \\ &= f_S \circ \Phi_{B_W}^{-1} \circ f \circ \Phi_{B_V} \circ f_{T^{-1}} && \text{nach Satz 19.7} \\ &= \Phi_{B_W}^{-1} \circ \Phi_{B_W} \circ \Phi_{B_W}^{-1} \circ f \circ \Phi_{B_V} \circ \Phi_{B_V}^{-1} \circ \Phi_{\hat{B}_V} && \text{nach Lemma 20.3} \\ &= \Phi_{\hat{B}_W}^{-1} \circ f \circ \Phi_{\hat{B}_V}. \end{aligned}$$

Das bedeutet wiederum nach **Satz 19.7** aber, dass \hat{A} die Darstellungsmatrix von f bzgl. der „neuen“ Basen \hat{V} und \hat{W} ist.

Aussage (ii) \Rightarrow Aussage (i): Das folgt sofort aus **Satz 20.6**.

Aussage (i) \Rightarrow Aussage (iii): Es sei \hat{A} äquivalent zu A , d. h., es existieren invertierbare Matrizen $S \in K^{n \times n}$ und $T \in K^{m \times m}$, sodass $\hat{A} = SAT^{-1}$ gilt. Nach **Folgerung 15.41** gilt $\text{Rang}(\hat{A}) = \text{Rang}(A)$.

³²Diese Voraussetzung ist nicht einschränkend. Zu einer gegebenen Matrix A können wir immer $V = K^m$, $W = K^n$, B_V und B_W als die Standardbasen und $f = f_A$ wählen.

Aussage (iii) \Rightarrow Aussage (i): Wir betrachten $f_A: K^m \rightarrow K^n$. Nach Satz 19.9 gilt $\text{Rang}(f_A) = \text{Rang}(A)$. Gemäß Beispiel 19.4 können wir eine Basis B von K^m und eine Basis C von K^n finden, sodass

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] &= \mathcal{M}_B^C(f_A) \\ &= \mathcal{T}_C^{(e_1, \dots, e_n)} \mathcal{M}_{(e_1, \dots, e_m)}^{(e_1, \dots, e_m)}(f_A) \mathcal{T}_{(e_1, \dots, e_m)}^B \\ &= \underbrace{\mathcal{T}_C^{(e_1, \dots, e_n)}}_{=: S} A \underbrace{\mathcal{T}_{(e_1, \dots, e_m)}^B}_{=: T^{-1}} \\ &= S A T^{-1} \end{aligned}$$

mit invertierbaren Matrizen $S \in K^{n \times n}$ und $T \in K^{m \times m}$ gilt. Dasselbe Argument können wir für $f_{\widehat{A}}$ verwenden, um zu zeigen, dass es Matrizen \widehat{S} und \widehat{T} gibt, sodass

$$\left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] = \widehat{S} \widehat{A} \widehat{T}^{-1}$$

gilt. Zusammen also:

$$\widehat{A} = (\widehat{S}^{-1} S) A (T^{-1} \widehat{T}).$$

Da die Produkte $\widehat{S}^{-1} S$ und $T^{-1} \widehat{T}$ wieder invertierbare Matrizen sind, folgt die Äquivalenz von A und \widehat{A} . \square

Bemerkung 20.10 (über äquivalente Matrizen).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(V, +, \cdot)$, $(W, +, \cdot)$ zwei endlich-dimensionale Vektorräume über K mit $\dim(V) = m$ und $\dim(W) = n$. Der Satz 20.9 bedeutet, folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(V, W) & \xrightarrow[\text{isomorph}]{\mathcal{M}_{B_W}^{B_V}} & K^{n \times m} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \text{Hom}(V, W) / \sim_{\text{Rang}} & \xrightarrow[\mathcal{M}_{B_W}^{B_V}]{\text{bijektiv}} & K^{n \times m} / \sim_{\text{Rang}} \end{array}$$

Dabei ist auf der linken Seite des Diagramms \sim_{Rang} die Äquivalenzrelation „gleicher Rang“ auf $\text{Hom}(V, W)$ mit den Äquivalenzklassen

$$[f] := \{g \in \text{Hom}(V, W) \mid \text{Rang}(g) = \text{Rang}(f)\}.$$

Weiter ist $\text{Hom}(V, W) / \sim_{\text{Rang}}$ die zugehörige Faktormenge (Menge aller Äquivalenzklassen) und π die kanonische Surjektion $f \mapsto [f]$. (**Quizfrage 20.2:** Wieviele Äquivalenzklassen gibt es?)

Auf der rechten Seite des Diagramms ist \sim_{Rang} die Äquivalenzrelation „gleicher Rang“ auf $K^{n, m}$ mit den Äquivalenzklassen

$$\begin{aligned} [A] &:= \{\widehat{A} \in K^{n \times m} \mid \text{Rang}(\widehat{A}) = \text{Rang}(A)\} \\ &= \{\widehat{A} \in K^{n \times m} \mid \widehat{A} \text{ ist äquivalent zu } A\} \\ &= \{S A T^{-1} \mid S \in K^{n \times n} \text{ und } T \in K^{m \times m} \text{ sind invertierbar}\}. \end{aligned}$$

Weiter ist $K^{n \times m} / \sim_{\text{Rang}}$ die zugehörige Faktormenge und π die kanonische Surjektion $A \mapsto [A]$.

Nach [Satz 20.9](#) bildet $\mathcal{M}_{B_W}^{B_V}$ eine gesamte Äquivalenzklasse von $\text{Hom}(V, W)$ auf eine Äquivalenzklasse von $K^{n \times m}$ ab, und verschiedene Äquivalenzklassen von $\text{Hom}(V, W)$ auf verschiedene Äquivalenzklassen von $K^{n \times m}$. Allerdings sind die Äquivalenzklassen hier (bis auf die für Rang 0) keine Unterräume, $[f] \mapsto [A]$ kann also keine lineare Zuordnung sein. Stattdessen ist jede Äquivalenzklasse $[f]$ von $\text{Hom}(V, W)$ eine sogenannte **glatte Mannigfaltigkeit** (englisch: **smooth manifold**).³³ Ebenso ist jede Äquivalenzklasse $[A]$ von $K^{n \times m}$ eine glatte Mannigfaltigkeit, und die Abbildung $\mathcal{M}_{B_W}^{B_V}$ ist ein **Diffeomorphismus** zwischen $[f]$ und $[A]$ mit $\text{Rang}(f) = \text{Rang}(A)$. \triangle

Folgerung 20.11 (Normalform der Darstellungsmatrix eines Homomorphismus).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper, $n, m \in \mathbb{N}_0$ und $A \in K^{n \times m}$ mit $\text{Rang}(A) = r$. Dann existieren reguläre Matrizen $S \in K^{n \times n}$ und $T \in K^{m \times m}$, sodass gilt:

$$S A T^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \in K^{n \times m}. \tag{20.8}$$

Beweis. Dieses Resultat wurde beim Beweis von [Satz 20.9 Aussage \(iii\) \$\Rightarrow\$ Aussage \(i\)](#) gezeigt; siehe auch [Beispiel 19.4](#). \square

Wir nennen die zu A äquivalente Matrix [\(20.8\)](#) die **Rang-Normalform** (englisch: **rank normal form**) von A . Sie ist eindeutig bestimmt. Eine Matrix in Rang-Normalform kann als natürlicher Repräsentant ihrer Äquivalenzklasse bzgl. der Äquivalenzrelation „gleicher Rang“ angesehen werden. Damit haben wir für allgemeine Homomorphismen auch die [Frage \(3\)](#) beantwortet.

Ende der Vorlesung 28

§ 20.2 TRANSFORMATION DER DARSTELLUNGSMATRIZEN VON ENDOMORPHISMEN

In [§ 19.4](#) hatten wir gesehen, dass es sinnvoll ist, bei der Darstellung von Endomorphismen $f: V \rightarrow V$ eines endlich-dimensionalen Vektorraumes V durch Darstellungsmatrizen im Definitions- und im Zielraum zweimal dieselbe Basis B_V zu verwenden. (**Quizfrage 20.3:** Was war nochmal der Grund dafür?)

Analog zum [Transformationssatz für Darstellungsmatrizen von Homomorphismen 20.6](#) erhalten wir also als Sonderfall folgende Variante für Endomorphismen:

Satz 20.12 (Transformation der Darstellungsmatrix eines Endomorphismus beim Wechsel der Basis).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(V, +, \cdot)$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K . Weiter seien B_V und \widehat{B}_V Basen von V . Dann gilt für die Darstellungsmatrix eines Endomorphismus $f: V \rightarrow V$:³⁴

$$\mathcal{M}_{\widehat{B}_V}^{\widehat{B}_V}(f) = \mathcal{T}_{\widehat{B}_V}^{-B_V} \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f) \mathcal{T}_{B_V}^{\widehat{B}_V}. \tag{20.9}$$

³³Über solche Strukturen erfahren Sie mehr in Vorlesungen über Differentialgeometrie.

³⁴Die Farben deuten wieder den Übergang von der „alten“ Basis zur „neuen“ Basis an.

Das bedeutet, dass wir mit der Notation aus § 20.1

$$\begin{aligned}
 T &:= \mathcal{T}_{\widehat{B}_V}^{B_V} && \text{Übergang von } B_V \text{ nach } \widehat{B}_V, \\
 \text{also } T^{-1} &= \mathcal{T}_{B_V}^{\widehat{B}_V} && \text{Übergang von } \widehat{B}_V \text{ nach } B_V, \\
 A &:= \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f) && \text{„alte“ Darstellungsmatrix von } f, \\
 \widehat{A} &:= \mathcal{M}_{\widehat{B}_V}^{\widehat{B}_V}(f) && \text{„neue“ Darstellungsmatrix von } f,
 \end{aligned}$$

die Beziehung

$$\widehat{A} = T A T^{-1} \tag{20.10}$$

erhalten.

Definition 20.13 (Ähnlichkeitstransformation, ähnliche Matrizen).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}_0$. Zwei Matrizen $A, \widehat{A} \in K^{n \times n}$ heißen **ähnlich** (englisch: **similar**), wenn es eine invertierbare Matrix $T \in K^{n \times n}$ gibt, sodass gilt:

$$\widehat{A} = T A T^{-1}. \tag{20.11}$$

Der Übergang von A zu $T A T^{-1}$, also die Multiplikation von links und von rechts einmal mit einer invertierbaren Matrix und einmal mit ihrer Inversen, heißt auch eine **Ähnlichkeitstransformation** (englisch: **similarity transformation**) von A . \triangle

Beachte: Die Ähnlichkeit von Matrizen ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge $K^{n \times n}$.

Analog zu Satz 20.9 halten wir fest:

Satz 20.14 (über ähnliche Matrizen, vgl. Satz 20.9).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}_0$ und $A, \widehat{A} \in K^{n \times n}$. Weiter sei V ein Vektorraum über K mit $\dim(V) = n$ und B_V eine Basis von V , $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus und $A = \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f)$.³⁵ Dann sind äquivalent:

- (i) A und \widehat{A} sind ähnliche Matrizen.
- (ii) \widehat{A} ist die Darstellungsmatrix von f bzgl. einer geeigneten Basis \widehat{B}_V .

Beweis. Aussage (i) \Rightarrow Aussage (ii): Der Beweis ist ein Spezialfall des entsprechenden Beweisschrittes von Satz 20.9.

Aussage (ii) \Rightarrow Aussage (i): Das folgt sofort aus Satz 20.12. \square

Es stellt sich an dieser Stelle allerdings die Frage, ob wir nicht zusätzlich zu der relativ offensichtlichen Aussage von Satz 20.14 noch eine vergleichbar einfache Charakterisierung der Ähnlichkeit zweier Matrizen finden können, wie es mit der Ranggleichheit bei der Äquivalenz in Satz 20.9 der Fall war. Es stellt sich allerdings heraus, dass es bei der Ähnlichkeit von Matrizen auf sehr viel komplexere Struktur des dargestellten Endomorphismus ankommt, als das beim Rang einer Matrix bzw. dem Rang des dargestellten Homomorphismus der Fall war. Auch die Frage (3) nach einer geeigneten Basis, bzgl. der die Darstellungsmatrix eines Endomorphismus eine möglichst einfache Gestalt hat, also ein Analogon

³⁵Diese Voraussetzung ist nicht einschränkend. Zu einer gegebenen Matrix A können wir immer $V = K^n$, B_V als die Standardbasis und $f = f_A$ wählen.

zu [Folgerung 20.11](#), ist für uns noch offen. Da diese Frage eng mit der Charakterisierung der Ähnlichkeit zusammenhängt, ist auch hier die Beantwortung deutlich schwieriger als bei der Rang-Normalform von Homomorphismen. Ein weiterer Hinweis darauf wird durch die Tatsache gegeben, dass wir zur Herstellung einer wie auch immer gearteten einfachen Form der Darstellungsmatrix jetzt nur noch eine Basis, also nur noch eine Transformationsmatrix zur Verfügung haben, um TAT^{-1} in möglichst einfache Form zu bringen.

Wir werden die gerade gestellten Fragen erst im zweiten Teil der Vorlesung vollständig beantworten können. Wir wollen hier jedoch schon einige Überlegungen dazu anstellen und können zumindest für eine Teilmenge von Matrizen bereits jetzt eine Charakterisierung der Ähnlichkeit erreichen. Dazu führen wir zunächst einen neuen Begriff ein.

Definition 20.15 (invarianter Unterraum eines Endomorphismus bzw. einer Matrix).

- (i) Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über K . Weiter sei $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus. Ein Unterraum $U \subseteq V$ heißt ein **f -invarianter Unterraum** (englisch: **f -invariant subspace**), wenn gilt:

$$f(U) \subseteq U. \tag{20.12}$$

- (ii) Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ eine Matrix mit $n \in \mathbb{N}_0$. Ein Unterraum $U \subseteq K^n$ heißt ein **A -invarianter Unterraum**, wenn gilt:³⁶

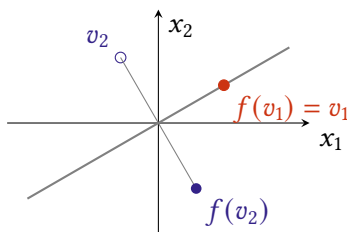
$$f_A(U) \subseteq U. \tag{20.13}$$

△

Vektoren u in einem f -invarianten Unterraum U haben also die Eigenschaft, dass sie durch f wieder auf einen Vektor $f(u) \in U$ abgebildet werden (auch bei wiederholter Anwendung von f).

Beispiel 20.16 (invarianter Unterraum eines Endomorphismus).

- (i) In jedem Vektorraum V sind die trivialen Unterräume $\{0\}$ und V invariante Unterräume für jeden Endomorphismus $f: V \rightarrow V$.
- (ii) Die Spiegelungsabbildung an einer Achse in \mathbb{R}^2 aus [Beispiel 17.8](#) hat zwei verschiedene eindimensionale invariante Unterräume, wie wir uns grafisch überlegen können:



Der Vektor $v_1 = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$ wird durch das Matrix-Vektor-Produkt mit der Darstellungsmatrix

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) & 2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) \\ 2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) & \sin^2(\alpha) - \cos^2(\alpha) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^3(\alpha) - \sin^2(\alpha) \cos(\alpha) + 2 \cos(\alpha) \sin^2(\alpha) \\ 2 \cos^2(\alpha) \sin(\alpha) + \sin^3(\alpha) - \cos^2(\alpha) \sin(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) [\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)] \\ \sin(\alpha) [\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

³⁶Mit anderen Worten: $\{Ax \mid x \in U\} \subseteq U$ oder kurz: $A \cdot U \subseteq U$.

tatsächlich auf sich selbst abgebildet, während für das Bild des Vektors $v_2 = \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) & 2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) \\ 2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) & \sin^2(\alpha) - \cos^2(\alpha) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\cos^2(\alpha) \sin(\alpha) + \sin^3(\alpha) + 2 \cos^2(\alpha) \sin(\alpha) \\ -2 \cos(\alpha) \sin^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) \cos(\alpha) - \cos^3(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\alpha) [\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)] \\ \cos(\alpha) [\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

gilt, d. h., $f(v_2) = -v_2$. Die Unterräume $U_1 = \langle v_1 \rangle$ und $U_2 = \langle v_2 \rangle$ sind also in der Tat zwei verschiedene eindimensionale invariante Unterräume der Spiegelungsabbildung (**Quizfrage 20.4:** klar?). Wegen $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ gilt $\mathbb{R}^2 = U_1 \oplus U_2$. In diesem Beispiel kann also der gesamte Vektorraum als direkte Summe invarianter Unterräume des Endomorphismus „Spiegelung“ geschrieben werden.

- (iii) Für die Ableitungsabbildung als Endomorphismus $f: K[t] \rightarrow K[t]$ (**Beispiel 18.10**) sind die invarianten Unterräume genau die Unterräume von der Form $\langle 1, t, t^2, \dots, t^k \rangle = K_k[t]$ für $k \in \mathbb{N}_0$ bzw. der Nullraum. (**Quizfrage 20.5:** Warum?) Wenn wir die Ableitungsabbildung einschränken auf den Polynomraum vom Höchstgrad $n \in \mathbb{N}_0$, also $f: K_n[t] \rightarrow K_n[t]$, dann sind die invarianten Unterräume noch immer genau die Unterräume der Form $K_k[t]$ für $k \in \mathbb{N}_0$ bzw. der Nullraum. In diesem Beispiel ist also keine Zerlegung des Vektorraumes $K_n[t]$ in eine direkte Summe verschiedener invarianter Unterräume möglich. \triangle

Wenn wir für den Moment annehmen, dass $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus auf einem Vektorraum V mit $\dim(V) = n \geq 2$ ist und U ein nicht-trivialer f -invarianter Unterraum, d. h., $\dim(U) = k$ mit $1 \leq k \leq n-1$, dann können wir eine Basis der Form

$$B_V = \underbrace{(v_1, \dots, v_k)}_{\text{Basis von } U}, \underbrace{(v_{k+1}, \dots, v_n)}_{\text{Basis eines zu } U \text{ komplementären Unterraumes } W}$$

verwenden, also $V = U \oplus W$ zerlegen. Bzgl. dieser Basis hat die Darstellungsmatrix von f die Gestalt

$$\mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f) = \left[\begin{array}{c|c} k & n-k \\ \hline A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & A_{22} \end{array} \right]_{n-k}$$

mit den angegebenen Dimensionen der Blöcke. An der Struktur der Matrix sieht man sehr schön, dass f auf dem Unterraum U „isoliert“ wirkt, dass also die Einschränkung $f|_U^U$ definiert ist.

Ist zusätzlich auch der zu U komplementäre Unterraum W ein f -invarianter Unterraum, gilt also $f(W) \subseteq W$, dann ist die Darstellungsmatrix von f eine **Blockdiagonalmatrix** (englisch: **block diagonal matrix**)

$$\mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f) = \left[\begin{array}{c|c} k & n-k \\ \hline A_{11} & 0 \\ \hline 0 & A_{22} \end{array} \right]_{n-k}$$

Hier wirkt also f nun in beiden Unterräumen „isoliert“, sodass auch die Einschränkung $f|_W^W$ definiert ist.

Diese Überlegungen gelten auch für Zerlegungen des Raumes V in direkte Summen von mehr als zwei Unterräumen. Es geht also bei der Aufgabe, eine möglichst einfache Gestalt der Darstellungsmatrix

eines Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ zu finden, darum, möglichst niedrig-dimensionale, paarweise verschiedene f -invariante Unterräume von V zu finden, deren direkte Summe den ganzen Raum V ergibt. Der triviale Fall, als einzigen f -invarianten Unterraum V selbst zu nutzen, ist immer möglich, manchmal nicht vermeidbar, bringt aber keine strukturelle Einsicht.

Satz 20.17 (Blockdiagonalgestalt der Darstellungsmatrix eines Endomorphismus).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über K mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus und $L \in \mathbb{N}_0$. Dann sind äquivalent:

- (i) Es existieren f -invariante Unterräume U_1, \dots, U_L der Dimensionen $\dim(U_j) = n_j \in \mathbb{N}_0$, sodass gilt:

$$V = U_1 \oplus \dots \oplus U_L. \tag{20.14}$$

- (ii) Es existiert eine Basis B_V von V , sodass die Darstellungsmatrix von f die Blockdiagonalgestalt

$$\mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f) = \begin{bmatrix} A_{11} & & & \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{LL} \end{bmatrix} \begin{matrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_L \end{matrix} \tag{20.15}$$

besitzt, wobei für die Blöcke $A_{jj} \in K^{n_j \times n_j}$, $j = 1, \dots, L$ gilt.

Beachte: Wie gesagt, der Fall $L = 1$ mit $U_1 = V$ ist immer möglich, bringt aber keine strukturelle Einsicht, da der einzige Block A_{11} in (20.15) die gesamte Matrix ist.

Beweis. □

Beispiel 20.18 (Blockdiagonalgestalt der Darstellungsmatrix eines Endomorphismus).

Das Beispiel der Spiegelungsabbildung aus [Beispiel 20.16](#) in $V = \mathbb{R}^2$ zeigt, dass es Endomorphismen gibt, die die in [Satz 20.17](#) beschriebene Darstellung in Form einer Blockdiagonalmatrix zulassen, die nicht nur aus einem großen Block besteht. Bezüglich der Basis $B_V = \left(\begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix} \right)$ erhalten wir für die Spiegelungsabbildung die diagonale Darstellungsmatrix (mit Blöcken der minimalen Größe $n_1 = n_2 = 1$)

$$\mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{\Delta}$$

Wir gehen dem in [Beispiel 20.18](#) beobachteten bestmöglichen Fall, in dem die Darstellung eines Endomorphismus in Form einer Diagonalmatrix möglich ist, weiter nach. Dieser Fall entspricht der Zerlegung von V in die direkte Summe von $L = N$ eindimensionalen Unterräumen, sodass die Blöcke in (20.15) alle die minimale Größe 1×1 haben. Was bedeutet diese Situation für die f -invarianten Unterräume U_j ?

Da U_j eindimensional ist, gibt es einen Vektor $v_j \neq 0$, sodass $U_j = \langle v_j \rangle$ gilt. Da $f(U_j) \subseteq U_j$ gilt, muss $f(v_j)$ ein Vielfaches von v_j sein. Das führt uns zu folgender Definition:

Definition 20.19 (Eigenwert, Eigenvektor eines Endomorphismus bzw. einer Matrix).

- (i) Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über K . Weiter sei $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus. Ein Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ heißt ein **Eigenvektor** (englisch: *eigenvector*) zum **Eigenwert** $\lambda \in K$ **des Endomorphismus** f (englisch: *eigenvalue*), wenn gilt:

$$f(v) = \lambda v. \quad (20.16)$$

In diesem Fall heißt $(\lambda, v) \in K \times (V \setminus \{0\})$ auch ein **Eigenpaar des Endomorphismus** f (englisch: *eigenpair*).

- (ii) Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ eine Matrix mit $n \in \mathbb{N}_0$. Ein Vektor $x \in K^n \setminus \{0\}$ heißt ein **Eigenvektor** zum **Eigenwert** $\lambda \in K$ **der Matrix** A , wenn gilt:

$$Ax = \lambda x. \quad (20.17)$$

In diesem Fall heißt $(\lambda, x) \in K \times (K^n \setminus \{0\})$ auch ein **Eigenpaar der Matrix** A . △

Beachte: Die Eigenpaare einer Matrix $A \in K^{n \times n}$ sind per Definition genau die Eigenpaare des von A induzierten Endomorphismus $f_A: K^n \rightarrow K^n$.

Beachte: Die Sprechweise „ $\lambda \in K$ ist ein Eigenwert des Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ “ bedeutet, dass es ein $v \in V \setminus \{0\}$ gibt, sodass $f(v) = \lambda v$ gilt. Analog bedeutet „ $\lambda \in K$ ist ein Eigenwert der Matrix $A \in K^{n \times n}$ “, dass es ein $x \in K^n \setminus \{0\}$ gibt, sodass $Ax = \lambda x$ gilt.“

Lemma 20.20 (Eigenpaare von Endomorphismen und ihrer Darstellungsmatrizen).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über K mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus und $A = \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f) \in K^{n \times n}$ seine Darstellungsmatrix bzgl. einer beliebigen Basis B_V von V . Dann sind äquivalent:

- (i) $\lambda \in K$ ist ein Eigenwert von f .
(ii) $\lambda \in K$ ist ein Eigenwert von A .

Weiter gilt:

- (iii) Ist $v \in V$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ von f , so ist $x = \Phi_{B_V}^{-1}(v)$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ von A .
(iv) Ist $x \in K^n$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ von A , so ist $v = \Phi_{B_V}(x)$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ von f .

Beweis. **Aussage (i) \Rightarrow Aussage (ii)** und **Aussage (iii):** Es sei $(\lambda, v) \in K \times (V \setminus \{0\})$ ein Eigenpaar von f und $x = \Phi_{B_V}^{-1}(v)$, also auch $v = \Phi_{B_V}(x)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} Ax &= f_A(x) && \text{nach Definition von } f_A \\ &= (\Phi_{B_V}^{-1} \circ f \circ \Phi_{B_V})(x) && \text{nach Satz 19.7} \\ &= \Phi_{B_V}^{-1}(f(\Phi_{B_V}(x))) && \text{nach Definition der Komposition} \\ &= \Phi_{B_V}^{-1}(f(v)) && \text{wegen } v = \Phi_{B_V}(x) \\ &= \Phi_{B_V}^{-1}(\lambda v) && \text{wegen } f(v) = \lambda v \\ &= \lambda \Phi_{B_V}^{-1}(v) && \text{wegen der Linearität von } \Phi_{B_V}^{-1} \\ &= \lambda x && \text{wegen } x = \Phi_{B_V}^{-1}(v). \end{aligned}$$

Das zeigt: $(\lambda, x) \in K \times (K^n \setminus \{0\})$ ist ein Eigenpaar von A .

Aussage (ii) \Rightarrow Aussage (i) und Aussage (iv): Es sei $(\lambda, x) \in K \times (K^n \setminus \{0\})$ ein Eigenpaar von A und $v = \Phi_{B_V}(x)$, also auch $x = \Phi_{B_V}^{-1}(v)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 f(v) &= (\Phi_{B_V} \circ f_A \circ \Phi_{B_V}^{-1})(v) && \text{nach Satz 19.7} \\
 &= \Phi_{B_V}(f_A(\Phi_{B_V}^{-1}(v))) && \text{nach Definition der Komposition} \\
 &= \Phi_{B_V}(f_A(x)) && \text{wegen } x = \Phi_{B_V}^{-1}(v) \\
 &= \Phi_{B_V}(Ax) && \text{nach Definition von } f_A \\
 &= \Phi_{B_V}(\lambda x) && \text{wegen } Ax = \lambda x \\
 &= \lambda \Phi_{B_V}(x) && \text{wegen der Linearität von } \Phi_{B_V} \\
 &= \lambda v && \text{wegen } v = \Phi_{B_V}(x).
 \end{aligned}$$

Das zeigt: $(\lambda, v) \in K \times (V \setminus \{0\})$ ist ein Eigenpaar von f . □

Folgerung 20.21 (ähnliche Matrizen haben dieselben Eigenwerte).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}_0$ und $A, \hat{A} \in K^{n \times n}$. Wenn A und \hat{A} ähnlich sind, dann besitzen sie genau dieselben Eigenwerte.

Beweis. Nach [Satz 20.14](#) können A und \hat{A} als Darstellungsmatrizen desselben Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ in einem Vektorraum V mit $\dim(V) = n$ angesehen werden. Nach [Lemma 20.20](#) sind daher die Eigenwerte von A und auch die Eigenwerte von \hat{A} identisch mit den Eigenwerten von f . □

Beachte: Die Umkehrung von [Folgerung 20.21](#) gilt nicht! Zwei Matrizen $A, \hat{A} \in K^{n \times n}$, die dieselben Eigenwerte besitzen, sind also nicht notwendigerweise ähnlich zueinander.

Beispiel 20.22 (nicht-ähnliche Matrizen mit gleichen Eigenwerten).

Die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in } \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

besitzen beide genau die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 1$, sie sind aber nicht ähnlich zueinander, denn der Ansatz $\hat{A} = T A T^{-1}$ bzw. $\hat{A} T = T A$ mit einer Matrix T führt auf

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

oder ausgeschrieben

$$\begin{bmatrix} t_{11} + t_{21} & t_{12} + t_{22} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix},$$

was notwendigerweise $t_{21} = t_{22} = 0$ ergibt. Damit hat T aber eine Nullzeile und ist nicht invertierbar. △

Wir kommen zurück zu der in [Beispiel 20.18](#) beobachteten Situation, in der zu einem Endomorphismus (der Spiegelungsabbildung auf \mathbb{R}^2) eine diagonale Darstellungsmatrix existierte.

Definition 20.23 (diagonalisierbarer Endomorphismus, diagonalisierbare Matrix).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}_0$.

- (i) Ein Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ eines Vektorraumes über K mit $\dim(V) = n$ heißt **diagonalisierbar** (englisch: **diagonalizable**), wenn es f -invariante Unterräume U_1, \dots, U_n der Dimension 1 gibt, sodass $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_n$ gilt.
- (ii) Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ heißt **diagonalisierbar** (englisch: **diagonalizable**), wenn sie zu einer Diagonalmatrix ähnlich ist. △

Den Zusammenhang zwischen der Diagonalisierbarkeit eines Endomorphismus und seinen Darstellungsmatrizen stellt der folgende Satz her:

Satz 20.24 (Diagonalisierbarkeit (der Darstellungsmatrix) eines Endomorphismus).

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über K mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus und $A = \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f) \in K^{n \times n}$ seine Darstellungsmatrix bzgl. einer beliebigen Basis B_V von V . Dann sind äquivalent:

- (i) f ist diagonalisierbar.
- (ii) V besitzt eine Basis, die nur aus Eigenvektoren von f besteht.
- (iii) A ist diagonalisierbar.
- (iv) K^n besitzt eine Basis, die nur aus Eigenvektoren von A besteht.

Beweis. **Aussage (i) \Rightarrow Aussage (iii):** Es sei f diagonalisierbar, also gibt es eine Zerlegung $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_n$ mit f -invarianten Unterräumen. Nach **Satz 20.17** gibt es also eine Basis \widehat{B}_V , sodass die Darstellungsmatrix $\widehat{A} = \mathcal{M}_{\widehat{B}_V}^{\widehat{B}_V}(f)$ eine Diagonalmatrix ist. Da A und \widehat{A} denselben Endomorphismus f darstellen, ist A nach **Satz 20.17** ähnlich zur Diagonalmatrix \widehat{A} , d. h., A ist diagonalisierbar.

Aussage (iii) \Rightarrow Aussage (iv): Es sei A diagonalisierbar, also existiert eine invertierbare Matrix $T \in K^{n \times n}$, sodass $\widehat{A} = T A T^{-1}$ eine Diagonalmatrix ist. Es gilt also

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Wir setzen $X := T^{-1}$ und schreiben $A = T^{-1} \widehat{A} T = X \widehat{A} X^{-1}$. Wir zeigen, dass die Spalten $x_{\bullet 1}, \dots, x_{\bullet n}$ von X Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ von A sind, denn es gilt:

$$\begin{aligned} A x_{\bullet j} &= X \widehat{A} X^{-1} x_{\bullet j} \\ &= X \widehat{A} e_j && \text{mit dem Standardbasisvektor } e_j \in K^n \\ &= X \lambda_j e_j && \text{wegen der Diagonalstruktur von } \widehat{A} \\ &= \lambda_j X e_j && \text{aufgrund des Assoziativgesetzes (15.12)} \\ &= \lambda_j x_{\bullet j} && \text{nach Definition der Matrix-Vektor-Multiplikation.} \end{aligned}$$

Da T invertierbar ist, ist auch $X = T^{-1}$ invertierbar. Die Spalten von X sind also linear unabhängig (**Satz 15.40**). Das heißt, K^n besitzt die Basis $x_{\bullet 1}, \dots, x_{\bullet n}$ aus Eigenvektoren von A . (Die Eigenwerte sind gerade die Diagonaleinträge von \widehat{A} .)

Aussage (iv) \Rightarrow Aussage (ii): Es sei (x_1, \dots, x_n) eine Basis von K^n aus Eigenvektoren der Matrix A zu den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$. Nach **Lemma 20.20** ist dann $v_j = \Phi_{B_V}(x_j)$ ein Eigenwert des

Endomorphismus f zum Eigenwert λ_j für jedes $j = 1, \dots, n$. Da $\Phi_{B_V} : K^n \rightarrow V$ ein Isomorphismus ist, bilden die Vektoren (v_1, \dots, v_n) eine Basis von V (Satz 17.7).

Aussage (ii) \Rightarrow Aussage (i): Es sei $B_V = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V aus lauter Eigenvektoren von f , sagen wir $f(v_j) = \lambda_j v_j$ für den zugehörigen Eigenwert $\lambda_j \in K$. Wir definieren die eindimensionalen Unterräume $U_j := \langle v_j \rangle$, $j = 1, \dots, n$. Dann ist jedes U_j f -invariant, denn es gilt

$$\begin{aligned} f(U_j) &= f(\langle v_j \rangle) && \text{nach Definition von } U_j \\ &= \langle f(v_j) \rangle && \text{nach Lemma 17.5} \\ &= \langle \lambda_j v_j \rangle && \text{wegen } f(v_j) = \lambda_j v_j \\ &= \lambda_j \langle v_j \rangle && \text{wegen Satz 12.13 (lineare Hülle besteht aus Linearkombinationen)} \\ &= \lambda_j U_j && \text{nach Definition von } U_j \\ &\subseteq U_j. \end{aligned}$$

(Quizfrage 20.6: Warum steht hier \subseteq und nicht $=$?) Weiter gilt nach Satz 14.16

$$V = \langle v_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle v_n \rangle = U_1 \oplus \dots \oplus U_n,$$

d. h., f ist diagonalisierbar. □

Wie der Beweis von Satz 20.24 zeigt, sind es genau die diagonalisierbaren Endomorphismen, die bei geeigneter Wahl der Basis (nämlich einer Basis aus lauter Eigenvektoren) die denkbar einfachste Form einer Darstellungsmatrix besitzen, nämlich eine Diagonalmatrix. Bei dieser sind die Diagonaleinträge gerade die Eigenwerte (die möglicherweise mehrfach auftreten). Zwei *diagonalisierbare* $n \times n$ -Matrizen sind also genau dann ähnlich, wenn sie zur selben Diagonalmatrix ähnlich sind.

Wie bereits erwähnt, werden wir

- den allgemeineren Fall von Darstellungsmatrizen in Blockdiagonalgestalt, der eintritt, wenn V als direkte Summe f -invarianter Unterräume darstellbar ist (Satz 20.17),
- sowie den ganz allgemeinen Fall für beliebige Endomorphismen

erst im zweiten Teil der Vorlesung untersuchen können. Wir nehmen jedoch vorweg, dass auch dabei Eigenwerte und Eigenvektoren von f eine wesentliche Rolle spielen.

Ende der Vorlesung 29

Ende der Woche 14

§ 21 DUALRÄUME UND ADJUNGIERTE HOMOMORPHISMEN

Literatur: Beutelspacher, 2014, Kapitel 5.4, Bosch, 2014, Kapitel 5.1, Fischer, Springborn, 2020, Kapitel 7.1

§ 21.1 DER DUALRAUM EINES VEKTORRAUMES

Definition 21.1 (Dualraum, Linearform).

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K . Der Vektorraum

$$V^* := \text{Hom}(V, K) \quad (21.1)$$

der linearen Abbildungen $V \rightarrow K$ heißt der **Dualraum** (englisch: **dual space**) von V . Die Elemente von V^* heißen auch **lineare Funktionale** (englisch: **linear functionals**) oder **Linearformen** (englisch: **linear forms**) auf V oder **Covektoren** (englisch: **covectors**). \triangle

Linearformen sind also lineare Abbildungen eines Vektorraumes V in den zugrunde liegenden Skalar-körper K , aufgefasst als 1-dimensionaler Vektorraum über sich selbst. Nach [Satz 17.11](#) ist V^* tatsächlich ein Vektorraum. Der Nullvektor in V^* ist die Nullabbildung, die wir auch als die **Nullform** (englisch: **zero form**) auf V bezeichnen können.

Beispiel 21.2 (Dualraum, Linearform).

- (i) Die Projektion auf die i -te Koordinate ([Beispiel 17.3](#))

$$\pi_i: K^n \ni x \mapsto x_i \in K$$

ist eine Linearform auf dem Standardvektorraum K^n über dem Körper K .

- (ii) Eine Auswertungsabbildung an irgendeinem Punkt $\alpha \in K$, definiert beispielsweise auf dem Vektorraum $K[t]$ der Polynome über einem Körper K , also

$$K[t] \ni p \mapsto \tilde{p}(\alpha) \in K,$$

ist eine Linearform auf $K[t]$.

- (iii) Die Grenzwert-Abbildung, definiert beispielsweise auf dem Vektorraum der konvergenten \mathbb{R} -wertigen Folgen $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})_c$ (siehe [Beispiel 17.3](#)) nach \mathbb{R} , also

$$\lim: (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})_c \ni (y_i)_{i \in \mathbb{N}_0} \mapsto \lim_{i \rightarrow \infty} (y_i) \in \mathbb{R},$$

ist eine Linearform auf $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})_c$.

- (iv) Ist $A \in K^{1 \times n}$ eine Matrix, dann ist $f_A: K^n \rightarrow K$ eine Linearform auf dem Standardvektorraum K^n über dem Körper K .

- (v) Ist $B = (v_1, \dots, v_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$ eine Basis des endlich-dimensionalen Vektorraumes V , so hat eine Linearform $v^* \in V^*$ die Darstellungsmatrix

$$\mathcal{M}_{(1)}^{B_V}(v^*) = [v^*(v_1) \quad \dots \quad v^*(v_n)] \in K^{1 \times n}.$$

\triangle

Ab sofort werden wir typische Linearformen auf V mit v^* bezeichnen.

Bemerkung 21.3 (zur Sprechweise).

- (i) Ausgehend von einer Linearform $v^* \in V^*$ bezeichnen wir die Auswertung von $v^*(v)$ für einen Vektor $v \in V$ auch als das **Einsetzen des Vektors v** in die Linearform v^* .

- (ii) Stellen wir dagegen den Vektor $v \in V$ in den Vordergrund, so bezeichnen wir die Auswertung von $v^*(v)$ auch als die **Anwendung der Linearform** v^* auf den Vektor v . \triangle

Bemerkung 21.4 (zur Bedeutung von Linearformen).

Vektoren, also Elemente eines Vektorraumes, haben oft eine physikalische Bedeutung, z. B. Geschwindigkeit. Als solche tragen sie auch eine Dimension (im Sinne des **internationalen Einheitensystems**) wie etwa „Länge geteilt durch Zeit“ im Falle der Geschwindigkeit, die sich auch in den möglichen Einheiten widerspiegelt wie m s^{-1} oder km h^{-1} .

Wir können eine Linearform oder einen Covektor interpretieren als eine Art „Maßstab“ für Vektoren. Eine Linearform auf dem Vektorraum V trägt gerade die reziproke Dimension der Vektoren in V . Wenn beispielsweise die Elemente von V Geschwindigkeiten repräsentieren mit der Dimension „Länge geteilt durch Zeit“, dann haben die Elemente von V^* die Dimension „Zeit geteilt durch Länge“. Demzufolge ist das Ergebnis der Auswertung $v^*(v)$ ein dimensionsloser Skalar. \triangle

Bemerkung 21.5 (auch Vektoren „sind“ lineare Abbildungen).

Covektoren (Linearformen) sind genauso natürliche Objekte wie Vektoren. Auch Vektoren können als lineare Abbildungen aufgefasst werden. Jedem Vektor $v \in V$ entspricht dabei eine Abbildung

$$K \ni \alpha \mapsto \alpha v \in V,$$

also ein Element von $\text{Hom}(K, V)$, genauer: Durch diese Zuordnung ist ein Isomorphismus zwischen V und $\text{Hom}(K, V)$ gegeben. Wir können also Vektoren in V mit Elementen in $\text{Hom}(K, V)$ identifizieren, während Covektoren Elemente von $\text{Hom}(V, K)$ sind. \triangle

Definition 21.6 (kanonische duale Paarung).

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und V^* sein Dualraum. Die Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: V^* \times V \ni (v^*, v) \mapsto \langle v^*, v \rangle := v^*(v) \in K \quad (21.2)$$

heißt die **(kanonische) duale Paarung** (englisch: **(canonical) dual pairing**) der Räume V^* und V .³⁷ \triangle

Wenn wir die Räume betonen wollen, schreiben wir auch $\langle v^*, v \rangle_{V^*, V}$.

Die duale Paarung dient zunächst nur dazu, die Lesbarkeit von Ausdrücken im Umgang mit Linearformen zu erleichtern. Wir halten eine wichtige Eigenschaft fest:

Lemma 21.7 (die duale Paarung ist linear in beiden Argumenten).

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und V^* sein Dualraum. Die duale Paarung (21.2) ist linear in beiden Argumenten, d. h., für $v^*, w^* \in V^*$ und $v, w \in V$ sowie $\alpha, \beta \in K$ gilt

$$\langle \alpha v^* + \beta w^*, v \rangle = \alpha \langle v^*, v \rangle + \beta \langle w^*, v \rangle \quad (21.3a)$$

$$\langle v^*, \alpha v + \beta w \rangle = \alpha \langle v^*, v \rangle + \beta \langle v^*, w \rangle. \quad (21.3b)$$

³⁷In der Physik ist dafür auch die **Bra-Ket-Notation** (englisch: **bra-ket notation**) üblich. Dort schreibt man $\langle v^* | v \rangle$ statt $\langle v^*, v \rangle$.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
 \langle \alpha v^* + \beta w^*, v \rangle &= (\alpha v^* + \beta w^*)(v) && \text{nach Definition von } \langle \cdot, \cdot \rangle \\
 &= \alpha v^*(v) + \beta w^*(v) && \text{nach Definition der Addition und S-Multiplikation} \\
 & && \text{von Homomorphismen (Satz 17.11)} \\
 &= \alpha \langle v^*, v \rangle + \beta \langle w^*, v \rangle && \text{nach Definition von } \langle \cdot, \cdot \rangle.
 \end{aligned}$$

Die Gleichung (21.3b) folgt sofort aus der Linearität von $v^* \in V^* = \text{Hom}(V, K)$. \square

Ist also $B = (v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V und ist $(\alpha_i)_{i \in I}$ eine Familie in K , dann gibt es genau eine lineare Abbildung $v^* \in V^*$ mit der Eigenschaft $v^*(v_i) = \langle v^*, v_i \rangle = \alpha_i$ für alle $i \in I$.

Das führt auf folgende Variante von Satz 19.5:

Satz 21.8 (die Zuordnung zur Familie der Bilder ist ein Vektorraumisomorphismus).

Es seien K ein Körper und V ein Vektorraum über K . Weiter sei $B = (v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V . Die Zuordnung

$$I_B: V^* \ni v^* \mapsto \langle v^*, v_i \rangle_{i \in I} \in K^I \quad (21.4)$$

einer Linearform zur Familie der Bilder ist ein Isomorphismus von Vektorräumen.

Beachte: V^* ist folglich isomorph zu K^I .

Beweis. Der Beweis folgt dem Aufbau von Satz 19.5.

Schritt 1: Wir zeigen zunächst die Linearität von I_B .

Es seien dazu $v^*, w^* \in V^*$ und $\alpha, \beta \in K$, dann gilt nach (21.3a)

$$\langle \alpha v^* + \beta w^*, v_i \rangle = \alpha \langle v^*, v_i \rangle + \beta \langle w^*, v_i \rangle,$$

also $I_B(\alpha v^* + \beta w^*) = \alpha I_B(v^*) + \beta I_B(w^*)$.

Schritt 2: Wir zeigen: I_B ist injektiv.

Es sei dazu $v^* \in V^*$ so, dass $I_B(v^*) = 0 \in K^I$ (die Nullfamilie) ergibt. Das heißt,

$$\langle v^*, v_i \rangle = 0$$

gilt für alle $i = 1, \dots, m$. Da v^* durch diese Werte aber eindeutig festgelegt ist, kann $v^*: V \rightarrow K$ nur die Nullabbildung sein, also der Nullvektor in V^* . Daher gilt $\text{Kern}(I_B) = \{0\}$, und nach Lemma 17.6 ist I_B injektiv.

Schritt 3: Wir zeigen: I_B ist surjektiv.

Es sei dazu ein beliebiges Element $(\alpha_i)_{i \in I} \in K^I$ gegeben. Nach Satz 17.7 gibt es (genau) einen Homomorphismus $v^*: V \rightarrow K$, der $\langle v^*, v_i \rangle = \alpha_i$ als Bilder hat, also $I_B(v^*) = (\alpha_i)_{i \in I}$. \square

Folgerung 21.9 (Dimension des Dualraumes).

Es seien K ein Körper und V ein Vektorraum über K mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt $V \cong V^*$ und damit $\dim(V) = \dim(V^*)$.

Beweis. Es sei $B = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V . Aus [Satz 21.8](#) folgt, dass

$$I_B: V^* \ni v^* \mapsto (\langle v^*, v_1 \rangle, \dots, \langle v^*, v_n \rangle) \in K^{\llbracket 1, n \rrbracket} \cong K_n$$

ein Isomorphismus ist.³⁸ Andererseits gilt nach [Folgerung 18.2](#) $K_n \cong V$, also auch $V^* \cong V$, und damit $\dim(V) = \dim(V^*) = n$. \square

Beachte: Der hier konstruierte Isomorphismus zwischen V und V^* hängt von der gewählten Basis B in V ab. Es gibt insbesondere keinen kanonischen (natürlichen) Isomorphismus zwischen V und V^* .

Quizfrage 21.1: Warum funktioniert der Beweis der Isomorphie von V und V^* in [Folgerung 21.9](#) nicht auch für unendlich-dimensionale Vektorräume?

Der folgende Satz beantwortet die Frage, wie wir aus einer Basis eines endlich-dimensionalen Vektorraumes V eine Basis von V^* erhalten können.

Satz 21.10 (Basis des Dualraumes).

Es seien K ein Körper und V ein **endlich-dimensionaler** Vektorraum über K mit Basis $B = (v_1, \dots, v_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Dann bilden die Linearformen $v_i^* \in V^*$ für $i = 1, \dots, n$, definiert durch die Bilder auf der Basis (v_1, \dots, v_n)

$$\langle v_i^*, v_j \rangle := \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{im Fall } i = j, \\ 0 & \text{im Fall } i \neq j, \end{cases} \quad (21.5)$$

eine Basis von V^* . Für die eindeutige Darstellung von $v^* \in V^*$ als Linearkombination von B^* gilt:

$$v^* = \sum_{i=1}^n v^*(v_i) v_i^* = \sum_{i=1}^n \underbrace{v^*(v_i)}_{\text{Koeffizient}} v_i^*. \quad (21.6)$$

Beweis. Zunächst stellen wir fest, dass die Linearformen v_1^*, \dots, v_n^* eindeutig definiert sind, da wir für jedes v_i^* die Bilder der Basisvektoren v_1, \dots, v_n angeben haben, die nach [Satz 17.7](#) die lineare Abbildung $v_i^* \in \text{Hom}(V, K) = V^*$ eindeutig festlegen.

Schritt 1: Die Vektoren v_1^*, \dots, v_n^* sind linear unabhängig:

Es sei $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i^* = 0_{V^*}$ der Nullvektor in V^* , also die Nullform. Durch Einsetzen von v_j in diese Linearkombination erhalten wir unter Benutzung von [\(21.3a\)](#)

$$0 = \langle 0_{V^*}, v_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i^*, v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \underbrace{\langle v_i^*, v_j \rangle}_{=\delta_{ij}} = \alpha_j,$$

also sind alle Koeffizienten notwendigerweise gleich Null.

Schritt 2: Die Vektoren v_1^*, \dots, v_n^* erzeugen den ganzen Raum V^* :

Es sei dazu $v^* \in V^*$ beliebig. Wir müssen zeigen, dass v^* als Linearkombination, die dann aufgrund von [Schritt 1](#) eindeutig ist, von v_1^*, \dots, v_n^* darstellbar ist. Dazu überprüfen wir die Darstellung [\(21.6\)](#), also

$$v^* = \sum_{i=1}^n \langle v^*, v_i \rangle v_i^*.$$

³⁸Dass die Menge der Abbildungen $\llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow K$ in natürlicher Weise bijektiv auf die Menge der Tupel $(k_1, \dots, k_n) \in K_n$ abgebildet werden kann, hatten wir in [Bemerkung 6.33](#) schon verwendet. Offenbar ist diese Zuordnung auch linear.

Beide Seiten der Gleichung sind Elemente von V^* . Wir zeigen, dass sie auf den Bildern der Basisvektoren v_1, \dots, v_n von V übereinstimmen. In der Tat gilt

$$\left\langle \sum_{i=1}^n \langle v^*, v_i \rangle v_i^*, v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \langle v^*, v_i \rangle \langle v_i^*, v_j \rangle = \langle v^*, v_j \rangle. \quad \square$$

Definition 21.11 (duale Basis).

Es seien K ein Körper und V ein Vektorraum über K mit Basis $B = (v_1, \dots, v_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Die durch (21.5) definierte Basis $B^* := (v_1^*, \dots, v_n^*)$ von V^* heißt die zur Basis B **duale Basis** (englisch: **dual basis**). \triangle

Beachte: Jeder Vektor v_i^* der dualen Basis hängt von der Gesamtheit der Wahl der Basisvektoren (v_1, \dots, v_n) der Basis von V ab, nicht nur von v_i , da die dualen Basisvektoren gemeinsam das System (21.5) erfüllen müssen.

Beispiel 21.12 (duale Basis).

- (i) Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}_0$ und $B = (e_1, \dots, e_n)$ die Standardbasis von $V = K^n$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Dann besteht die zu B duale Basis B^* aus den Projektionen auf die Koordinaten (Beispiel 21.2), also $B^* = (\pi_1, \dots, \pi_n)$, denn es gilt

$$\langle \pi_i, e_j \rangle = i\text{-te Koordinate von } e_j = \delta_{ij}$$

für alle $i, j = 1, \dots, n$. Das heißt also, wir erhalten die i -te Koordinate eines Vektors $x \in K^n$, indem wir das i -te Funktional der zur Standardbasis dualen Basis auf x anwenden.

- (ii) Allgemeiner seien K ein Körper, V ein Vektorraum über K mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$ und $B = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V . Ist $B^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$ die zu B duale Basis und $x = \Phi_B^{-1}(v)$ der Koordinatenvektor (Satz 19.1) von $v \in V$, dann gilt

$$x_i = \langle v_i^*, v \rangle \quad \text{für } i = 1, \dots, n \quad (21.7)$$

und damit

$$x = \Phi_B^{-1}(v) = \begin{pmatrix} \langle v_1^*, v \rangle \\ \vdots \\ \langle v_n^*, v \rangle \end{pmatrix}. \quad (21.8)$$

Die Linearform v_i^* aus der dualen Basis B^* ermittelt also bei Anwendung auf den Vektor $v \in V$ dessen i -te Koordinate bzgl. der Basis B von V . Wir nennen das Element v_i^* der zu B dualen Basis B^* auch die **i -te Koordinatenform** (englisch: **i -th coordinate form**) der Basis B . Es gilt also $v_i^* = \pi_i \circ \Phi_B^{-1}$. \triangle

Bemerkung 21.13 (Rolle der dualen Basis bei Darstellungsmatrizen).

Es seien V und W Vektorräume über demselben Körper K mit Basen $B_V = (v_1, \dots, v_m)$ bzw. $B_W = (w_1, \dots, w_n)$. Die Darstellungsmatrix $A = \mathcal{M}_{B_W}^{B_V}(f)$ eines Homomorphismus $f: V \rightarrow W$ hatten wir so eingeführt, dass sie spaltenweise die Koordinaten der Bilder der Basisvektoren v_j enthält:

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} w_i \quad \text{für alle } j = 1, \dots, m,$$

vgl. (19.3). Wir hatten aber keine Möglichkeit, einzelne Einträge der Darstellungsmatrix A anzugeben. Dies gelingt nun mit (21.7). Ist nämlich $B_W^* = (w_1^*, \dots, w_n^*)$ die zu B_W duale Basis, dann gilt

$$a_{ij} = \langle w_i^*, f(v_j) \rangle. \quad (21.9)$$

\triangle

Bemerkung 21.14 (Dualräume unendlich-dimensionaler Vektorräume).

In dem Fall, dass V unendlich-dimensional ist, erhalten wir mit der Konstruktion (21.5) **keine** Basis des Dualraumes V^* . Genauer: Es sei $B = (v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V mit unendlicher Indexmenge I . Wir definieren wie in (21.5) eine gleichmächtige Familie $B^* := (v_i^*)_{i \in I}$ an Elementen von V^* durch

$$\langle v_i^*, v_j \rangle := \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{im Fall } i = j, \\ 0 & \text{im Fall } i \neq j. \end{cases}$$

Dann ist B^* zwar eine linear unabhängige Familie in V^* , aber kein Erzeugendensystem, denn die durch

$$\langle v^*, v_i \rangle = 1 \quad \text{für alle } i \in I$$

definierte Linearform kann nicht als (endliche!) Linearkombination von Elementen aus B^* geschrieben werden. △

§ 21.2 DARSTELLUNG VON LINEARFORMEN

In diesem Abschnitt ist V endlich-dimensional mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$. So wie wir Vektoren $v \in V$ durch ihre Koordinatenvektoren $x \in K^n$ bzgl. einer gewählten Basis $B_V = (v_1, \dots, v_n)$ darstellen, können wir auch Linearformen bzgl. einer Basis im Dualraum darstellen. Wie sich gleich zeigen wird, bietet es sich dazu an, die duale Basis $B_V^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$ zu verwenden. Sind nämlich

$$v = \sum_{j=1}^n x_j v_j \quad \text{und} \quad v^* = \sum_{i=1}^n \xi_i v_i^*$$

die Darstellungen von $v \in V$ und $v^* \in V^*$, dann gilt

$$\langle v^*, v \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \xi_i v_i^*, \sum_{j=1}^n x_j v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i x_j \underbrace{\langle v_i^*, v_j \rangle}_{\delta_{ij}} = \sum_{j=1}^n \xi_j x_j.$$

Wir notieren die Koordinatenvektoren von v bzw. von v^* als

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n \quad \text{bzw.} \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \in K^n.$$

Mit dieser Konvention gilt

$$\langle v^*, v \rangle = \sum_{j=1}^n \xi_j x_j = \xi^T x. \tag{21.10}$$

Mit anderen Worten, wir wenden $v^* \in V^*$ auf einen Vektor $v \in V$ an, indem wir das Matrix-Matrix-Produkt $\xi^T x$ zwischen den Koordinatenvektoren $\xi^T \in K_n \cong K^{1 \times n}$ und $x \in K^n \cong K^{n \times 1}$ bestimmen.

Die Einträge des Koordinatenvektoren eines Vektors bzw. einer Linearform erhalten wir übrigens, indem wir die Elemente der jeweils anderen Basis der Reihe nach einsetzen bzw. anwenden:

Lemma 21.15 (Koordinatenvektoren von Vektoren und Linearformen).

Es seien K ein Körper und V ein Vektorraum über K mit Basis $B_V = (v_1, \dots, v_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei $B_V^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$ die zu B_V duale Basis von V^* .

(i) Für den Koordinatenvektor $x = \Phi_{B_V}^{-1}$ eines Vektors $v \in V$ gilt

$$x_i = \langle v_i^*, v \rangle, \quad i = 1, \dots, n. \quad (21.11)$$

(ii) Für den Koordinatenvektor $\xi = \Phi_{B_V^*}^{-1}$ einer Linearform $v^* \in V^*$ gilt

$$\xi_i = \langle v^*, v_i \rangle, \quad i = 1, \dots, n. \quad (21.12)$$

Beweis. Der Beweis ist Gegenstand von [Hausaufgabe II-1.3](#). □

Beispiel 21.16 (Darstellung von Linearformen).

(i) Im Vektorraum $K_n[t]$ der Polynome vom Höchstgrad $n \in \mathbb{N}_0$ über dem Körper K betrachten wir die Monombasis $B_V = (v_0, v_1, \dots, v_n) = (1, t, \dots, t^n)$. Die duale Basis $B_V^* = (v_0^*, v_1^*, \dots, v_n^*)$ ist dann gegeben durch die Ableitungsoperatoren (vgl. [Beispiel 17.8](#))

$$v_i^* := \frac{1}{i!} \frac{d}{dt^i} (0)$$

mit Auswertung an der Stelle $t = 0$, **genauer:**

$$\langle v_i^*, v \rangle := \frac{1}{i!} \left(\frac{dv}{dt^i} \right) (0)$$

Wählen wir im Fall $n = 2$ und $K = \mathbb{Q}$ beispielsweise das Polynom $v = 2t^2 - 3t + 1$, dann hat dieses den Koordinatenvektor $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Wir betrachten außerdem als Beispiel die durch $\langle v^*, v \rangle = \tilde{v}(0) - \tilde{v}(2)$ gegebene Linearform, die also die Differenz der Werte der durch v gegebene Polynomfunktion \tilde{v} an der Stelle $t = 0$ und $t = 2$ verwendet.

Um die Koordinaten dieser Linearform in der Basis B_V^* zu erhalten, setzen wir gemäß (21.12) der Reihe nach die Elemente der Basis B_V ein. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \langle v^*, 1 \rangle = 1 - 1 = 0 \\ \xi_1 &= \langle v^*, t \rangle = 0 - 2 = -2 \\ \xi_2 &= \langle v^*, t^2 \rangle = 0 - 4 = -4. \end{aligned}$$

Die gewählte Linearform hat also bzgl. der Basis B_V^* den Koordinatenvektor $\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Die Anwendung von v^* auf v ergibt

$$\langle v^*, v \rangle = \xi^T x = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = -2.$$

(ii) Im Vektorraum K^n stimmen Vektoren mit ihren Koordinatenvektoren x überein, wenn wir die Standardbasis wählen. Eine Linearform in $(K^n)^*$ können wir durch ihren Koordinatenvektor ξ bzgl. der dualen Basis darstellen. Da diese Zuordnung ein Isomorphismus ist ([Satz 19.1](#)), können wir Linearformen auf K^n auch direkt mit K^n selbst identifizieren. Die duale Paarung ist dann $\xi^T x$, siehe (21.10). △

Das folgende Lemma klärt, wie sich die duale Basis bei einem Basiswechsel verhält.

Lemma 21.17 (Zusammenhang der Basiswechsel zwischen Basis und dualer Basis).

Es seien K ein Körper und V ein Vektorraum über K mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$. Es seien $B_V = (v_1, \dots, v_n)$ und $\widehat{B}_V = (\widehat{v}_1, \dots, \widehat{v}_n)$ zwei Basen von V . Weiter seien $B_{V^*} = (v_1^*, \dots, v_n^*)$ und $\widehat{B}_{V^*} = (\widehat{v}_1^*, \dots, \widehat{v}_n^*)$ die jeweiligen dualen Basen. Ist

$$T := \mathcal{T}_{\widehat{B}_V}^{-B_V} = \mathcal{M}_{\widehat{B}_V}^{B_V}(\text{id}_V)$$

die Transformationsmatrix des Basiswechsels von B_V nach \widehat{B}_V (Definition 20.1), dann ist

$$T^{-\top} = \mathcal{T}_{\widehat{B}_{V^*}}^{-B_{V^*}} = \mathcal{M}_{\widehat{B}_{V^*}}^{B_{V^*}}(\text{id}_{V^*}) \tag{21.13}$$

die Transformationsmatrix des Basiswechsels von B_{V^*} nach \widehat{B}_{V^*} . Ist $\xi \in K^n$ der Koordinatenvektor der Linearform $v^* \in V^*$ bzgl. der Basis B_{V^*} , dann ist $\widehat{\xi} = T^{-\top} \xi$ der Koordinatenvektor von v^* bzgl. der Basis \widehat{B}_{V^*} .³⁹

Beweis. Mit der Transformationsmatrix $T = \mathcal{T}_{\widehat{B}_V}^{-B_V}$ des Basiswechsels von B_V nach \widehat{B}_V gilt

$$v_j = \sum_{i=1}^n t_{ij} \widehat{v}_i,$$

siehe (20.2). Die gesuchte Transformationsmatrix $S = \mathcal{T}_{\widehat{B}_{V^*}}^{-B_{V^*}}$ des Basiswechsels von B_{V^*} nach \widehat{B}_{V^*} erfüllt analog

$$v_j^* = \sum_{i=1}^n s_{ij} \widehat{v}_i^*.$$

Wir betrachten nun

$$\begin{aligned} \langle v_i^*, v_j \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^n s_{ki} \widehat{v}_k^*, \sum_{\ell=1}^n t_{\ell j} \widehat{v}_\ell \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n s_{ki} t_{\ell j} \langle \widehat{v}_k^*, \widehat{v}_\ell \rangle && \text{wegen der Linearität der dualen Paarung in beiden Argumenten} \\ &= \sum_{k=1}^n s_{ki} t_{kj} && \text{da } \widehat{B}_{V^*} \text{ die zu } \widehat{B}_V \text{ duale Basis ist und damit } \langle \widehat{v}_k^*, \widehat{v}_\ell \rangle = \delta_{k\ell} \text{ gilt} \\ &= (S^\top T)_{ij} && \text{nach der Definition (15.9) der Matrix-Matrix-Multiplikation.} \end{aligned}$$

Andererseits ist B_{V^*} die zu B_V duale Basis, also muss $\langle v_i^*, v_j \rangle = \delta_{ij}$ gelten. Das heißt, es gilt $S^\top T = I$, also $S = T^{-\top}$.

Wie in Lemma 20.3 transformiert sich der Koordinatenvektor ξ wie folgt:

$$\widehat{\xi} = \mathcal{T}_{\widehat{B}_{V^*}}^{-B_{V^*}} \xi = T^{-\top} \xi. \quad \square$$

Diese Transformationsvorschrift können wir uns auch aus (21.10) herleiten, denn diese Gleichung ist ja unabhängig davon, welche Basis und zugehörige duale Basis wir wählen. Wir wissen also einerseits

$$\langle v^*, v \rangle = \xi^\top x = \widehat{\xi}^\top \widehat{x}$$

und andererseits $\widehat{x} = T x$, also muss $\widehat{\xi} = T^{-\top} \xi$ gelten.

³⁹Vergleiche mit der Transformation von Koordinatenvektoren $\widehat{x} = \mathcal{T}_{\widehat{B}_V}^{-B_V} x = T x$ von Vektoren in V , siehe Lemma 20.3.

Bemerkung 21.18 (kovariante und kontravariante Transformationen).

Wir haben gesehen, dass beim Übergang von B_V zu \widehat{B}_V mittels $v_j = \sum_{i=1}^n t_{ij} \widehat{v}_i$, also in der Form von **alt** nach **neu** (Lemma 20.3)

$$\widehat{v}_j = \sum_{i=1}^n (T^{-1})_{ij} v_i,$$

sich die *Koordinatenvektoren* eines Vektors $v \in V$ mit der zu T^{-1} inversen Matrix transformieren, nämlich $\widehat{x} = T x$ bzw. in den einzelnen Koordinaten

$$\widehat{x}_i = \sum_{j=1}^n T_{ij} x_j.$$

Eine historische, aber immer noch verbreitete Sprechweise für diese Beobachtung ist, dass sich die Koordinaten eines Vektors in V **kontravariant** (englisch: **contravariant**, lateinisch: **contra-** (Vorsilbe): gegen, lateinisch: **variare**: verändern, verwandeln) **transformieren** im Vergleich mit der Transformation der Basisvektoren von V .⁴⁰

Demgegenüber transformieren sich die Koordinaten einer Linearform $v^* \in V^*$ wieder mit T^{-1} , nämlich

$$\widehat{\xi}_j = \sum_{i=1}^n (T^{-1})_{ij} \xi_i.$$

Diese Transformationsweise bezeichnet man als **kovariant** (englisch: **covariant**, lateinisch: **co-** (Vorsilbe): mit) im Vergleich mit der Transformation der Basisvektoren von V . △

§ 21.3 ANNIHILATOREN

Definition 21.19 ((Prä-)Annihilator).

Es seien K ein Körper und V ein Vektorraum über K .

(i) Ist $M \subseteq V$, dann heißt

$$\begin{aligned} M^0 &:= \{v^* \in V^* \mid \langle v^*, v \rangle = 0 \text{ für alle } v \in M\} \\ &= \{v^* \in V^* \mid M \subseteq \text{Kern}(v^*)\} \\ &= \bigcap_{v \in M} \{v\}^0 \subseteq V^* \end{aligned} \tag{21.14}$$

der **Annihilator** von M (englisch: **annihilator**).⁴¹

(ii) Ist $F \subseteq V^*$, dann heißt

$$\begin{aligned} {}^0F &:= \{v \in V \mid \langle v^*, v \rangle = 0 \text{ für alle } v^* \in F\} \\ &= \bigcap_{v^* \in F} \text{Kern}(v^*) \subseteq V \end{aligned} \tag{21.15}$$

der **Prä-Annihilator** von F (englisch: **pre-annihilator**).⁴² △

⁴⁰Die einfachste Ausprägung dieser Beobachtung ergibt sich, wenn etwa v_1 in der neuen Basis durch $\widehat{v}_1 = 2v_1$ ersetzt wird. Dadurch muss für den Koordinatenvektor bzgl. der neuen Basis $\widehat{x}_1 = \frac{1}{2}x_1$ gelten.

⁴¹Der Annihilator einer Menge $M \subseteq V$ besteht also aus denjenigen Linearformen auf V , die auf der Menge M verschwinden, also dort den Funktionswert 0 haben.

⁴²Der Prä-Annihilator einer Menge $F \subseteq V^*$ besteht also aus denjenigen Vektoren in V , auf denen alle $f \in F$ verschwinden.

Wir geben zunächst die (Prä-)Annihilatoren bestimmter Teilmengen von V und V^* an, nämlich die zu den trivialen Unterräumen.

Lemma 21.20 ((Prä-)Annihilatoren trivialer Unterräume).

Es seien K ein Körper und V ein Vektorraum über K . Dann gilt:

- (i) $\{0_V\}^0 = V^*$.
- (ii) $V^0 = \{0_{V^*}\}$.
- (iii) ${}^0\{0_{V^*}\} = V$.
- (iv) ${}^0(V^*) = \{0_V\}$.⁴³

Beweis. **Aussage (i):** Jede Linearform $v^* \in V^*$ bildet 0_V auf $0 \in K$ ab (Lemma 17.5). Das bedeutet

$$\{0_V\}^0 = \{v^* \in V^* \mid \langle v^*, 0_V \rangle = 0\} = V^*.$$

Aussage (ii): Die Menge

$$V^0 = \{v^* \in V^* \mid \langle v^*, v \rangle = 0 \text{ für alle } v \in V\}$$

enthält nach Definition nur die Nullform, also gilt $V^0 = \{0_{V^*}\}$.

Aussage (iii): Nach Definition ist

$${}^0\{0_{V^*}\} = \{v \in V \mid \langle v^*, v \rangle = 0 \text{ für } v^* = 0_{V^*}\} = V.$$

Aussage (iv): Nach Definition ist

$${}^0(V^*) = \{v \in V \mid \langle v^*, v \rangle = 0 \text{ für alle } v^* \in V^*\}.$$

Nach Satz 17.7 **Aussage (i)** existiert für jedes $v \in V \setminus \{0_V\}$ eine Linearform $v^* \in V^*$ mit der Eigenschaft $v^*(v) = 1$. (**Quizfrage 21.2:** Klar?) Das bedeutet, dass jedes $v \in V \setminus \{0_V\}$ nicht zu ${}^0(V^*)$ gehören kann. Andererseits gehört 0_V sicher zu ${}^0(V^*)$, da $v^*(0_V) = 0$ für alle $v^* \in V^*$ gilt. Das bedeutet aber ${}^0(V^*) = \{0_V\}$. \square

Die Annihilatoren der trivialen Unterräume aus Lemma 21.20 sind selbst wieder Unterräume. Das gilt auch allgemein für die Annihilatoren beliebiger Mengen:

Lemma 21.21 ((Prä-)Annihilatoren sind Unterräume).

Es seien K ein Körper und V ein Vektorraum über K . Dann gilt:

- (i) Ist $M \subseteq V$, dann ist M^0 ein Unterraum von V^* .
- (ii) Ist $F \subseteq V^*$, dann ist 0F ein Unterraum von V .

⁴³Dieses Resultat hängt im Fall, dass V unendlich-dimensional ist, vom Zornschen Lemma und damit vom Auswahlaxiom ab.

Beweis. **Aussage (i):** Wir benutzen das Unterraumkriterium (Satz 12.8). Weil die Nullform 0_{V^*} in M^0 liegt, ist $M^0 \neq \emptyset$. Sind nun $v^*, w^* \in M^0$ und $\alpha, \beta \in K$, dann gilt

$$\langle \alpha v^* + \beta w^*, v \rangle = \alpha \langle v^*, v \rangle + \beta \langle w^*, v \rangle = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$$

für alle $v \in M$, also gehört auch $\alpha v^* + \beta w^*$ zu M^0 .

Aussage (ii): Der Beweis geht analog. □

Beispiel 21.22 ((Prä-)Annihilatoren sind Unterräume).

- (i) Wir betrachten den Vektorraum $V := \mathbb{R}^{2 \times 2}$ der 2×2 -Matrizen über dem Körper \mathbb{R} . Weiter sei $U := \mathbb{R}_{\text{sym}}^{2 \times 2} \subseteq V$ der Unterraum der symmetrischen Matrizen, also

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{12} - a_{21} = 0 \right\}.$$

Der Annihilator U^0 besteht aus allen Linearformen $v^*: V \rightarrow \mathbb{R}$, die auf U verschwinden. Das sind gerade genau die Vielfachen von der durch $v^*(A) = a_{12} - a_{21}$ definierten Linearform v^* , also gilt

$$U^0 = \{v^* \in V^* \mid v^*(A) = \alpha (a_{12} - a_{21}) \text{ für ein } \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

- (ii) Wir betrachten den Vektorraum $V := \mathbb{R}^{3 \times 3}$ der 3×3 -Matrizen über dem Körper \mathbb{R} . Weiter sei $F \subseteq V^*$ der Unterraum, der durch die Linearformen

$$a_{12} + a_{21}, \quad a_{13} + a_{31}, \quad a_{23} + a_{32}, \quad a_{11}, \quad a_{22} \quad \text{und} \quad a_{33}$$

aufgespannt wird. Dann besteht der Prä-Annihilator 0F gerade aus allen Elementen von $\mathbb{R}^{3 \times 3}$, sodass diese drei Linearformen (und damit auch alle Linearkombinationen) dort verschwinden, also

$${}^0F = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid \begin{array}{l} a_{12} + a_{21} = 0, \quad a_{11} = 0 \\ a_{13} + a_{31} = 0, \quad a_{22} = 0 \\ a_{23} + a_{32} = 0, \quad a_{33} = 0 \end{array} \right\},$$

also gilt ${}^0F = \mathbb{R}_{\text{skew}}^{3 \times 3}$ (die antisymmetrischen 3×3 -Matrizen). △

Satz 21.23 ((Prä-)Annihilator eines Unterraumes).

Es seien K ein Körper und V ein Vektorraum über K mit Basis $B = (v_1, \dots, v_n)$ und dualer Basis $B^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$, $n \in \mathbb{N}_0$.

- (i) Ist (v_1, \dots, v_k) für $k \in \mathbb{N}_0$ eine Basis des Unterraumes $U \subseteq V$, dann ist $(v_{k+1}^*, \dots, v_n^*)$ eine Basis von U^0 . Insbesondere gilt

$$\dim(U^0) = \dim(V) - \dim(U) = \text{codim}(U). \quad (21.16)$$

- (ii) Ist (v_1^*, \dots, v_k^*) für $k \in \mathbb{N}_0$ eine Basis des Unterraumes $F \subseteq V^*$, dann ist (v_{k+1}, \dots, v_n) eine Basis von 0F . Insbesondere gilt

$$\dim({}^0F) = \dim(V^*) - \dim(F) = \dim(V) - \dim(F) = \text{codim}(F). \quad (21.17)$$

Beweis. Wir beweisen nur **Aussage (i)**. Als Teilfamilie einer Basis ist $(v_{k+1}^*, \dots, v_n^*)$ linear unabhängig (**Lemma 13.4**). Zu zeigen ist noch, dass $(v_{k+1}^*, \dots, v_n^*)$ ein Erzeugendensystem von U^0 ist.

Schritt 1: $\langle v_{k+1}^*, \dots, v_n^* \rangle \subseteq U^0$:

Aufgrund der Eigenschaften der dualen Basis gilt $v_i^*(v_j) = 0$ für alle $i = k+1, \dots, n$ und alle $j = 1, \dots, k$. Also verschwindet v_i^* sogar auf dem ganzen Unterraum $U = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$, d. h., $v_i^* \in U^0$ für alle $i = k+1, \dots, n$. Da U^0 aber ein Unterraum (von V^*) ist, gilt auch $\langle v_{k+1}^*, \dots, v_n^* \rangle \subseteq U^0$.

Schritt 2: $\langle v_{k+1}^*, \dots, v_n^* \rangle \supseteq U^0$:

Es sei $v^* \in U^0 \subseteq V^*$. v^* ist eindeutig durch seine Bilder auf der Basis $B = (v_1, \dots, v_n)$ festgelegt. Es gilt

$$\begin{aligned} v^* &= \sum_{i=1}^n v^*(v_i) v_i^* && \text{nach (21.6)} \\ &= \sum_{i=1}^k \underbrace{v^*(v_i) v_i^*}_{=0} + \sum_{i=k+1}^n v^*(v_i) v_i^* && \text{wegen } v^* \in U^0 \text{ und } v_i \in U \text{ für } i = 1, \dots, k \\ &= \sum_{i=k+1}^n v^*(v_i) v_i^*. \end{aligned}$$

Das bedeutet aber $v^* \in \langle v_{k+1}^*, \dots, v_n^* \rangle$. □

Das folgende Lemma zeigt, dass jeder Unterraum der Prä-Annihilator seines Annihilators ist.

Lemma 21.24 (Unterräume sind Prä-Annihilatoren⁴⁴).

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K . Für jeden Unterraum $U \subseteq V$ gilt

$$U = \bigcap_{v^* \in U^0} \text{Kern}(v^*) = {}^0(U^0). \quad (21.18)$$

Beweis. Nach Definition (21.15) gilt

$${}^0(U^0) = \{v \in V \mid \langle v^*, v \rangle_{V^*, V} = 0 \text{ für alle } v^* \in U^0\} = \bigcap_{v^* \in U^0} \text{Kern}(v^*).$$

Es ist also nur noch das erste Gleichheitszeichen in (21.18) zu zeigen.

Wir zeigen zunächst $U \subseteq \bigcap_{v^* \in U^0} \text{Kern}(v^*)$. Es sei dazu $u \in U$. Für beliebiges $v^* \in U^0$ gilt nach Definition (21.14) $\langle v^*, u \rangle = 0$, also $u \in \text{Kern}(v^*)$. Da v^* beliebig war, folgt $U \subseteq \bigcap_{v^* \in U^0} \text{Kern}(v^*)$.

Umgekehrt zeigen wir nun $\bigcap_{v^* \in U^0} \text{Kern}(v^*) \subseteq U$, und zwar durch Kontraposition. Es sei also $u \in V$, aber $u \notin U$. Wir beginnen mit einer Basis $\widehat{B} = (v_i)_{i \in \widehat{I}}$ von U . Weil u nicht in U liegt, bleibt \widehat{B} nach Hinzufügen von u eine linear unabhängige Menge. Wir ergänzen nun \widehat{B} plus u zu einer Basis $B = (v_i)_{i \in I}$ von V .

Nun definieren wir eine Linearform $v^* \in V^*$ durch Festlegung der Werte auf der Basis B . Wir setzen $\langle v^*, u \rangle := 1$ und $\langle v^*, v_i \rangle = 0$ für alle anderen Basiselemente. Insbesondere ist also v^* die Nullform auf U , also $v^* \in U^0$. Aber wegen $v^*(u) = 1$ gilt $u \notin \text{Kern}(v^*)$, also auch $u \notin \bigcap_{v^* \in U^0} \text{Kern}(v^*)$. □

⁴⁴Dieses Resultat hängt im Fall, dass V unendlich-dimensional ist, vom Zornschen Lemma und damit vom Auswahlaxiom ab.

Abschließend betrachten wir, welche Darstellung der (Prä-)Annihilator einer Teilmenge von K^n bzw. von $(K^n)^*$ hat, wenn wir die Identifikation von $(K^n)^*$ mit K^n wie in [Beispiel 21.16](#) vornehmen.

Beispiel 21.25 ((Prä-)Annihilator).

- (i) Ist $M \subseteq K^n$ und nehmen wir die Identifikation von $(K^n)^*$ mit K^n wie in [Beispiel 21.16](#) vor, dann gilt

$$M^0 = \{\xi \in K^n \mid \xi^T x = 0 \text{ für alle } x \in M\}.$$

- (ii) Wird $F \subseteq K^n$ interpretiert als Teilmenge von $(K^n)^*$, dann gilt

$${}^0F = \{x \in K^n \mid \xi^T x = 0 \text{ für alle } \xi \in F\}. \quad \triangle$$

Das Beispiel zeigt, dass die Konzepte von Annihilator und Prä-Annihilator formal identisch aussehen. Dennoch ist es wichtig zu unterscheiden, ob eine Menge von Vektoren in K^n Objekte in K^n oder in $(K^n)^*$ repräsentiert.

Ende der Vorlesung 2

Ende der Woche 1

§ 21.4 DUALE HOMOMORPHISMEN

Das folgende Diagramm illustriert, wie wir eine lineare Abbildung $f \in \text{Hom}(V, W)$ „dualisieren“ können. Das führt zu einer zugehörigen **dualen linearen Abbildung** $f^* \in \text{Hom}(W^*, V^*)$:

$$\begin{array}{ccc}
 W & \xleftarrow{f \in \text{Hom}(V, W)} & V \\
 \searrow & & \swarrow \\
 w^* \in W^* & & v^* = w^* \circ f \in V^* \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & K &
 \end{array}$$

Definition 21.26 (dualer Homomorphismus).

Es seien V und W Vektorräume über demselben Körper K . Weiter sei $f \in \text{Hom}(V, W)$ eine lineare Abbildung. Dann heißt

$$f^* : W^* \ni w^* \mapsto v^* := w^* \circ f \in V^* \quad (21.19)$$

der zu f **duale** (englisch: **dual homomorphism**) oder **transponierte Homomorphismus** (englisch: **transposed homomorphism**) bzw. die zu f **duale** oder **transponierte lineare Abbildung** (englisch: **dual linear map, transposed linear map**).⁴⁵ △

⁴⁵Die Notation für die duale Abbildung ist in der Literatur nicht einheitlich. Man findet auch Bezeichnungen wie f^* , f' , f^\vee und weitere. Manche Autoren, vor allem in Texten zur Funktionalanalysis (Analysis in unendlich-dimensionalen Vektorräumen) verwenden auch den Begriff **adjungierter Homomorphismus** oder **adjungierte lineare Abbildung** (englisch: **adjoint homomorphism, adjoint linear map**). Wir verwenden das Attribut „adjungiert“ später aber für etwas anderes.

Anders formuliert ist die zu f duale Abbildung f^* nichts Anderes als eine Abkürzung für den Ausdruck „ $\cdot \circ f$ “, in den man an der Stelle \cdot Elemente aus W^* einsetzen kann. Nochmal anders gesagt ist f^* definiert durch die Bedingung

$$\langle f^*(w^*), v \rangle_{V^*, V} = \langle w^*, f(v) \rangle_{W^*, W} \quad (21.20)$$

für alle $v \in V$ und alle $w^* \in W^*$.

Rücken wir in (21.19) die Linearformen in den Vordergrund, dann stellen wir fest, dass f^* eine Linearform w^* auf W in eine Linearform $v^* = w^* \circ f$ auf V verwandelt. Die lineare Abbildung $f \in \text{Hom}(V, W)$ wird also benutzt, um die Linearform w^* auf W zu einer Linearform v^* auf V „zurückzuziehen“. Man bezeichnet daher die Linearform $v^* = w^* \circ f$ auch als **Pullback** (englisch: **pullback**) von w^* durch f .

Wir zeigen nun, dass duale Abbildungen wieder linear sind, sodass die Bezeichnungen aus [Definition 21.26](#) gerechtfertigt sind.

Lemma 21.27 (der duale Homomorphismus ist selbst Homomorphismus).

Es seien V und W Vektorräume über demselben Körper K . Weiter sei $f \in \text{Hom}(V, W)$ eine lineare Abbildung. Dann ist $f^* \in \text{Hom}(W^*, V^*)$.

Beweis. f^* ist additiv, denn es gilt

$$\begin{aligned} f^*(w_1^* + w_2^*) &= (w_1^* + w_2^*) \circ f && \text{nach Definition von } f^* \\ &= w_1^* \circ f + w_2^* \circ f && \text{nach Definition der Addition von Abbildungen} \\ &&& \text{von Homomorphismen (Satz 17.11)} \\ &= f^*(w_1) + f^*(w_2) && \text{nach Definition von } f^*. \end{aligned}$$

Außerdem ist f^* homogen wegen

$$\begin{aligned} f^*(\alpha w^*) &= (\alpha w^*) \circ f && \text{nach Definition von } f^* \\ &= \alpha (w^* \circ f) && \text{nach Definition der S-Multiplikation von Abbildungen} \\ &&& \text{von Homomorphismen (Satz 17.11)} \\ &= \alpha f^*(w^*) && \text{nach Definition von } f^*. \end{aligned} \quad \square$$

Beispiel 21.28 (der duale Homomorphismus ist selbst Homomorphismus).

- (i) Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K . Dann gilt $\text{id}_V^* = \text{id}_{V^*}$, denn id_V^* ist eindeutig festgelegt durch die Bedingungen

$$\langle \text{id}_V^*(v^*), v \rangle_{V^*, V} = \langle v^*, \text{id}_V(v) \rangle_{V^*, V} = \langle v^*, v \rangle_{V^*, V}$$

für alle $v^* \in V^*$ und alle $v \in V$. Diese werden von $\text{id}_V^* = \text{id}_{V^*}$ erfüllt.

- (ii) Es sei $V = K^n$ über dem Körper K und $\pi_i: K^n \rightarrow K$ die Projektion auf die i -te Koordinate, siehe (17.4). Dann ist $\pi_i^*: K^* \rightarrow (K^n)^* \cong K_n$ definiert durch die Bedingungen

$$\langle \pi_i^*(y^*), x \rangle_{(K^n)^*, K^n} = \langle y^*, \pi_i(x) \rangle_{K^*, K}$$

für alle $x \in K^n$ und $y^* \in K^*$. Durch die Identifikation von K^* mit K und von $(K^n)^*$ mit K^n wie in [Beispiel 21.16](#) können wir π_i^* als Abbildung $K^n \rightarrow K$ auch darstellen durch

$$\pi_i^*(y) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-te Zeile.}$$

(iii) Es sei $V = K^{\llbracket 1,5 \rrbracket}$ der Vektorraum der endlichen Folgen der Länge 5 über einem Körper K und

$$f: V \ni (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) \mapsto (0, y_1, y_2, y_3, y_4) \in W = V$$

die Shift-Abbildung nach rechts ([Beispiel 19.4](#)). Dann ist die duale Abbildung $f^*: W^* \ni w^* \mapsto v^* := f^*(w^*) \in V^*$ gegeben durch die Bedingungen

$$\langle v^*, (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) \rangle_{V^*, V} = \langle w^*, (0, y_1, y_2, y_3, y_4) \rangle_{W^*, W}$$

für beliebige $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) \in V$. Beispielsweise für die durch

$$\langle w^*, (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) \rangle = z_3 + z_4$$

gegebene Linearform w^* ist $v^* = f^*(w^*)$ gegeben durch

$$\langle v^*, (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) \rangle = y_2 + y_3. \quad \triangle$$

Lemma 21.29 (Dualisieren einer Komposition von Homomorphismen).

Es seien K ein Körper und U, V und W Vektorräume über K . Ist $f \in \text{Hom}(V, W)$ und $g \in \text{Hom}(U, V)$, dann gilt für die duale Abbildung der Komposition $f \circ g \in \text{Hom}(U, W)$:

$$(f \circ g)^* = g^* \circ f^*. \quad (21.21)$$

Beweis. Der Beweis ist Gegenstand von [Hausaufgabe II-2.2](#). □

Wir zeigen nun, dass verschiedene Homomorphismen auch verschiedene duale Abbildungen haben.

Satz 21.30 (die Zuordnung zur dualen Abbildung ist ein injektiver Vektorraumhomomorphismus).

Es seien V und W Vektorräume über demselben Körper K .

(i) Die Zuordnung

$$I: \text{Hom}(V, W) \ni f \mapsto f^* \in \text{Hom}(W^*, V^*)$$

einer linearen Abbildung zu ihrer dualen Abbildung ist ein injektiver Homomorphismus von Vektorräumen.⁴⁶

⁴⁶Die Injektivität („Zwei verschiedene Homomorphismen haben auch verschiedene duale Homomorphismen.“) hängt im Fall, dass W unendlich-dimensional ist, vom Zornschen Lemma und damit vom Auswahlaxiom ab.

(ii) Sind V und W endlich-dimensional, dann ist I auch surjektiv, also ein Isomorphismus von Vektorräumen. Es gilt dann

$$\dim(\text{Hom}(W^*, V^*)) = \dim(\text{Hom}(V, W)) = \dim(V) \dim(W). \quad (21.22)$$

Beweis. **Aussage (i):** I ist additiv, denn für $f, g \in \text{Hom}(V, W)$ und $w^* \in W^*$ gilt

$$\begin{aligned} (I(f+g))(w^*) &= w^* \circ (f+g) && \text{nach Definition von } I \\ &= w^* \circ f + w^* \circ g && \text{denn } w^* \text{ ist linear} \\ &= (I(f))(w^*) + (I(g))(w^*) && \text{nach Definition von } I \\ &= (I(f) + I(g))(w^*). \end{aligned}$$

Außerdem ist I homogen, denn es gilt

$$\begin{aligned} (I(\alpha f))(w^*) &= w^* \circ (\alpha f) && \text{nach Definition von } I \\ &= \alpha w^* \circ (f) && \text{denn } w^* \text{ ist linear} \\ &= \alpha (I(f))(w^*) && \text{nach Definition von } I \\ &= ((\alpha I)(f))(w^*). \end{aligned}$$

Weiterhin ist I injektiv, denn $f \in \text{Kern}(I)$ heißt, dass $f^* = I(f) \in \text{Hom}(W^*, V^*)$ die Nullabbildung ist, also gilt

$$0_{V^*} = f^*(w^*) = w^* \circ f$$

für alle $w^* \in W^*$, oder auch

$$w^*(f(v)) = 0$$

für alle $w^* \in W^*$ und alle $v \in V$. Das bedeutet aber nach [Lemma 21.20](#)

$$f(V) \subseteq \bigcap_{w^* \in W^*} \text{Kern}(w^*) = {}^0W^* = \{0_W\}.$$

Mit anderen Worten, f ist die Nullabbildung. Also ist I injektiv.

Aussage (ii): Wenn V und W endlich-dimensional sind, dann ist auch $\text{Hom}(V, W)$ endlich-dimensional, und es gilt ([Folgerung 19.6](#)) $\dim(\text{Hom}(V, W)) = \dim(V) \dim(W)$. Außerdem gilt nach [Folgerung 21.9](#) auch $\dim(V) = \dim(V^*)$ und $\dim(W) = \dim(W^*)$, also

$$\dim(\text{Hom}(V, W)) = \dim(V) \dim(W) = \dim(V^*) \dim(W^*) = \dim(\text{Hom}(W^*, V^*)).$$

Die lineare Abbildung I bildet also zwischen zwei Vektorräumen derselben endlichen Dimension ab. Da I in [Aussage \(i\)](#) bereits als injektiv gezeigt wurde, folgt aus [Folgerung 18.9](#), dass I auch surjektiv ist, also ein Isomorphismus. \square

Bemerkung 21.31 (zur Surjektivität von I).

Man kann allgemeiner zeigen, dass I surjektiv ist, sobald W endliche Dimension besitzt. Dieser Beweis benötigt dann wieder das Auswahlaxiom, sofern V unendlich-dimensional ist. Andererseits kann man zeigen, dass I tatsächlich nicht surjektiv ist, wenn W unendlich-dimensional und V nicht der Nullraum ist. \triangle

Schließlich erhalten wir folgende Aussage über den Zusammenhang von Injektivität und Surjektivität von Homomorphismen und ihren Dualen:

Satz 21.32 (Injektivität und Surjektivität des dualen Homomorphismus⁴⁷).

Es seien K ein Körper und V und W zwei Vektorräume über K . Dann gilt:

- (i) $f \in \text{Hom}(V, W)$ ist genau dann injektiv, wenn $f^* \in \text{Hom}(W^*, V^*)$ surjektiv ist.
- (ii) $f \in \text{Hom}(V, W)$ ist genau dann surjektiv, wenn $f^* \in \text{Hom}(W^*, V^*)$ injektiv ist.
- (iii) $f \in \text{Hom}(V, W)$ ist genau dann bijektiv, wenn $f^* \in \text{Hom}(W^*, V^*)$ bijektiv ist.
- (iv) Falls f und f^* beide bijektiv sind, gilt $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$. Aus diesem Grund können wir statt $(f^*)^{-1}$ auch einfach f^{-*} schreiben.

Beweis. **Aussage (i):** Es sei zunächst f injektiv. Wir definieren $U := \text{Bild}(f) \subseteq W$. Dann ist die Einschränkung $f|_U : V \rightarrow U$ bijektiv. Die Umkehrabbildung sei $g \in \text{Hom}(U, V)$. Es sei weiter \widehat{U} ein zu U komplementärer Unterraum von W .

Wir wollen zeigen, dass $f^* \in \text{Hom}(W^*, V^*)$ surjektiv ist. Es sei dazu $v^* \in V^*$ beliebig. Wir definieren das Element $w^* \in W^*$ durch

$$w^* : W = U \oplus \widehat{U} \ni (u, \widehat{u}) \mapsto \langle v^*, g(u) \rangle \in K.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \langle f^*(w^*), v \rangle &= \langle w^*, f(v) \rangle && \text{nach Definition von } f^* \\ &= \langle v^*, g(f(v)) \rangle && \text{nach Definition von } w^* \text{ und wegen } f(v) \in U \\ &= \langle v^*, v \rangle && \text{da } g \text{ die Umkehrabbildung von } f|_U \text{ ist} \end{aligned}$$

für alle $v \in V$. Das heißt aber gerade $f^*(w^*) = v^*$, also ist f^* surjektiv.

Umgekehrt sei nun $f^* \in \text{Hom}(W^*, V^*)$ surjektiv. Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, f sei nicht injektiv. Dann besteht also $\text{Kern}(f)$ aus mehr als dem Nullunterraum von V . Unter Verwendung des **Basisergänzungssatzes 13.11** können wir leicht zeigen, dass es eine Linearform $v^* \in V^*$ gibt, deren Einschränkung auf $\text{Kern}(f)$ nicht die Nullform ist. (**Quizfrage 21.3:** Wie geht das genau?) Das bedeutet aber, dass v^* nicht von der Form $f^*(w^*) = w^* \circ f$ sein kann für irgendein $w^* \in W^*$, denn jeder Abbildung der Form $w^* \circ f$ ist auf $\text{Kern}(f)$ die Nullform. Das steht im Widerspruch zur angenommenen Surjektivität von f^* . Also muss f injektiv sein.

Aussage (ii): Es sei zunächst f surjektiv. Es seien $w_1^*, w_2^* \in W^*$ mit der Eigenschaft $f^*(w_1^*) = f^*(w_2^*)$ gegeben. Also gilt $w_1^* \circ f = w_2^* \circ f$. Da f surjektiv ist, existiert zu beliebigem $w \in W$ ein $v \in V$ mit $w = f(v)$. Wir haben also

$$\langle w_1^*, w \rangle = \langle w_1^*, f(v) \rangle = (w_1^* \circ f)(v) = (w_2^* \circ f)(v) = \langle w_2^*, f(v) \rangle = \langle w_2^*, w \rangle$$

für alle $w \in W$ und damit $w_1^* = w_2^*$, d. h., f^* ist injektiv.

Umgekehrt sei nun $f^* \in \text{Hom}(W^*, V^*)$ injektiv. Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, f sei nicht surjektiv. Wir definieren $U := \text{Bild}(f) \subseteq W$. Es sei weiter \widehat{U} ein zu U komplementärer Unterraum von W .

Wie im Beweis von **Aussage (i)** können mit Hilfe des **Basisergänzungssatzes 13.11** eine Linearform $w^* \in W^*$ konstruieren mit der Eigenschaft $w^*|_U = 0$ (Nullform) und $w^*|_{\widehat{U}} \neq 0$. Dann gilt aber

⁴⁷Dieses Resultat hängt im Fall, dass V bzw. W unendlich-dimensional ist, vom Zornschen Lemma und damit vom Auswahlaxiom ab.

$f^*(w^*) = w^* \circ f = 0_{V^*}$, also liegt w^* in $\text{Kern}(f^*)$, im Widerspruch zur angenommenen Injektivität von f^* . Also muss f surjektiv sein.

Aussage (iii): Das folgt sofort aus Aussage (i) und Aussage (ii).

Aussage (iv): Es gilt

$$\begin{aligned} f^* \circ (f^{-1})^* &= (f^{-1} \circ f)^* && \text{nach Lemma 21.29} \\ &= \text{id}_V^* \\ &= \text{id}_{V^*} && \text{nach Beispiel 21.28} \end{aligned}$$

und außerdem

$$\begin{aligned} (f^{-1})^* \circ f^* &= (f \circ f^{-1})^* && \text{nach Lemma 21.29} \\ &= \text{id}_W^* \\ &= \text{id}_{W^*} && \text{nach Beispiel 21.28.} \end{aligned}$$

Also ist $(f^{-1})^*$ die Inverse von f^* . □

§ 21.5 DARSTELLUNGSMATRIZEN DUALER HOMOMORPHISMEN

Wir untersuchen jetzt, wie die Darstellungsmatrizen einer linearen Abbildung $f \in \text{Hom}(V, W)$ und ihrer dualen linearen Abbildung $f^* \in \text{Hom}(W^*, V^*)$ zusammenhängen. Dazu seien V und W endlich-dimensionale Vektorräume über demselben Körper K und $B_V = (v_1, \dots, v_m)$ und $B_W = (w_1, \dots, w_n)$ Basen von V bzw. von W . Wir erinnern uns, dass die Darstellungsmatrix $A = \mathcal{M}_{B_W}^{B_V}(f) = (a_{ij})$ von f bzgl. dieser Basen gegeben ist durch

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} w_i \quad \text{für alle } j = 1, \dots, m.$$

Wenden wir auf beide Seiten das Element $w_k^* \in W^*$ der zu B_W dualen Basis an (das ja nach Lemma 21.15 als Koordinatenermittler wirkt), so erhalten wir

$$\underbrace{\langle w_k^*, f(v_j) \rangle}_{= \langle f^*(w_k^*), v_j \rangle} = \left\langle w_k^*, \sum_{i=1}^n a_{ij} w_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n a_{ij} \underbrace{\langle w_k^*, w_i \rangle}_{= \delta_{ki}} = a_{kj} \quad \text{für alle } j = 1, \dots, m. \quad (21.23)$$

Wir entscheiden uns dafür, für die Darstellungsmatrix von f^* die dualen Basen zu verwenden. Die gesuchte Matrix

$$B = \mathcal{M}_{B_V^*}^{B_W^*}(f^*) \in K^{m \times n}$$

mit Einträgen b_{ij} erfüllt dann

$$f^*(w_j^*) = \sum_{i=1}^m b_{ij} v_i^* \quad \text{für alle } j = 1, \dots, n.$$

Setzen wir in beide Seiten das Element v_k der Basis B_V ein, so erhalten wir

$$\langle f^*(w_j^*), v_k \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^m b_{ij} v_i^*, v_k \right\rangle = \sum_{i=1}^m b_{ij} \underbrace{\langle v_i^*, v_k \rangle}_{= \delta_{ik}} = b_{kj} \quad \text{für alle } j = 1, \dots, n. \quad (21.24)$$

Ein Vergleich der linken Seiten von (21.23) und (21.24) zeigt den Zusammenhang $b_{kj} = a_{jk}$, also $B = A^T$!

Wir haben damit folgenden Satz bewiesen:

Satz 21.33 (Darstellungsmatrix des dualen Homomorphismus).

Es seien V und W endlich-dimensionale Vektorräume über demselben Körper K und $B_V = (v_1, \dots, v_m)$ und $B_W = (w_1, \dots, w_n)$ Basen von V bzw. von W . Weiter sei $f \in \text{Hom}(V, W)$ eine lineare Abbildung mit dualer Abbildung $f^* \in \text{Hom}(W^*, V^*)$. Ist $A = \mathcal{M}_{B_W}^{B_V}(f) = (a_{ij})$ die Darstellungsmatrix von f bzgl. der Basen B_V und B_W , dann ist $A^\top = \mathcal{M}_{B_V^*}^{B_W^*}(f^*)$ die Darstellungsmatrix von f^* bzgl. der dualen Basen B_W^* und B_V^* .

Folgerung 21.34 (Rang der dualen Abbildung).

Es seien V und W endlich-dimensionale Vektorräume über demselben Körper K . Weiter sei $f \in \text{Hom}(V, W)$ eine lineare Abbildung mit dualer Abbildung $f^* \in \text{Hom}(W^*, V^*)$. Dann gilt $\text{Rang}(f^*) = \text{Rang}(f)$.

Beweis. Wir wählen irgendwelche Basen B_V und B_W von V bzw. W . Dann haben die Darstellungsmatrizen $A = \mathcal{M}_{B_W}^{B_V}(f)$ und $A^\top = \mathcal{M}_{B_V^*}^{B_W^*}(f^*)$ denselben Rang (Lemma 15.27). Nach Satz 19.9 haben wir also $\text{Rang}(f) = \text{Rang}(A) = \text{Rang}(A^\top) = \text{Rang}(f^*)$. \square

Folgerung 21.35 (Duale Abbildung der von einer Matrix induzierten linearen Abbildung).

Es seien K ein Körper und $A \in K^{n \times m}$. Bei Identifikation von $(K^n)^*$ bzw. $(K^m)^*$ mit K^n bzw. K^m wie in Beispiel 21.16 gilt für die duale Abbildung $(f_A)^* \in \text{Hom}(K^n, K^m)$ der durch A induzierten Abbildung $f_A \in \text{Hom}(K^m, K^n)$

$$(f_A)^* = f_{A^\top}. \quad (21.25)$$

Beweis. Die linke Seite in (21.25) ist nach (21.20) und wegen der Identifikation von K^n und K^m mit ihrem jeweiligen Dualraum definiert durch

$$[(f_A)^*(y)]^\top x = y^\top f_A(x) \quad \text{für alle } x \in K^m \text{ und } y \in K^n.$$

Nach Definition von f_A ist die rechte Seite dieser Gleichung gerade $y^\top (Ax)$ oder auch $(y^\top A)x$. Damit muss

$$[(f_A)^*(y)]^\top = y^\top A$$

gelten und daher $(f_A)^*(y) = A^\top y$. Das ist aber gerade die Behauptung (21.25). \square

Abschließend untersuchen wir noch, wie sich die Darstellungsmatrix eines dualen Homomorphismus bei einem Basiswechsel transformiert. Wir kennen aus Lemma 21.17 bereits den Zusammenhang

$$\mathcal{T}_{\widehat{B}_V^*}^{B_V^*} = [\mathcal{T}_{B_V}^{\widehat{B}_V}]^\top = [\mathcal{T}_{\widehat{B}_V}^{B_V}]^{-\top}$$

der Transformationsmatrizen für einen Basiswechsel im Raum V und den zugehörigen Wechsel der dualen Basen im Raum V^* . Entsprechend erhalten wir für die Transformation der Darstellungsmatrizen eines Homomorphismus $f \in \text{Hom}(V, W)$ nach (20.5) und des dualen Homomorphismus $f^* \in \text{Hom}(W^*, V^*)$ die folgenden Beziehungen:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{\widehat{B}_W}^{\widehat{B}_V}(f) = \mathcal{T}_{\widehat{B}_W}^{B_W} \mathcal{M}_{B_W}^{B_V}(f) \mathcal{T}_{B_V}^{\widehat{B}_V} & \text{und} & \mathcal{M}_{\widehat{B}_W^*}^{B_W^*}(f^*) = \mathcal{T}_{\widehat{B}_W^*}^{B_W^*} \mathcal{M}_{B_W^*}^{B_V^*}(f^*) \mathcal{T}_{B_V^*}^{\widehat{B}_V^*} \\ \widehat{A} = S & A & T^{-1} & \widehat{A}^\top = T^{-\top} & A^\top & S^\top \end{array} \quad (21.26)$$

§ 21.6 DIE VIER FUNDAMENTALEN UNTERRÄUME ZU EINER LINEAREN ABBILDUNG

In diesem Abschnitt zeigen wir einen wichtigen Zusammenhang zwischen den Unterräumen Kern und Bild von f und f^* . Man spricht auch von den **vier fundamentalen Unterräumen** (englisch: *four fundamental subspaces*) zu einer linearen Abbildung f .

Satz 21.36 (vier fundamentale Unterräume zu einer linearen Abbildung⁴⁸).

Es seien V und W Vektorräume über demselben Körper K . Weiter sei $f \in \text{Hom}(V, W)$ eine lineare Abbildung mit dualer Abbildung $f^* \in \text{Hom}(W^*, V^*)$. Dann gilt:

$$\text{Bild}(f^*) = \text{Kern}(f)^0 \quad \text{in } V^* \quad (21.27a)$$

$$\text{Kern}(f^*) = \text{Bild}(f)^0 \quad \text{in } W^* \quad (21.27b)$$

$$\text{Bild}(f) = {}^0\text{Kern}(f^*) \quad \text{in } W \quad (21.27c)$$

$$\text{Kern}(f) = {}^0\text{Bild}(f^*) \quad \text{in } V \quad (21.27d)$$

Beweis. Zur besseren Übersicht geben wir jeweils die beiden an einer Aussage beteiligten Unterräume nochmals an.

Wir beginnen mit (21.27a), also

$$\text{Bild}(f^*) = \{f^*(w^*) \in V^* \mid w^* \in W^*\}$$

$$\text{Kern}(f)^0 = \{v^* \in V^* \mid \langle v^*, v \rangle = 0 \text{ für alle } v \in \text{Kern}(f)\}.$$

Es sei zunächst $v^* \in \text{Bild}(f^*)$, also existiert $w^* \in W^*$ mit $v^* = f^*(w^*) = w^* \circ f$. Für beliebiges $v \in \text{Kern}(f)$ ist $\langle v^*, v \rangle = \langle w^*, f(v) \rangle = \langle w^*, 0_W \rangle = 0$. Also liegt v^* in $\text{Kern}(f)^0$.

Umgekehrt sei $v^* \in \text{Kern}(f)^0$. Wir definieren ein passendes Element $w^* \in W^*$ mit der Eigenschaft $v^* = f^*(w^*)$. Dazu definieren wir die Werte von w^* zunächst auf dem Unterraum $\text{Bild}(f) \subseteq W$ durch

$$\langle w^*, f(v) \rangle := \langle v^*, v \rangle \quad \text{für alle } v \in V.$$

Diese Vorschrift ist wohldefiniert, denn $f(v_1) = f(v_2)$ bedeutet $v_1 - v_2 \in \text{Kern}(f)$. Da v^* in $\text{Kern}(f)^0$ liegt, ist $\langle v^*, v_1 - v_2 \rangle = 0$, also $\langle v^*, v_1 \rangle = \langle v^*, v_2 \rangle$.

Wir können nun w^* beliebig auf ganz W fortsetzen. (**Quizfrage 21.4:** Wie geht das genau?) Schließlich gilt per Definition

$$\langle f^*(w^*), v \rangle = \langle w^* \circ f, v \rangle = \langle w^*, f(v) \rangle = \langle v^*, v \rangle$$

für alle $v \in V$, also $f^*(w^*) = w^* \circ f = v^*$. Das zeigt (21.27a).

Nun adressieren wir (21.27b) mit

$$\begin{aligned} \text{Kern}(f^*) &= \{w^* \in W^* \mid f^*(w^*) = 0_{V^*}\} \\ &= \{w^* \in W^* \mid w^* \circ f = 0_{V^*}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Bild}(f)^0 &= \{w^* \in W^* \mid \langle w^*, w \rangle = 0 \text{ für alle } w \in \text{Bild}(f)\} \\ &= \{w^* \in W^* \mid \langle w^*, f(v) \rangle = 0 \text{ für alle } v \in V\}. \end{aligned}$$

⁴⁸Dieses Resultat hängt im Fall, dass V bzw. W unendlich-dimensional ist, vom Zornschen Lemma und damit vom Auswahlaxiom ab.

Es gilt

$$\begin{aligned}
 & w^* \in \text{Bild}(f)^0 \\
 \Leftrightarrow & \langle w^*, f(v) \rangle = 0 \text{ für alle } v \in V \\
 \Leftrightarrow & w^* \circ f = 0_{V^*} \\
 \Leftrightarrow & w^* \in \text{Kern}(f^*).
 \end{aligned}$$

Wir beweisen nun (21.27c) mit

$$\text{Bild}(f) = \{f(v) \in W \mid v \in V\}$$

$$\begin{aligned}
 {}^0\text{Kern}(f^*) &= \{w \in W \mid \langle w^*, w \rangle = 0 \text{ für alle } w^* \in \text{Kern}(f^*)\} \\
 &= \{w \in W \mid \langle w^*, w \rangle = 0 \text{ für alle } w^* \in W^* \text{ mit } f^*(w^*) = w^* \circ f = 0_{V^*}\}.
 \end{aligned}$$

Es sei zunächst $w \in \text{Bild}(f)$, also $w = f(v)$ für ein $v \in V$. Weiter sei $w^* \in W^*$ mit der Eigenschaft $w^* \circ f = 0_{V^*}$. Dann gilt

$$\langle w^*, w \rangle = \langle w^*, f(v) \rangle = \langle w^* \circ f, v \rangle = \langle 0_{V^*}, v \rangle = 0,$$

also $w \in {}^0\text{Kern}(f^*)$.

Für die Umkehrung führen wir einen Beweis durch Kontraposition. Es sei also $w \in W$, aber $w \notin \text{Bild}(f)$. Wir beginnen mit einer Basis $\widehat{B} = (w_i)_{i \in \widehat{I}}$ von $\text{Bild}(f)$. Weil w nicht in $\text{Bild}(f)$ liegt, bleibt \widehat{B} nach Hinzufügen von w eine linear unabhängige Menge. Wir ergänzen nun \widehat{B} plus w zu einer Basis $B = (w_i)_{i \in I}$ von W .

Nun definieren wir eine Linearform $w^* \in W^*$ durch Festlegung der Werte auf der Basis B . Wir setzen $\langle w^*, w \rangle := 1$ und $\langle w^*, w_i \rangle = 0$ für alle anderen Basiselemente. Insbesondere ist also w^* die Nullform auf $\text{Bild}(f)$, es gilt also $w^* \circ f = 0_{V^*}$. Dieses w^* zeigt, dass w nicht zu ${}^0\text{Kern}(f^*)$ gehört, denn w^* erfüllt $w^* \circ f = 0_{V^*}$ und $\langle w^*, w \rangle = 1 \neq 0$.

Um (21.27d) zu zeigen, betrachten wir

$$\text{Kern}(f) = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$$

$$\begin{aligned}
 {}^0\text{Bild}(f^*) &= \{v \in V \mid \langle v^*, v \rangle = 0 \text{ für alle } v^* \in \text{Bild}(f^*)\} \\
 &= \{v \in V \mid \langle f^*(w^*), v \rangle = 0 \text{ für alle } w^* \in W^*\} \\
 &= \{v \in V \mid \langle w^*, f(v) \rangle = 0 \text{ für alle } w^* \in W^*\}.
 \end{aligned}$$

Es sei $v \in \text{Kern}(f)$, dann gilt

$$\langle w^*, f(v) \rangle = \langle w^*, 0_W \rangle = 0$$

für alle $w^* \in W^*$, also $v \in {}^0\text{Bild}(f^*)$.

Umgekehrt sei $v \in {}^0\text{Bild}(f^*)$. Angenommen $f(v) \neq 0_W$, dann können wir eine Linearform $w^* \in W^*$ finden mit der Eigenschaft $\langle w^*, f(v) \rangle \neq 0$, im Widerspruch zu $v \in {}^0\text{Bild}(f^*)$. Also gilt $v \in \text{Kern}(f)$. \square

Abschließend betrachten wir eine Version von Satz 21.36, wobei $V = K^m$, $W = K^n$ und $f = f_A$ durch die Matrix-Vektor-Multiplikation mit der Matrix $A \in K^{n \times m}$ gegeben ist. In diesem Fall können wir die Aussage von Satz 21.36 mit Hilfe der Matrizen A und A^\top ausdrücken.

Folgerung 21.37 (vier fundamentale Unterräume zu einer Matrix).

Es seien K ein Körper und $A \in K^{n \times m}$. Bei Identifikation von $(K^n)^*$ bzw. $(K^m)^*$ mit K^n bzw. K^m wie in [Beispiel 21.16](#) gilt für die Matrix A und ihre Transponierte A^T

$$\text{Bild}(A^T) = \text{Kern}(A)^0 \quad \text{in } K^m \quad (21.28a)$$

$$\text{Kern}(A^T) = \text{Bild}(A)^0 \quad \text{in } K^n \quad (21.28b)$$

$$\text{Bild}(A) = {}^0\text{Kern}(A^T) \quad \text{in } K^n \quad (21.28c)$$

$$\text{Kern}(A) = {}^0\text{Bild}(A^T) \quad \text{in } K^m. \quad (21.28d)$$

Beachte: Wir könnten nach [Beispiel 21.25](#) die Beziehungen (21.28c) und (21.28d) auch als $\text{Bild}(A) = \text{Kern}(A^T)^0$ bzw. als $\text{Kern}(A) = \text{Bild}(A^T)^0$ schreiben. Es ist also (21.28a) \Leftrightarrow (21.28c) und (21.28b) \Leftrightarrow (21.28d).

Beweis. Die Matrix A induziert die Abbildung $f_A \in \text{Hom}(K^m, K^n)$, und nach [Folgerung 21.35](#) induziert A^T die Abbildung $(f_A)^*$. Nach Definition von Bild und Kern für Matrizen (siehe § 19.3) folgt das Resultat sofort aus [Satz 21.36](#). \square

Beispiel 21.38 (Beschreibung von Unterräumen durch Basen bzw. Gleichungen).

(i) Gegeben sei der Unterraum

$$U = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

von \mathbb{Q}^4 . Gesucht ist eine Beschreibung von U durch Gleichungen, also als Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems. Wir setzen dazu

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ -2 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

sodass $U = \text{Bild}(A)$ gilt. Nach (21.28c) gilt $\text{Bild}(A) = {}^0\text{Kern}(A^T)$. Wie in § 16 können wir eine Basis von $\text{Kern}(A^T)$ bestimmen, indem wir

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

auf reduzierte Zeilenstufenform bringen. Es ergibt sich

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -14 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix},$$

also die Basis

$$\left\{ \begin{pmatrix} 14 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

von $\text{Kern}(A^T)$. Wegen (21.28c) gilt nun also

$$\begin{aligned} U = \text{Bild}(A) = {}^0\text{Kern}(A^T) &= \left\{ y \in \mathbb{Q}^4 \left| \begin{pmatrix} 14 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = 0 \text{ und } \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ y \in \mathbb{Q}^4 \left| \begin{array}{l} 14 y_1 - 4 y_2 + y_3 = 0 \\ -y_1 + y_4 = 0 \end{array} \right. \right\}. \end{aligned}$$

Somit haben wir wie gewünscht U durch Gleichungen beschrieben.

(ii) Es sei umgekehrt der Unterraum eines Vektorraumes durch Gleichungen beschrieben, etwa

$$U = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 \left| \begin{array}{l} x_1 + 3x_3 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{array} \right. \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0 \text{ und } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0 \right\}.$$

Gesucht ist eine Beschreibung mit Hilfe einer Basis. Wir können die gegebene Beschreibung von U auffassen als

$$U = \text{Bild}(A)^0 \text{ mit } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nach (21.28b) gilt also auch $U = \text{Kern}(A^T)$. Wir bestimmen die reduzierte Zeilenstufenform zu A^T als

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

und können daraus eine Basis von $U = \text{Kern}(A^T)$ ablesen:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Somit haben wir wie gewünscht U mit Hilfe einer Basis beschrieben. △

§ 21.7 ZUSAMMENSPIEL ZWISCHEN DUALRÄUMEN UND FAKTORRÄUMEN

In diesem Abschnitt untersuchen wir Dualräume von Faktorräumen und Faktorräume von Dualräumen.

Lemma 21.39 (Dualraum eines Faktorraumes).

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und U ein Unterraum von V . Weiter sei $\pi: V \rightarrow V/U$ die kanonische Surjektion auf den Faktorraum. Dann gilt: Das Bild der zu π dualen Abbildung $\pi^*: (V/U)^* \rightarrow V^*$ ist U^0 . Die Einschränkung $\pi^*|_{U^0}$ ist ein Isomorphismus, es gilt also

$$(V/U)^* \cong U^0. \quad (21.29)$$

Beachte: Der Vektorraum der Linearformen auf V , die auf dem Unterraum U verschwinden, ist also isomorph zum Vektorraum der Linearformen, die direkt nur auf dem größeren Faktorraum V/U wirken.

Beweis. Die kanonische Surjektion $\pi: V \rightarrow V/U$ ist surjektiv (Satz 17.13). Die duale Abbildung $\pi^*: (V/U)^* \rightarrow V^*$ ist also injektiv (Satz 21.32); dieses Resultat verwendet nicht das Auswahlaxiom. Wir müssen nun das Bild von π^* identifizieren. Dazu sehen wir uns an, wie π^* auf ein $[v]^* \in (V/U)^*$ wirkt. Es gilt

$$\begin{aligned} \langle \pi^*([v]^*), v \rangle &= \langle [v]^*, \pi(v) \rangle && \text{nach Definition von } \pi^* \\ &= \langle [v]^*, v + U \rangle && \text{nach Definition von } \pi. \end{aligned}$$

Setzen wir für v speziell ein Element aus $u \in U$ ein, so erkennen wir

$$\begin{aligned} \langle \pi^*([v]^*), u \rangle &= \langle [v]^*, U \rangle && \text{denn } u + U = U \\ &= 0 && \text{denn } U = [0] \text{ ist der Nullvektor in } V/U \text{ und } [v]^* \text{ ist linear.} \end{aligned}$$

Das bedeutet aber, dass $\pi^*([v]^*)$ für beliebiges $[v]^* \in (V/U)^*$ zum Unterraum U^0 von V^* gehört.

In der Tat wird jedes Element von U^0 auch angenommen: Zu $v^* \in U^0$ definiere $[v]^* \in (V/U)^*$ durch

$$\langle [v]^*, \underbrace{v + U}_{\text{beliebiges Element von } V/U} \rangle := \langle v^*, v \rangle.$$

Diese Vorschrift ist wohldefiniert, also unabhängig von der Wahl des Repräsentanten $v \in v + U = [v]$. (Quizfrage 21.5: Warum?) Es gilt nun also

$$\langle \pi^*([v]^*), v \rangle = \langle [v]^*, v + U \rangle = \langle v^*, v \rangle$$

für alle $v \in V$, was wie gewünscht $\pi^*([v]^*) = v^*$ zeigt.

Damit ist die Einschränkung $\pi^*|_{U^0}: (V/U)^* \rightarrow U^0$ tatsächlich ein Isomorphismus. □

Lemma 21.40 (Faktorraum eines Dualraumes⁴⁹).

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und U ein Unterraum von V . Weiter sei $i: U \rightarrow V$ die kanonische Injektion. Dann gilt: Der Kern der zu i dualen Abbildung $i^*: V^* \rightarrow U^*$ ist U^0 . Es gilt also

$$V^*/U^0 \cong U^*. \tag{21.30}$$

Beweis. Es sei $i: U \rightarrow V$ die kanonische Injektion. Nach Satz 21.36 gilt $\text{Kern}(i^*) = \text{Bild}(i)^0 = {}^0U$. Weiter ist nach Satz 21.32 ist $i^*: V^* \rightarrow U^*$ surjektiv. Der Homomorphiesatz für Vektorräume 17.17, angewendet auf i^* , zeigt nun $V^*/\text{Kern}(i^*) \cong \text{Bild}(i^*)$, also gilt $V^*/U^0 \cong U^0$. □

Ende der Vorlesung 4

Ende der Woche 2

⁴⁹Dieses Resultat hängt im Fall, dass V unendlich-dimensional ist, vom Zornschen Lemma und damit vom Auswahlaxiom ab.

§ 21.8 DER BIDUALRAUM

In diesem Abschnitt betrachten wir den Dualraum eines Dualraums.

Definition 21.41 (Bidualraum).

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und V^* sein Dualraum. Der Dualraum von V^* heißt der **Bidualraum** (englisch: **bidual space**) von V . Er wird statt mit $(V^*)^*$ auch einfach mit V^{**} bezeichnet. \triangle

Der Bidualraum V^{**} besteht also aus Linearformen auf V^* . Wir können uns fragen, wie die Elemente des Bidualraumes aussehen. Dabei fällt auf, dass für jedes fest gewählte $v \in V$ die Abbildung

$$V^* \ni v^* \mapsto \langle v^*, v \rangle \in K$$

eine Linearform auf V^* ist. Diese können wir mit $\langle \cdot, v \rangle$ bezeichnen.

Satz 21.42 (kanonische Injektion⁵⁰).

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und V^* sein Dualraum.

(i) Die Abbildung

$$i_V := V \ni v \mapsto \langle \cdot, v \rangle \in V^{**} \quad (21.31)$$

ist ein injektiver Homomorphismus, genannt die **kanonische Injektion** (englisch: **canonical injection**) von V in V^{**} .

(ii) Ist V endlich-dimensional, dann ist i_V auch surjektiv, also ein Isomorphismus. In diesem Fall gilt $\dim(V) = \dim(V^{**})$.

Beweis. **Aussage (i):** Wir weisen zunächst die Linearität von i_V nach. Für $v_1, v_2 \in V^*$ und $v^* \in V^*$ gilt

$$\begin{aligned} (i_V(v_1 + v_2))(v^*) &= \langle v^*, v_1 + v_2 \rangle && \text{nach Definition von } i_V \\ &= \langle v^*, v_1 \rangle + \langle v^*, v_2 \rangle && \text{denn } v^* \text{ ist eine Linearform auf } V \\ &= i_V(v_1)(v^*) + i_V(v_2)(v^*) && \text{nach Definition von } i_V \\ &= (i_V(v_1) + i_V(v_2))(v^*) && \text{nach Definition der Addition von Abbildungen,} \end{aligned}$$

also $i_V(v_1 + v_2) = i_V(v_1) + i_V(v_2)$, d. h., i_V ist additiv. Außerdem ist i_V homogen, denn mit $\alpha \in K$ gilt

$$\begin{aligned} (i_V(\alpha v))(v^*) &= \langle v^*, \alpha v \rangle && \text{nach Definition von } i_V \\ &= \alpha \langle v^*, v \rangle && \text{denn } v^* \text{ ist eine Linearform auf } V \\ &= \alpha i_V(v) && \text{nach Definition von } i_V \\ &= (\alpha i_V)(v) && \text{nach Definition der S-Multiplikation von Abbildungen.} \end{aligned}$$

Um die Injektivität zu prüfen, betrachten wir ein $v \in \text{Kern}(i_V)$. Es gilt also

$$i_V(v) = 0_{V^{**}}, \quad \text{d. h., } (i_V(v))(v^*) = \langle v^*, v \rangle = 0.$$

Mit anderen Worten, es gilt $v \in \text{Kern}(v^*)$ für alle $v^* \in V^*$. Nach **Lemma 21.20 Aussage (iv)** bedeutet das aber $v = 0$. Also ist i_V injektiv.

⁵⁰Die **Aussage (i)** hängt im Fall, dass V unendlich-dimensional ist, vom Zornschen Lemma und damit vom Auswahlaxiom ab.

Aussage (ii): Im Fall $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$ gilt auch $\dim(V^*) = n$, siehe [Folgerung 21.9](#). Wenden wir dieses Resultat erneut an, folgt $\dim(V^{**}) = \dim(V^*)$, also auch $\dim(V^{**}) = \dim(V) = n$. Nun können wir mit [Folgerung 18.9](#) schließen, dass i_V nicht nur injektiv, sondern sogar bijektiv ist, also ein Isomorphismus. \square

Beachte: Im Unterschied zu dem in [Folgerung 21.9](#) etablierten Isomorphismus zwischen V und V^* (wenn V endlich-dimensional ist) ist die kanonische Injektion i_V (wie das Attribut „kanonisch“ bereits andeutet) nicht von der Wahl einer Basis abhängig.

Folgerung 21.43 (Eigenschaften von Annihilatoren im Dualraum).

Es sei V ein **endlich-dimensionaler** Vektorraum über dem Körper K . Dann gilt

- (i) Für jede Teilmenge $F \subseteq V^*$ gilt $F^0 = i_V({}^0F)$.
- (ii) Für jeden Unterraum U von V gilt $(U^0)^0 = i_V(U)$.

Beweis. **Aussage (i):** Nach Definition ([21.14](#)) gilt

$$\begin{aligned} F^0 &= \{f \in V^{**} \mid \langle f, v^* \rangle_{V^{**}, V^*} = 0 \text{ für alle } v^* \in F\} \\ &= \{i_V(v) \in V^{**} \mid \langle v^*, v \rangle_{V^*, V} = 0 \text{ für alle } v^* \in F\}, \end{aligned}$$

wobei die bijektive Ersetzung $f = i_V(v)$ ([Satz 21.42](#)) verwendet wurde. [Definition \(21.15\)](#) ergibt

$$\begin{aligned} {}^0F &= \{v \in V \mid \langle v^*, v \rangle_{V^*, V} = 0 \text{ für alle } v^* \in F\}, \\ \text{also } i_V({}^0F) &= \{i_V(v) \in V^{**} \mid \langle v^*, v \rangle_{V^*, V} = 0 \text{ für alle } v^* \in F\} \\ &= F^0. \end{aligned}$$

Aussage (ii): Nach [Satz 21.42](#) ist $i_V \in \text{Hom}(V, V^{**})$ bijektiv. Es gilt

$$\begin{aligned} U &= {}^0(U^0) && \text{nach Lemma 21.24} \\ &= i_V^{-1}(i_V({}^0(U^0))) && \text{wegen } i_V^{-1} \circ i_V = \text{id}_V \\ &= i_V^{-1}((U^0)^0) && \text{nach Aussage (i) mit } F = U^0. \end{aligned}$$

Nochmaliges Anwenden von i_V auf beide Seiten zeigt schließlich $i_V(U) = (U^0)^0$. \square

Wie einen Vektorraum können wir auch eine lineare Abbildung $f \in \text{Hom}(V, W)$ zweimal dualisieren. Das führt zum Begriff des **bidualen Homomorphismus** (englisch: **bidual homomorphism**) bzw. der **bidualen linearen Abbildung** (englisch: **bidual linear map**) $f^{**} \in \text{Hom}(V^{**}, W^{**})$. Diese ist definiert durch

$$f^{**}: V^{**} \ni v^{**} \mapsto w^{**} := v^{**} \circ f^* \in W^{**}. \tag{21.32}$$

Lemma 21.44 (Zusammenhang zwischen f und f^{**}).

Es seien V und W Vektorräume über demselben Körper K sowie $f \in \text{Hom}(V, W)$ ein Homomorphismus. Dann gilt

$$i_W \circ f = f^{**} \circ i_V. \tag{21.33}$$

Mit anderen Worten, folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{f} & W \\
 i_V \downarrow & & \downarrow i_W \\
 V^{**} & \xrightarrow{f^{**}} & W^{**}
 \end{array}$$

Beweis. Beide Seiten sind per Definition lineare Abbildungen $V \rightarrow W^{**}$. Um die Gleichheit zu zeigen, setzen wir ein beliebiges Element $v \in V$ ein und lassen das Ergebnis wirken auf ein beliebiges Element $w^* \in W^*$. Wenn wir zeigen können, dass $\langle (i_W \circ f)(v), w^* \rangle_{W^{**}, W^*} = \langle (f^{**} \circ i_V)(v), w^* \rangle_{W^{**}, W^*}$ gilt, so ist die Behauptung bewiesen. (**Quizfrage 21.6:** Warum?) Es gilt

$$\begin{aligned}
 \langle (f^{**} \circ i_V)(v), w^* \rangle_{W^{**}, W^*} &= \langle f^{**}(i_V(v)), w^* \rangle_{W^{**}, W^*} && \text{nach Definition der Komposition} \\
 &= \langle i_V(v) \circ f^*, w^* \rangle_{W^{**}, W^*} && \text{nach Definition (21.32) von } f^{**} \\
 &= \langle i_V(v), f^*(w^*) \rangle_{V^{**}, V^*} && \text{wegen der Assoziativität der Komposition} \\
 &= \langle i_V(v), w^* \circ f \rangle_{V^{**}, V^*} && \text{nach Definition (21.19) von } f^* \\
 &= \langle w^* \circ f, v \rangle_{V^*, V} && \text{nach Definition (21.31) von } i_V \\
 &= \langle w^*, f(v) \rangle_{W^*, W} && \text{wegen der Assoziativität der Komposition} \\
 &= \langle i_W(f(v)), w^* \rangle_{W^{**}, W^*} && \text{nach Definition (21.31) von } i_V \\
 &= \langle (i_W \circ f)(v), w^* \rangle_{W^{**}, W^*} && \text{nach Definition der Komposition.}
 \end{aligned}$$

Damit ist in der Tat $\langle (i_W \circ f)(v), w^* \rangle_{W^{**}, W^*} = \langle (f^{**} \circ i_V)(v), w^* \rangle_{W^{**}, W^*}$ gezeigt, also (21.33). \square

§ 22 TENSORPRODUKTE UND MULTILINEARE ABBILDUNGEN

Literatur: Fischer, Springborn, 2020, Kapitel 7.3–7.4, Hackbusch, 2019, Chapter 3

§ 22.1 BILINEARE ABBILDUNGEN

Definition 22.1 (bilineare Abbildung, Bilinearform).

Es seien U, V, W Vektorräume über demselben Körper K .

(i) Eine Abbildung

$$f: U \times V \rightarrow W$$

heißt **bilinear** (englisch: **bilinear map**), wenn für jedes feste $\bar{u} \in U$ und jedes feste $\bar{v} \in V$ die Abbildungen

$$f(\bar{u}, \cdot): V \ni v \mapsto f(\bar{u}, v) \in W$$

$$f(\cdot, \bar{v}): U \ni u \mapsto f(u, \bar{v}) \in W$$

beide linear sind.

(ii) Die Menge aller bilinearen Abbildungen $U \times V \rightarrow W$ bezeichnen wir mit $\text{Bil}(U, V; W)$.

(iii) Eine bilineare Abbildung in den Vektorraum $W = K$ nennen wir eine **Bilinearform** (englisch: **bilinear form**) auf $U \times V$.

(iv) Die Menge aller Bilinearformen $U \times V \rightarrow K$ bezeichnen wir mit $\text{Bil}(U, V)$ oder $\text{Bil}(U, V; K)$. \triangle

Beispiel 22.2 (bilineare Abbildung, Bilinearform).

(i) Die duale Paarung (21.2), also

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: V^* \times V \ni (v^*, v) \mapsto \langle v^*, v \rangle \in K,$$

ist eine Bilinearform auf $V^* \times V$, siehe Lemma 21.7.

(ii) Für jede Matrix $A \in K^{n \times m}$ ist die Abbildung

$$K^m \times K^n \ni (x, y) \mapsto y^T A x \in K$$

eine Bilinearform auf $K^m \times K^n$.

(iii) Die Multiplikation zweier Polynome über einem Körper K , also

$$K[t] \times K[t] \ni (p, q) \mapsto p \cdot q \in K[t],$$

siehe (11.3c), ist eine bilineare Abbildung in $\text{Bil}(K[t], K[t]; K[t])$.

(iv) Auch die Multiplikation zweier Polynome in verschiedenen Variablen über einem Körper K , also

$$K[s] \times K[t] \ni (p, q) \mapsto p \cdot q \in K[s, t]$$

in den Vektorraum $K[s, t]$ der Polynome in beiden Variablen ist eine bilineare Abbildung in $\text{Bil}(K[s], K[t]; K[s, t])$. △

Lemma 22.3 (bilineare Abbildungen bilden einen Vektorraum).

Es seien U, V, W Vektorräume über demselben Körper K . Dann ist $\text{Bil}(U, V; W)$ ein Unterraum des Vektorraumes $W^{U \times V} = \{f: U \times V \rightarrow W\}$ aller Abbildungen $U \times V \rightarrow W$.

Beweis. Der Beweis ist Gegenstand von [Hausaufgabe II-3.3](#). □

Genau wie lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen können wir auch bilineare Abbildung dadurch eindeutig bestimmen, dass wir ihre Bilder auf einer geeigneten Menge festlegen.

Satz 22.4 (Existenz- und Eindeutigkeitsatz für bilineare Abbildungen, vgl. Satz 17.7).

Es seien K ein Körper und U, V und W Vektorräume über K . Weiter sei $(u_i)_{i \in I}$ eine Basis von U und $(v_j)_{j \in J}$ eine Basis von V . Außerdem sei $(w_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ eine Familie von Vektoren in W . Dann gibt es genau eine bilineare Abbildung $f: U \times V \rightarrow W$ mit der Eigenschaft $f(u_i, v_j) = w_{ij}$ für alle $(i, j) \in I \times J$.

Beweis. Es sei $(u, v) \in U \times V$ beliebig. Wegen der Basiseigenschaft (Satz 13.10) gibt es (bis auf Summanden mit Nullkoeffizienten) eindeutige Darstellungen

$$u = \sum_{i \in I'} \alpha_i u_i \quad \text{und} \quad v = \sum_{j \in J'} \beta_j v_j$$

mit endlichen Teilfamilien I' von I und J' von J .

Wenn es eine gesuchte bilineare Abbildung $f: U \times V \rightarrow W$ gibt, so muss diese notwendigerweise

$$\begin{aligned} f(u, v) &= f\left(\sum_{i \in I'} \alpha_i u_i, \sum_{j \in J'} \beta_j v_j\right) \\ &= \sum_{\substack{i \in I' \\ j \in J'}} \alpha_i \beta_j f(u_i, v_j) && \text{wegen der Bilinearität} \\ &= \sum_{\substack{i \in I' \\ j \in J'}} \alpha_i \beta_j w_{ij} && \text{wegen der gewünschten Bilder} \end{aligned}$$

erfüllen. Wegen der Eindeutigkeit der Linearkombinationen (bis auf Summanden mit Nullkoeffizienten) ist also die gesuchte bilineare Abbildung, wenn sie existiert, tatsächlich eindeutig bestimmt.

Andererseits definiert die Vorschrift

$$f(u, v) := \sum_{\substack{i \in I' \\ j \in J'}} \alpha_i \beta_j w_{ij}$$

für $u = \sum_{i \in I'} \alpha_i u_i$ und $v = \sum_{j \in J'} \beta_j v_j$ tatsächlich eine bilineare Abbildung. Um das zu sehen, halten wir zunächst $v \in V$ fest und betrachten beliebige $u, \bar{u} \in U$. Diese haben die Darstellungen $u = \sum_{i \in I'} \alpha_i u_i$ und $\bar{u} = \sum_{i \in I'} \bar{\alpha}_i u_i$. (**Quizfrage 22.1:** Warum können wir dieselbe endliche Indexmenge I' verwenden?) Dann ist

$$f(u + \bar{u}, v) = \sum_{\substack{i \in I' \\ j \in J'}} (\alpha_i + \bar{\alpha}_i) \beta_j w_{ij} = \sum_{\substack{i \in I' \\ j \in J'}} \alpha_i \beta_j w_{ij} + \sum_{\substack{i \in I' \\ j \in J'}} \bar{\alpha}_i \beta_j w_{ij} = f(u, v) + f(\bar{u}, v)$$

und für $\alpha \in K$ auch

$$f(\alpha u, v) = \sum_{\substack{i \in I' \\ j \in J'}} \alpha \alpha_i \beta_j w_{ij} = \alpha \sum_{\substack{i \in I' \\ j \in J'}} \alpha_i \beta_j w_{ij} = \alpha f(u, v),$$

also ist $U \ni u \mapsto f(u, v) \in W$ für jedes $v \in V$ linear. Analog können wir zeigen, dass auch $V \ni v \mapsto f(u, v) \in W$ für jedes $u \in U$ linear ist. \square

Bemerkung 22.5 (zu [Satz 22.4](#)).

- (i) Ist $(u_i)_{i \in I}$ eine Basis von U und $(v_j)_{j \in J}$ eine Basis von V , so ist die Familie der Vektorpaare $(u_i, v_j)_{(i,j) \in I \times J}$ i. A. keine Basis von $U \times V$! Diese Familie ist i. A. weder linear unabhängig noch ein Erzeugendensystem für $U \times V$.

Betrachten wir zum Beispiel $U = V = \mathbb{R}^3$ jeweils mit der Standardbasis (e_1, e_2, e_3) . Dann gilt $\dim(U \times V) = \dim(U) + \dim(V) = 6$, also können die neun Vektoren $(e_1, e_1), \dots, (e_3, e_3)$ in $U \times V$ nicht linear unabhängig sein ([Folgerung 13.22](#)). Beispielsweise $(e_1, e_1) - (e_1, e_2) - (e_2, e_1) + (e_2, e_2)$ ist eine nichttriviale Linearkombination zum Nullvektor. Andererseits kann der Vektor $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \in U \times V$ nicht erzeugt werden.

- (ii) Der vorherige Punkt zeigt, dass bilineare Abbildungen $U \times V \rightarrow W$ nicht durch die Bilder auf einer Basis von $U \times V$ festgelegt werden, sondern durch die Bilder auf dem kartesischen Produkt $(u_i, v_j)_{(i,j) \in I \times J}$ der Basen von U und V . \triangle

Die **Bemerkung 22.5** zeigt, dass sich bilineare Abbildungen anders verhalten als lineare Abbildungen bzw. dass Produkträume $U \times V$ möglicherweise nicht die beste Wahl sind, um darauf bilineare Abbildungen zu definieren.

Außerdem gilt für bilineare Abbildungen

$$f(\alpha u, v) = \alpha f(u, v) = f(u, \alpha v)$$

für alle $u \in U, v \in V$ und $\alpha \in K$. Es stellt sich die Frage, ob es nicht einen Vektorraum gibt, in dem **unter anderem** Paare wie $(\alpha u, v)$ und $(u, \alpha v)$ dieselben Vektoren sind, **also identifiziert werden**. Eine bilineare Abbildung auf $U \times V$ wäre dann eine lineare Abbildung auf diesem angepassten Vektorraum. Dieser gesuchte Vektorraum nennt sich der **Tensorproduktraum** $U \otimes V$.

Ende der Vorlesung 5

Wir werden jetzt den Tensorproduktraum $U \otimes V$ konstruieren. Wir erheben dabei wegen **Satz 22.4** folgende Forderung: Sind $(u_i)_{i \in I}$ bzw. $(v_j)_{j \in J}$ Basen von U bzw. von V , so soll $(u_i, v_j)_{(i,j) \in I \times J}$ gleichmächtig zu einer Basis von $U \otimes V$ sein.

Wir betrachten zur Konstruktion den K -Vektorraum $K^{I \times J} = \{T: I \times J \rightarrow K\}$ (**Quizfrage 22.2**: Warum ist das ein Vektorraum?) und dessen Unterraum (**Quizfrage 22.3**: Warum ist das ein Unterraum?) derjenigen $T: I \times J \rightarrow K$ mit endlichem Träger, also

$$U \otimes V := \{T: I \times J \rightarrow K \mid T(i, j) \neq 0 \text{ nur für endlich viele } (i, j) \in I \times J\}. \quad (22.1)$$

Sind I und J beide endlich oder ist $I = \emptyset$ oder $J = \emptyset$, dann ist die Bedingung, dass T endlichen Träger hat, natürlich automatisch erfüllt.

Der Ausdruck $u_i \otimes v_j$ steht für dasjenige Element T von $U \otimes V$ mit der Eigenschaft

$$T(k, \ell) := \begin{cases} 1 & \text{im Fall } k = i \text{ und } \ell = j \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

also kurz: $u_i \otimes v_j = [(k, \ell) \mapsto \delta_{ik} \delta_{j\ell}]$. Wir zeigen nun, dass die Familie

$$B := (u_i \otimes v_j)_{(i,j) \in I \times J} \quad (22.2)$$

eine Basis von $U \otimes V$ bildet. Diese ist wie gewünscht gleichmächtig zu $(u_i, v_j)_{(i,j) \in I \times J}$.

Lemma 22.6 (Basis des Tensorproduktraumes $U \otimes V$).

Es seien U und V Vektorräume über dem Körper K . Sind $(u_i)_{i \in I}$ bzw. $(v_j)_{j \in J}$ Basen von U bzw. von V , dann ist $B := (u_i \otimes v_j)_{(i,j) \in I \times J}$ eine Basis von $U \otimes V$.

Beweis. Zunächst ist B ein Erzeugendensystem, denn für beliebiges $T \in U \otimes V$ haben wir die Darstellung

$$T = \sum_{(i,j) \in E} T(i, j) (u_i \otimes v_j),$$

wobei E der Träger von T ist, also diejenige endliche Teilmenge $E \subseteq I \times J$, auf der $T(i, j) \neq 0$ ist.

Zu zeigen ist jetzt noch die lineare Unabhängigkeit von B , vgl. **Definition 13.1**. Dazu seien

$$T = \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} (u_i \otimes v_j) = 0 \in U \otimes V$$

die Nullabbildung, $E \subseteq I \times J$ eine beliebige endliche Teilmenge und $c_{ij} \in K$. Es gilt $T(i, j) = c_{ij}$, falls $(i, j) \in E$ liegt, und andernfalls $T(i, j) = 0$. Da die Nullabbildung auf ganz $I \times J$ den Wert 0 hat, müssen die Koeffizienten $c_{ij} = 0$ sein. Das heißt, die Familie B ist linear unabhängig und damit eine Basis von $U \otimes V$. \square

Wir fassen zusammen:

Definition 22.7 (Tensorprodukt).

Es seien K ein Körper und U und V Vektorräume über K . Weiter seien $(u_i)_{i \in I}$ bzw. $(v_j)_{j \in J}$ Basen von U bzw. von V .

(i) Der K -Vektorraum

$$U \otimes V := \left\{ T: I \times J \rightarrow K \mid T(i, j) \neq 0 \text{ nur für endlich viele } (i, j) \in I \times J \right\} \quad (22.3)$$

heißt ein **Tensorproduktraum** (englisch: **tensor product space**) $U \otimes V$.⁵¹

(ii) Elemente von $U \otimes V$ heißen **Tensoren** (englisch: **tensors**). Der **Nullvektor in $U \otimes V$** , also die **Nullabbildung** $T: I \times J \rightarrow K$ mit $T(i, j) = 0$ für alle $(i, j) \in I \times J$, heißt der **Nulltensor** (englisch: **zero tensor**).

(iii) Die bilineare Abbildung⁵²

$$\otimes: U \times V \ni (u, v) \mapsto \otimes(u, v) =: u \otimes v \in U \otimes V, \quad (22.4)$$

die durch die Bilder von $(u_i, v_j)_{(i,j) \in I \times J}$ gemäß

$$\otimes(u_i, v_j) := u_i \otimes v_j = [(k, \ell) \mapsto \delta_{ik} \delta_{j\ell}] \quad (22.5)$$

eindeutig definiert wird, heißt die **universelle bilineare Abbildung** (englisch: **universal bilinear map**) in den Tensorproduktraum $U \otimes V$.

(iv) Das Paar $(U \otimes V, \otimes)$ heißt ein **Tensorprodukt** (englisch: **tensor product**) von U und V .

(v) Wir nennen $u \otimes v$ auch das **Tensorprodukt** (englisch: **tensor product**) der Vektoren $u \in U$ und $v \in V$.

(vi) Elemente von $U \otimes V$ der Form $u \otimes v$ mit $u, v \neq 0$ heißen **Elementartensoren** (englisch: **elementary tensors**) oder **einfache Tensoren** (englisch: **simple tensors**). \triangle

Bemerkung 22.8 (zum Tensorprodukt).

(i) Die universelle bilineare Abbildung ist wegen **Satz 22.4** durch die Festlegung (22.5) eindeutig bestimmt. Für das Tensorprodukt beliebiger Vektoren $u = \sum_{i \in I'} \alpha_i u_i \in U$ und $v = \sum_{j \in J'} \beta_j v_j \in V$ mit endlichen Teilmengen $I' \subseteq I$ und $J' \subseteq J$ gilt

$$\otimes(u, v) = \otimes \left(\sum_{i \in I'} \alpha_i u_i, \sum_{j \in J'} \beta_j v_j \right) = \sum_{i \in I'} \sum_{j \in J'} \alpha_i \beta_j \otimes(u_i, v_j),$$

was wir üblicherweise in der Form

$$u \otimes v = \sum_{i \in I'} \sum_{j \in J'} \alpha_i \beta_j (u_i \otimes v_j) \quad (22.6)$$

schreiben.

⁵¹spricht: „ U Tensor V “

⁵² $u \otimes v$ spricht: „ u Tensor v “

- (ii) „Der“ Tensorproduktraum $U \otimes V$ der Vektorräume U und V ist nach Konstruktion abhängig von den gewählten Basen in U und V . Alle so konstruierten Tensorprodukträume von U und V sind jedoch isomorphe Vektorräume, da alle Basen von U und V jeweils gleichmächtig sind (Bemerkung 13.20 und Satz 18.3).⁵³
- (iii) Es gibt noch weitere isomorphe Konstruktionen von Tensorprodukträumen $U \otimes V$, beispielsweise, indem man den Vektorraum aller endlich getragenen linearen Abbildungen $T: U \times V \rightarrow K$ betrachtet⁵⁴ und die Summe der vier Unterräume ausfaktoriert, die durch die Bedingungen

$$\begin{aligned} T(u + \bar{u}, v) - T(u, v) - T(\bar{u}, v) &= 0 \\ T(u, v + \bar{v}) - T(u, v) - T(u, \bar{v}) &= 0 \\ T(\alpha u, v) - \alpha T(u, v) &= 0 \\ T(u, \alpha v) - \alpha T(u, v) &= 0 \end{aligned}$$

für alle $u, \bar{u} \in U, v, \bar{v} \in V$ und $\alpha \in K$ gegeben sind, siehe etwa Hackbusch, 2019, Chapter 3.2.

- (iv) Aufgrund der Vielfalt der (jeweils zueinander isomorphen) Möglichkeiten, Tensorprodukträume $U \otimes V$ zu definieren, ist es wichtig, die universelle bilineare Abbildung $\otimes: U \times V \rightarrow U \otimes V$, die zu einem konkreten Tensorproduktraum $U \otimes V$ gehört, mit anzugeben.
- (v) Wir haben $\dim(U \otimes V) = \dim(U) \cdot \dim(V)$, wobei $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$ gilt sowie $n \cdot \infty = \infty \cdot n = \infty \cdot \infty = \infty$ im Fall $n \in \mathbb{N}$. △

Nach Konstruktion ist das Tensorprodukt \otimes bilinear, d. h., es gelten die folgenden

Lemma 22.9 (Rechenregeln für das Tensorprodukt).

Es seien U und V Vektorräume über dem Körper K und $(U \otimes V, \otimes)$ ein Tensorprodukt von U und V . Dann gilt:

- (i) $(u \otimes v) + (\bar{u} \otimes v) = (u + \bar{u}) \otimes v$
- (ii) $(u \otimes v) + (u \otimes \bar{v}) = u \otimes (v + \bar{v})$
- (iii) $(\alpha u) \otimes v = \alpha (u \otimes v) = u \otimes (\alpha v)$

für alle $u, \bar{u} \in U, v, \bar{v} \in V$ sowie $\alpha \in K$.

Wir vereinbaren, dass das Tensorproduktsymbol \otimes Vorrang vor der Addition bekommt, sodass wir einige der Klammern in Zukunft auch weglassen können.

Jeder Tensor in $T \in U \otimes V$ kann wegen Lemma 22.6 in der Form

$$T = \sum_{(i,j) \in E} T(i, j) (u_i \otimes v_j) = \sum_{(i,j) \in E} \underbrace{(T(i, j) u_i)}_{\in U} \otimes \underbrace{v_j}_{\in V}$$

mit einer endlichen Menge $E \subset I \times J$ geschrieben werden, also als Linearkombination von Elementartensoren. Beschränken wir uns dabei nicht auf die Elementartensoren $(u_i \otimes v_j)_{(i,j) \in I \times J}$ aus der

⁵³Dieses Resultat verwendet im Fall unendlich-dimensionaler Vektorräume das Auswahlaxiom.

⁵⁴auch der **freie Vektorraum** (englisch: **free vector space**) über der Menge $U \times V$ genannt

Basis von $U \otimes V$, sondern lassen Summen von Produkten beliebiger **Vektoren** zu, so können wir jedes $T \in U \otimes V$ auf i. A. viele Arten in eine Summe von Elementartensoren zerlegen:

$$T = \sum_{k=1}^n u_k \otimes v_k, \quad (22.7)$$

wobei die $u_k \in U$ und $v_k \in V$ beliebige Vektoren sind (**nicht notwendig aus den Basen**) und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Definition 22.10 (Rang eines Tensors).

Es seien U und V Vektorräume über dem Körper K und $(U \otimes V, \otimes)$ ein Tensorprodukt von U und V . Der **Rang** eines Tensors (englisch: **rank of a tensor**) $T \in U \otimes V$, geschrieben $\text{Rang}(T)$, ist die minimale Anzahl von Summanden, mit denen eine Darstellung der Form (22.7) möglich ist. \triangle

Lemma 22.11 (Rang von Elementartensoren und des Nulltensors).

Es seien U und V Vektorräume über dem Körper K und $(U \otimes V, \otimes)$ ein Tensorprodukt von U und V . Dann gilt:

- (i) Der Nulltensor ist der einzige Tensor vom Rang 0.
- (ii) Jeder Elementartensor, also $u \otimes v$ mit $u, v \neq 0$, ist vom Rang 1.

Beweis. **Aussage (i):** Der Nulltensor kann durch die leere Summe in (22.7) dargestellt werden, die ja per Definition immer das neutrale Element (hier in der abelschen Gruppe $(U \otimes V, +)$) ergibt. Damit ist $\text{Rang}(0) = 0$ bestätigt und auch gezeigt, dass alle anderen Tensoren mindestens Rang 1 haben.

Aussage (ii): Per Definition ist in (22.7) eine Darstellung mit einem Summanden möglich, also gilt $\text{Rang}(u \otimes v) \leq 1$. Andererseits sind u und v als Linearkombinationen von Basisvektoren darstellbar, sagen wir $u = \sum_{i \in I'} \alpha_i u_i \in U$ und $v = \sum_{j \in J'} \beta_j v_j \in V$ mit endlichen Teilmengen $I' \subseteq I$ und $J' \subseteq J$. Nach (22.6) gilt die Darstellung

$$u \otimes v = \sum_{i \in I'} \sum_{j \in J'} \alpha_i \beta_j (u_i \otimes v_j).$$

Da u und v nicht die Nullvektoren sind, gibt es mindestens ein $\alpha_{i^*} \neq 0$ und mindestens ein $\beta_{j^*} \neq 0$. Damit ist $(u \otimes v)(i^*, j^*) = \alpha_{i^*} \beta_{j^*} \neq 0$. Also ist $u \otimes v$ nicht der Nulltensor. \square

Wir klären nun, warum die universelle bilineare Abbildung $\otimes: U \times V \rightarrow U \otimes V$ diesen Namen trägt und wie wir bilineare Abbildungen in $\text{Bil}(U, V; W)$ als lineare Abbildungen in $\text{Hom}(U \otimes V, W)$ umschreiben können.

Satz 22.12 (universelle Eigenschaft der universellen bilinearen Abbildung \otimes).

Es seien K ein Körper und U, V und W Vektorräume über K . Weiter seien $(u_i)_{i \in I}$ bzw. $(v_j)_{j \in J}$ Basen von U bzw. von V und $(U \otimes V, \otimes)$ das zugehörige Tensorprodukt. Dann gilt:

- (i) Ist $g \in \text{Bil}(U, V; W)$, dann gibt es ein eindeutig bestimmtes $f \in \text{Hom}(U \otimes V; W)$ mit der Eigenschaft $g = f \circ \otimes$, also $g(u, v) = f(u \otimes v)$ für alle $u \in U$ und alle $v \in V$.
- (ii) Ist umgekehrt $f \in \text{Hom}(U \otimes V; W)$, dann ist $g := f \circ \otimes \in \text{Bil}(U, V; W)$.

Beweis. **Aussage (i):** Es sei $g \in \text{Bil}(U, V; W)$ gegeben. Wir betrachten die Bilder $w_{ij} := g(u_i, v_j)$ für $(i, j) \in I \times J$. Da die Familie $(u_i \otimes v_j)_{(i,j) \in I \times J}$ eine Basis von $U \otimes V$ ist, gibt es genau eine lineare Abbildung $f \in \text{Hom}(U \otimes V; W)$ mit der Eigenschaft $f(u_i \otimes v_j) = w_{ij}$ (Satz 17.7). Für diese Abbildung gilt

$$g(u_i, v_j) = w_{ij} = f(u_i \otimes v_j) = (f \circ \otimes)(u_i, v_j)$$

für alle $(i, j) \in I \times J$. Damit stimmen die bilinearen Abbildungen g und $f \circ \otimes$ auf der Familie $(u_i, v_j)_{(i,j) \in I \times J}$ überein. Nach Satz 22.4 sind sie damit aber bereits identisch, also gilt $g = f \circ \otimes$.

Aussage (ii): Die Komposition der universellen bilinearen Abbildung $\otimes: U \times V \rightarrow U \otimes V$ mit $f \in \text{Hom}(U \otimes V; W)$ ergibt eine bilineare Abbildung $U \times V \rightarrow W$, denn

$$(f \circ \otimes)(u, v) = f(\otimes(u, v)) = f(u \otimes v)$$

erfüllt

$$\begin{aligned} f((u + \bar{u}) \otimes v) &= f(u \otimes v + \bar{u} \otimes v) = f(u \otimes v) + f(\bar{u} \otimes v) \\ f((\alpha u) \otimes v) &= f(\alpha(u \otimes v)) = \alpha f(u \otimes v) \end{aligned}$$

für $u, \bar{u} \in U, v \in V$ und $\alpha \in K$, ist also linear im ersten Argument. Analog kann man die Linearität auch im zweiten Argument zeigen. □

Die universelle bilineare Abbildung \otimes ist also der Vermittler zwischen den bilinearen Abbildungen $U \times V \rightarrow W$ und den linearen Abbildungen $U \otimes V \rightarrow W$, und zwar **unabhängig vom Zielraum W** . Mit anderen Worten, das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} U \times V & & \\ \otimes \downarrow & \searrow g & \\ U \otimes V & \xrightarrow{f} & W \end{array}$$

Bemerkung 22.13 (abstrakte Definition von Tensorprodukten).

Die in Satz 22.12 erkannte Eigenschaft ist die Grundlage für eine abstrakte Definition „des“ Tensorproduktes $U \otimes V$. Man nennt einen K -Vektorraum $U \otimes V$, zusammen mit einer bilinearen Abbildung $\otimes: U \times V \rightarrow U \otimes V$, ein **Tensorprodukt** $U \otimes V$ der K -Vektorräume U und V , wenn zu jeder bilinearen Abbildung $g \in \text{Bil}(U, V; W)$ in einen beliebigen K -Vektorraum W stets ein eindeutig bestimmtes $f \in \text{Hom}(U \otimes V; W)$ existiert mit der Eigenschaft $g = f \circ \otimes$.

Die von uns gewählte Konstruktion eines konkreten (basisabhängigen) Tensorproduktraumes $U \otimes V$ in Definition 22.7 war lediglich ein Beispiel. Alle möglichen Tensorprodukträume $U \otimes V$ über den Vektorräumen U und V sind jedoch zueinander isomorph, und die jeweiligen universellen bilinearen Abbildungen lassen sich ineinander überführen. △

Über die Zuordnung $\text{Bil}(U, V; W) \ni g \mapsto f \in \text{Hom}(U \otimes V; W)$ lässt sich noch mehr sagen:

Satz 22.14 (die Zuordnung $g \mapsto f$ ist ein Vektorraumisomorphismus).

Es seien U, V und W Vektorräume über dem Körper K und $(U \otimes V, \otimes)$ ein Tensorprodukt von U und V . Dann ist die Abbildung

$$\text{Bil}(U, V; W) \ni g \mapsto f \in \text{Hom}(U \otimes V; W) \tag{22.8}$$

(definiert durch die Eigenschaft $g = f \circ \otimes$, siehe Satz 22.12) ein Isomorphismus von Vektorräumen.

Beweis. Der Beweis ist Gegenstand von [Hausaufgabe II-3.4](#). □

Wir können daher in Zukunft statt mit bilinearen Abbildungen in $\text{Bil}(U, V; W)$ äquivalent auch mit linearen Abbildungen in $\text{Hom}(U \otimes V, W)$ arbeiten.

Beispiel 22.15 (Tensorprodukt).

- (i) Wir betrachten ein Tensorprodukt von K^n und K^m über einem Körper K . Dessen Dimension ist $m \cdot n$, wir können die Elemente von $K^n \otimes K^m$ also mit Matrizen in $K^{n \times m}$ identifizieren. Die Identifikation gelingt, indem wir die universelle bilineare Abbildung $\otimes: K^n \times K^m \rightarrow K^{n \times m}$ als

$$u \otimes v := u v^T \in K^{n \times m}$$

definieren. Dann gilt

$$e_i \otimes e_j = e_i e_j^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \uparrow j\text{-te Spalte} \end{array}$$

und

$$u \otimes v = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m u_i v_j (e_i \otimes e_j) = u v^T.$$

Für diese als Matrizen dargestellten Elementartensoren gilt offenbar $\text{Rang}(u v^T) = 1$ im Sinne des Matrixranges.

Da die $(e_i \otimes e_j)_{i=1, \dots, n, j=1, \dots, m}$ eine Basis von $K^n \otimes K^m$ darstellen, kann jeder Tensor in $K^n \otimes K^m$ **eindeutig** in der Form

$$T = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} (e_i \otimes e_j)$$

dargestellt werden mit einer Koeffizientenmatrix $A \in K^{n \times m}$.

Mit Hilfe einer Rangfaktorisierung (15.17) von Matrizen, also

$$A = BC = \sum_{k=1}^r b_{\bullet k} c_{k\bullet} = \sum_{k=1}^r b_{\bullet k} \otimes (c_{k\bullet})^T$$

mit $r = \text{Rang}(A)$, kann man zeigen, dass $\text{Rang}(T) = \text{Rang}(A)$ gilt. Der Rang eines Tensors in $K^n \otimes K^m$ nach [Definition 22.10](#) ist also gleich dem Rang der Koeffizientenmatrix.

- (ii) Es sei K ein Körper und $g: K[s] \times K[t] \rightarrow K[s, t]$ die bilineare Abbildung „Multiplikation von Polynomen in verschiedenen Variablen“, siehe [Beispiel 22.2](#). Wir wählen die Basen $(s^i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ und $(t^j)_{j \in \mathbb{N}_0}$. Dann ist $(s^i \otimes t^j)_{(i,j) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0}$ eine Basis von $U \otimes V$. Nach [Satz 22.12](#) gibt es genau eine lineare Abbildung $f: K[s] \otimes K[t] \rightarrow K[s, t]$ mit der Eigenschaft $g = f \circ \otimes$, d. h.,

$$p \cdot q = g(p, q) = f(p \otimes q)$$

für alle $p \in K[s]$ und $q \in K[t]$, insbesondere

$$s^i \cdot t^j = f(s^i \otimes t^j)$$

für alle $i, j \in \mathbb{N}_0$. Da die Familie $(s^i \cdot t^j)_{(i,j) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0}$ eine Basis von $K[s, t]$ bildet, ist diese Abbildung $f: K[s] \otimes K[t] \rightarrow K[s, t]$ nach **Satz 17.7** sogar ein Isomorphismus. Das bietet eine Möglichkeit, den Polynomring in zwei Veränderlichen⁵⁵ aus dem in einer Veränderlichen zu konstruieren.

(iii) Es sei W ein beliebiger Vektorraum über \mathbb{R} mit der Basis $(w_j)_{j \in J}$. Weiter sei $V = \mathbb{C}$, aufgefasst als zweidimensionaler Vektorraum über \mathbb{R} mit der Basis $(1, i)$. Dann bildet die Familie $(1 \otimes w_j)_{j \in J}$ zusammen mit $(i \otimes w_j)_{j \in J}$ eine Basis von $\mathbb{C} \otimes W$. Jedes Element von $\mathbb{C} \otimes W$ hat eine (bis auf Nullkoeffizienten) eindeutige Darstellung

$$\widehat{w} = \sum_{j \in J'} \alpha_j (1 \otimes w_j) + \sum_{j \in J''} \beta_j (i \otimes w_j) = \sum_{j \in J' \cup J''} (\alpha_j + \beta_j i) (1 \otimes w_j) =: \sum_{j \in J' \cup J''} (\mu_j \otimes w_j)$$

mit endlichen Indexmengen J' und J'' sowie Koeffizienten $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$ bzw. $\mu_j := \alpha_j + \beta_j i \in \mathbb{C}$. Wir können nun im \mathbb{R} -Vektorraum $\mathbb{C} \otimes W$ die skalare Multiplikation von \mathbb{R} auf \mathbb{C} erweitern, indem wir für \widehat{w} mit obiger Darstellung und $\mu \in \mathbb{C}$ definieren:

$$\mu \cdot \widehat{w} := \sum_{j \in J' \cup J''} (\mu \cdot \mu_j) \otimes w_j.$$

Wir können mit dieser Definition nun nachprüfen, dass $(\mathbb{C} \otimes W)$ nicht nur ein Vektorraum über \mathbb{R} , sondern auch ein Vektorraum über \mathbb{C} ist und als solcher die Basis $(1 \otimes w_j)_{j \in J}$ besitzt. Dieser \mathbb{C} -Vektorraum $(\mathbb{C} \otimes W)$ heißt die **Komplexifizierung** (englisch: **complexification**) des \mathbb{R} -Vektorraumes W . Der ursprüngliche Raum W wird in der isomorphen Gestalt $1 \otimes W$ zu einem \mathbb{R} -Unterraum von $\mathbb{C} \otimes W$. △

Wir geben noch eine weitere Möglichkeit an, lineare Abbildungen auf einem Tensorproduktraum zu interpretieren:

Lemma 22.16 (Interpretation bilinearer Abbildungen).

Es seien U, V und W endlich-dimensionale Vektorräume über einem Körper K . Dann bestehen Isomorphismen

$$\text{Hom}(U \otimes V; W) \cong \text{Bil}(U, V; W) \cong \text{Hom}(U, \text{Hom}(V, W)) \cong \text{Hom}(V, \text{Hom}(U, W)). \tag{22.9}$$

An Stelle eines Beweises erläutern wir die Isomorphieaussagen: Ist $f: U \times V \rightarrow W$ eine bilineare Abbildung und setzen wir das erste Argument $u \in U$ ein, so ist die verbleibende Abbildung

$$f_u: V \ni v \mapsto f(u, v) \in W$$

linear, also ein Element von $\text{Hom}(V, W)$. Weiterhin ist die Abbildung $U \ni u \mapsto f_u \in \text{Hom}(V, W)$ ebenfalls linear. Das heißt, Elemente von $\text{Bil}(U, V; W)$ können – indem man zuerst das Element von U einsetzt – interpretiert werden als Elemente von $\text{Hom}(U, \text{Hom}(V, W))$. Schließlich ist diese Interpretation sogar ein Vektorraumisomorphismus. Alternativ können wir auch einen Isomorphismus mit $\text{Hom}(V, \text{Hom}(U, W))$ etablieren, indem wir zuerst das Element von V einsetzen.

Folgerung 22.17 (Interpretationen von Bilinearformen).

Insbesondere im Fall $W = K$ ergibt sich aus **Lemma 22.16**

$$\text{Bil}(U, V; K) \cong \text{Hom}(U \otimes V; K) \cong (U \otimes V)^* \cong \text{Hom}(U, V^*) \cong \text{Hom}(V, U^*).$$

⁵⁵allerdings hier nur den Polynomring über einem Körper und nicht über einem kommutativen Ring

§ 22.2 MULTILINEARE ABBILDUNGEN

Bisher haben wir Tensorprodukte von zwei Vektorräumen betrachtet, mit deren Hilfe wir bilineare Abbildungen als lineare Abbildungen darstellen konnten. Allgemeiner können wir auch multilineare Abbildungen und mehrfache Tensorprodukte zulassen.

Definition 22.18 (multilineare Abbildung, Multilinearform).

Es seien V_1, \dots, V_N, W Vektorräume über demselben Körper K für $N \in \mathbb{N}_0$.

(i) Eine Abbildung

$$f: V_1 \times \dots \times V_N \rightarrow W$$

heißt **multilinear** (englisch: **multilinear map**) oder genauer **N -linear** (englisch: **N -linear map**), wenn für jedes $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ und alle fest gewählten $\bar{v}_j \in V_j$, $j \in \llbracket 1, N \rrbracket \setminus \{i\}$, die Abbildung

$$f(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{i-1}, \cdot, \bar{v}_{i+1}, \dots, \bar{v}_N): V_i \ni v_i \mapsto f(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{i-1}, v_i, \bar{v}_{i+1}, \dots, \bar{v}_N) \in W$$

linear ist.

(ii) Die Menge aller multilinearen Abbildungen $V_1 \times \dots \times V_N \rightarrow W$ bezeichnen wir mit dem Symbol $\text{Mult}(V_1, \dots, V_N; W)$.

(iii) Eine multilineare Abbildung in den Vektorraum $W = K$ nennen wir eine **Multilinearform** (englisch: **multilinear form**) auf $V_1 \times \dots \times V_N$.

(iv) Die Menge aller Multilinearformen $V_1 \times \dots \times V_N \rightarrow K$ bezeichnen wir mit $\text{Mult}(V_1, \dots, V_N)$ oder $\text{Mult}(V_1, \dots, V_N; K)$. △

Bemerkung 22.19 (multilineare Abbildungen).

(i) Im Fall $N = 0$ ist $V_1 \times \dots \times V_N$ die Menge, die nur aus dem leeren Tupel $()$ besteht. Der Vektorraum $V_1 \times \dots \times V_N$ ist also isomorph zum Nullraum. Damit ist jede Abbildung $\{()\} \rightarrow W$ multilinear und kann mit dem jeweils einzigen Bildelement in W identifiziert werden.

(ii) Im Fall $N = 1$ sind die multilinearen Abbildungen $V_1 \rightarrow W$ gerade die linearen Abbildungen, also $\text{Mult}(V_1; W) = \text{Hom}(V_1, W)$.

(iii) Der Fall $N = 2$ entspricht den bilinearen Abbildungen $V_1 \times V_2 \rightarrow W$ aus § 22.1, also $\text{Mult}(V_1, V_2; W) = \text{Bil}(V_1, V_2; W)$. △

Es gelten die mehrdimensionalen Analoga von Lemma 22.3 und Satz 22.4:

Lemma 22.20 (multilineare Abbildungen bilden einen Vektorraum).

Es seien V_1, \dots, V_N, W Vektorräume über demselben Körper K für $N \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $\text{Mult}(V_1, \dots, V_N; W)$ ein Unterraum des Vektorraumes $W^{V_1 \times \dots \times V_N} = \{f: V_1 \times \dots \times V_N \rightarrow W\}$ aller Abbildungen $V_1 \times \dots \times V_N \rightarrow W$.

Satz 22.21 (Existenz- und Eindeutigkeitsatz für multilineare Abbildungen, vgl. Satz 22.4).

Es seien V_1, \dots, V_N, W Vektorräume über demselben Körper K für $N \in \mathbb{N}_0$. Weiter seien $(v_{k,i_k})_{i_k \in I_k}$ Basen von V_k für $k = 1, \dots, N$. Außerdem sei $(w_{(i_1, \dots, i_N)})_{(i_1, \dots, i_N) \in I_1 \times \dots \times I_N}$ eine Familie von Vektoren in W . Dann gibt es genau eine multilineare Abbildung $f: V_1 \times \dots \times V_N \rightarrow W$ mit der Eigenschaft $f(v_{i_1}, \dots, v_{i_N}) = w_{i_1, \dots, i_N}$ für alle $(i_1, \dots, i_N) \in I_1 \times \dots \times I_N$.

In Erweiterung von [Definition 22.7](#) können wir angeben:

Definition 22.22 (Tensorprodukt).

Es seien K ein Körper und V_1, \dots, V_N Vektorräume über K und $N \in \mathbb{N}_0$. Weiter seien die Familien $(v_{1,i_1})_{i_1 \in I_1}, \dots, (v_{N,i_N})_{i_N \in I_N}$ Basen von V_1, \dots, V_N .

(i) Der K -Vektorraum

$$V_1 \otimes \cdots \otimes V_N = \bigotimes_{i=1}^N V_i := \{T: I_1 \times \cdots \times I_N \rightarrow K \mid T(i_1, \dots, i_N) \neq 0 \text{ nur für endlich viele } (i_1, \dots, i_N) \in I_1 \times \cdots \times I_N\} \quad (22.10)$$

heißt ein **Tensorproduktraum** $V_1 \otimes \cdots \otimes V_N$.

(ii) Elemente von $V_1 \otimes \cdots \otimes V_N$ heißen **Tensoren** der **Stufe** (englisch: **degree**) oder **Ordnung** (englisch: **order**) N . Der **Nullvektor** in $V_1 \otimes \cdots \otimes V_N$, also die **Nullabbildung** $T: I_1 \times \cdots \times I_N \rightarrow K$ mit $T(i_1, \dots, i_N) = 0$ für alle $(i_1, \dots, i_N) \in I_1 \times \cdots \times I_N$, heißt der **Nulltensor**.

(iii) Die multilineare Abbildung

$$\otimes: V_1 \times \cdots \times V_N \ni (v_1, \dots, v_N) \mapsto \otimes(v_1, \dots, v_N) := v_1 \otimes \cdots \otimes v_N \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_N, \quad (22.11)$$

die durch die Bilder von $(v_{1,i_1}, \dots, v_{N,i_N})_{(i_1, \dots, i_N) \in I_1 \times \cdots \times I_N}$ gemäß

$$\otimes(v_{1,i_1}, \dots, v_{N,i_N}) := v_{1,i_1} \otimes \cdots \otimes v_{N,i_N} = [(k_1, \dots, k_N) \mapsto \delta_{i_1 k_1} \cdots \delta_{i_N k_N}] \quad (22.12)$$

eindeutig definiert wird, heißt die **universelle multilineare Abbildung** (englisch: **universal multilinear map**) in den Tensorproduktraum $V_1 \otimes \cdots \otimes V_N$. Dabei bezeichnet $v_{1,i_1} \otimes \cdots \otimes v_{N,i_N}$ dasjenige Element $T \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_N$ mit der Eigenschaft

$$T(k_1, \dots, k_N) := \begin{cases} 1 & \text{im Fall } k_j = i_j \text{ für alle } j = 1, \dots, N \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

also $v_{1,i_1} \otimes \cdots \otimes v_{N,i_N} = [(k_1, \dots, k_N) \mapsto \delta_{i_1 k_1} \cdots \delta_{i_N k_N}]$.

(iv) Das Paar $(V_1 \otimes \cdots \otimes V_N, \otimes)$ heißt ein **Tensorprodukt** von V_1, \dots, V_N .

(v) Wir nennen $v_1 \otimes \cdots \otimes v_N$ auch das **Tensorprodukt** der Vektoren $v_1 \in V_1$ usw. bis $v_N \in V_N$. Statt $v_1 \otimes \cdots \otimes v_N$ schreiben wir manchmal auch $\bigotimes_{j=1}^N v_j$.

(vi) Elemente von $V_1 \otimes \cdots \otimes V_N$ der Form $v_1 \otimes \cdots \otimes v_N$ mit $v_1, \dots, v_N \neq 0$ heißen **Elementartensoren** oder **einfache Tensoren** (englisch: **simple tensors**). \triangle

Auch hier ist wieder die Konstruktion des Tensorproduktraumes $V_1 \otimes \cdots \otimes V_N$ abhängig von der Wahl der Basen, aber alle Instanzen des Tensorproduktraumes sind zueinander isomorph. Es gelten Rechenregeln analog zu [Lemma 22.9](#), d. h., das Tensorprodukt ist nach Konstruktion multilinear. Auch den **Rang** eines Tensors T können wir analog zu [Definition 22.10](#) definieren als die minimale Anzahl von Summanden, mit denen wir T als Summe von Elementartensoren schreiben können.⁵⁶ In Analogie zu [Lemma 22.11](#) gilt wieder, dass der Nulltensor der einzige Tensor vom Rang 0 ist und dass Elementartensoren genau diejenigen vom Rang 1 sind.

Bezüglich der universellen bilinearen Abbildung können wir folgende Aussage zeigen:

⁵⁶Im Fall $N \geq 3$ ist die Bestimmung des Ranges eines N -stufigen Tensors ein **NP-schweres Problem** im Sinne der Komplexitätstheorie. Dagegen haben für $N = 0$ und $N = 1$ alle Tensoren bis auf den Nulltensor den Rang 1.

Satz 22.23 (universelle Eigenschaft der universellen multilinearen Abbildung \otimes).

Es seien K ein Körper und V_1, \dots, V_N und W Vektorräume über K und $N \in \mathbb{N}_0$. Weiter seien die Familien $(v_{1,i_1})_{i_1 \in I_1}, \dots, (v_{N,i_N})_{i_N \in I_N}$ Basen von V_1, \dots, V_N und $(V_1 \otimes \dots \otimes V_N, \otimes)$ das zugehörige Tensorprodukt. Dann gilt:

- (i) Ist $g \in \text{Mult}(V_1 \times \dots \times V_N; W)$, dann gibt es ein eindeutig bestimmtes $f \in \text{Hom}(V_1 \otimes \dots \otimes V_N; W)$ mit der Eigenschaft $g = f \circ \otimes$.
- (ii) Ist $f \in \text{Hom}(V_1 \otimes \dots \otimes V_N; W)$, dann ist $g := f \circ \otimes \in \text{Mult}(V_1 \times \dots \times V_N; W)$.

Mit anderen Worten, das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} V_1 \times \dots \times V_N & & \\ \otimes \downarrow & \searrow g & \\ V_1 \otimes \dots \otimes V_N & \xrightarrow{f} & W \end{array}$$

Auch hier gilt analog zu [Satz 22.14](#):

Satz 22.24 (die Zuordnung $g \mapsto f$ ist ein Vektorraumisomorphismus).

Es seien V_1, \dots, V_N sowie W Vektorräume über dem Körper K , $N \in \mathbb{N}_0$, und $(V_1 \otimes \dots \otimes V_N, \otimes)$ ein Tensorprodukt von V_1, \dots, V_N . Dann ist die Abbildung

$$\text{Mult}(V_1 \times \dots \times V_N; W) \ni g \mapsto f \in \text{Hom}(V_1 \otimes \dots \otimes V_N; W) \quad (22.13)$$

(definiert durch die Eigenschaft $g = f \circ \otimes$, siehe [Satz 22.23](#)) ein Isomorphismus von Vektorräumen.

Wir können daher in Zukunft statt mit multilinearen Abbildungen in $\text{Mult}(V_1 \times \dots \times V_N; W)$ auch mit linearen Abbildungen in $\text{Hom}(V_1 \otimes \dots \otimes V_N, W)$ arbeiten.

§ 22.3 TENSOREN ÜBER EINEM VEKTORRAUM

In diesem Abschnitt betrachten wir eine für die Praxis besonders relevante Klasse von Tensoren noch genauer.

Definition 22.25 (Tensoren über einem Vektorraum).

Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K und V^* sein Dualraum. Weiter seien $(r, s) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$. Elemente des Tensorproduktraumes⁵⁷

$$\mathcal{T}_s^r(V) := \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{r\text{-mal}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{s\text{-mal}} \quad (22.14)$$

heißen **Tensoren vom Typ (r, s)** (englisch: *tensors of type (r, s)*) über dem Vektorraum V .⁵⁸ \triangle

⁵⁷Die Notation für diese Tensorprodukträume ist in der Literatur leider nicht einheitlich. Oft ist die Bedeutung von r und s vertauscht.

⁵⁸Historisch spricht man auch von r -fach **kontravarianten** und s -fach **kovarianten** Tensoren, vgl. [Bemerkung 21.18](#).

Wir stellen uns folgende Fragen:⁵⁹

- (1) Wie lassen sich solche Tensoren darstellen?
- (2) Wie lassen sich solche Tensoren interpretieren bzw. verwenden?

Bemerkung 22.26 (Positionen von Indizes).

Wir betrachten in diesem Abschnitt überwiegend **endlich-dimensionale** Vektorräume V mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$. Außerdem gehen wir zu einer für die Tensoralgebra typischen Notation über:

- Die Vektoren einer Basis des „primalen“ Raumes V werden mit unteren Indizes nummeriert und heißen typischerweise e_1, \dots, e_n .
- Die Koordinaten von Vektoren in V bzgl. dieser Basis werden mit oberen Indizes notiert, also $v = \sum_{i=1}^n v^i e_i$.
- Die Kovektoren der dualen Basis von V^* werden mit oberen Indizes nummeriert und heißen typischerweise $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n$. Es gilt also $\langle \varepsilon^i, e_j \rangle = \delta_{ij}$.
- Die Koordinaten von Kovektoren in V^* bzgl. dieser Basis werden mit unteren Indizes notiert, also $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i \varepsilon^i$. △

Wir kommen zur **Frage (1)**. Jeder Tensor in $\mathcal{T}_s^r(V)$ ist eine Linearkombination der elementaren Basistensoren

$$e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon^{j_s} \quad \text{mit } 1 \leq i_1, \dots, i_r \leq n \text{ und } 1 \leq j_1, \dots, j_s \leq n. \quad (22.15)$$

Also kann jeder Tensor in $T \in \mathcal{T}_s^r(V)$ dargestellt werden in der Form

$$T = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_r=1}^n \sum_{j_1=1}^n \dots \sum_{j_s=1}^n T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon^{j_s}. \quad (22.16)$$

Die Koeffizienten $T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r}$ werden die **Komponenten** (englisch: **components**) des Tensors T bzgl. der Basis (22.15) genannt.⁶⁰ Sie bilden eine Art „verallgemeinerte Matrix“, nämlich ein Zahlenschema mit $r + s$ Dimensionen und daher n^{r+s} Einträgen. In der mathematischen Physik ist es üblich, die Summenzeichen in (22.16) nicht zu notieren, sondern sie sich implizit dazuzudenken. Das nennt sich die **Einsteinsche Summenkonvention** (englisch: **Einstein summation convention**): „Über jeden Index, der in einer Formel zweifach (und zwar notwendigerweise einmal oben und einmal unten) auftritt, wird summiert.“

Die Zuordnung

$$\mathcal{T}_s^r(V) \ni T \mapsto T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} \in K^{n^{r+s}}$$

eines Tensors auf seine Komponenten (bzgl. einer beliebigen, aber festen Basis von V und der zugehörigen dualen Basis) ist ein Vektorraumisomorphismus.

⁵⁹Alle Konzepte in § 22.3 (Darstellung von Tensoren mit Hilfe von Komponenten und Interpretation von Tensoren als multilineare Abbildungen) hätten wir auch bereits für Tensoren in allgemeineren **Tensorprodukträumen** $V_1 \otimes \dots \otimes V_N$ einführen können. Wir beschränken uns jedoch aus Gründen der Materialauswahl auf die **Tensorprodukträume** hier, die nur V und V^* verwenden.

⁶⁰Die Koordinaten von Vektoren v hatten wir stets mit einem anderen Symbol bezeichnet, typischerweise x . Bei Tensoren ist es aber üblich, die Komponenten mit demselben Symbol zu notieren, hier beides Mal T .

Bemerkung 22.27 (Tensoren und ihre Komponenten).

Oft hört man die Aussage, das Zahlenschema der Komponenten $T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r}$ sei der eigentliche Tensor T .⁶¹ Dieser Sichtweise schließen wir uns hier nicht an. Jedoch kann man mit einem Tensor „arbeiten“ (z. B. die Stufe oder den Rang bestimmen, Vektoren und Covektoren in die durch den Tensor repräsentierte multilineare Abbildung einsetzen etc.), indem man die entsprechenden Aktionen am Schema der Komponenten ausführt. Dazu folgen unten noch Beispiele. \triangle

Wir kommen zu [Frage \(2\)](#). Bisher kennen wir Tensoren nur als Elemente eines Vektorraumes, der als natürlicher Definitionsraum multilinearer Abbildungen angesehen werden kann, sodass diese zu linearen Abbildungen werden ([Satz 22.23](#)). Interessanterweise können jedoch auch die Tensoren selbst bereits als multilineare Abbildungen verstanden werden, und zwar sogar auf verschiedene Art und Weise, je nachdem, welche Argumente man einsetzt und welche Argumente man noch zurückhält:

Lemma 22.28 (Interpretation von Tensoren vom Typ (r, s) , vgl. [Lemma 22.16](#)).

Es sei V ein **endlich-dimensionaler** Vektorraum über einem Körper K und V^* sein Dualraum. Weiter seien $(r, s) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ und $\mathcal{T}_s^r(V)$ ein Tensorproduktraum vom Typ (r, s) . Dann bestehen folgende Isomorphismen:

$$\text{Typ } (0, 0) \quad \mathcal{T}_0^0(V) = K \quad \cong \text{Hom}(\{0\}, K) \quad (22.17a)$$

$$\text{Typ } (0, 1) \quad \mathcal{T}_1^0(V) = V^* \quad \cong \text{Hom}(V, K) \quad (22.17b)$$

$$\text{Typ } (1, 0) \quad \mathcal{T}_0^1(V) = V \quad \cong \text{Hom}(V^*, K) \quad (22.17c)$$

$$\text{Typ } (0, 2) \quad \mathcal{T}_2^0(V) = V^* \otimes V^* \cong \text{Hom}(V \otimes V, K) \cong \text{Hom}(V, V^*) \quad (22.17d)$$

$$\text{Typ } (1, 1) \quad \mathcal{T}_1^1(V) = V \otimes V^* \cong \text{Hom}(V^* \otimes V, K) \cong \text{Hom}(V, V) \cong \text{Hom}(V^*, V^*) \quad (22.17e)$$

$$\text{Typ } (2, 0) \quad \mathcal{T}_0^2(V) = V \otimes V \quad \cong \text{Hom}(V^* \otimes V^*, K) \cong \text{Hom}(V^*, V) \quad (22.17f)$$

usw.

An Stelle eines Beweises erläutern wir die Aussagen. Die Isomorphismen in (22.17a)–(22.17c) sind offensichtlich. Im Fall (22.17d) ist ein Isomorphismus zwischen $\text{Hom}(V \otimes V, K)$ und $\text{Hom}(V, V^*)$ für Basistensoren gegeben durch

$$(\varepsilon^{j_1} \otimes \varepsilon^{j_2})(v, \cdot) := \langle \varepsilon^{j_1}, v \rangle \varepsilon^{j_2} \quad \text{für } \varepsilon^{j_1}, \varepsilon^{j_2} \in V^* \text{ und } v \in V.$$

Ein weiterer Isomorphismus ist gegeben durch

$$(\varepsilon^{j_1} \otimes \varepsilon^{j_2})(\cdot, v) := \langle \varepsilon^{j_2}, v \rangle \varepsilon^{j_1} \quad \text{für } \varepsilon^{j_1}, \varepsilon^{j_2} \in V^* \text{ und } v \in V.$$

Im Fall (22.17e) ist ein Isomorphismus zwischen $\text{Hom}(V^* \otimes V, K)$ und $\text{Hom}(V, V)$ für Basistensoren gegeben durch

$$(e_{i_1} \otimes \varepsilon^{j_1})(\cdot, v) := \langle \varepsilon^{j_1}, v \rangle e_{i_1} \quad \text{für } e_{i_1}, v \in V \text{ und } \varepsilon^{j_1} \in V^*.$$

Ein Isomorphismus zwischen $\text{Hom}(V^* \otimes V, K)$ und $\text{Hom}(V^*, V^*)$ ist für Basistensoren gegeben durch

$$(e_{i_1} \otimes \varepsilon^{j_1})(v^*, \cdot) := \langle v^*, e_{i_1} \rangle \varepsilon^{j_1} \quad \text{für } e_{i_1} \in V \text{ und } \varepsilon^{j_1}, v^* \in V^*.$$

Im Fall (22.17f) ist ein Isomorphismus zwischen $V \otimes V$ und $\text{Hom}(V^*, V)$ für Basistensoren gegeben durch

$$(e_{i_1} \otimes e_{i_2})(v^*, \cdot) := \langle v^*, e_{i_1} \rangle e_{i_2} \quad \text{für } e_{i_1}, e_{i_2} \in V \text{ und } v^* \in V^*.$$

⁶¹Diese Aussage steht auf einer Stufe mit „Der Koordinatenvektor eines Vektors sei der Vektor.“ oder „Die Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung sei die Abbildung“.

Ein weiterer Isomorphismus ist gegeben durch

$$(e_{i_1} \otimes e_{i_2})(\cdot, v^*) := \langle v^*, e_{i_2} \rangle e_{i_1} \quad \text{für } e_{i_1}, e_{i_2} \in V \text{ und } v^* \in V^*.$$

Für alle Nicht-Basistensoren des jeweiligen Tensorproduktraumes ergeben sich die Formeln durch Linearkombination der Formeln für Basistensoren.

Daraus erkennen wir: Jeder Faktor in einem Tensorprodukt „konsumiert“ ein Element des jeweiligen Dualraumes⁶² und liefert – sobald das entsprechende Argument eingesetzt wird – das Ergebnis der dualen Paarung als Element des Skalkörpers K (eine „Zahl“) zurück. Die verbleibenden Faktoren, für die kein Argument eingesetzt wird, bilden einen Tensor niedrigerer Stufe. So würde beispielsweise ein Tensor T aus $\mathcal{T}_1^3(V)$ nach Einsetzen des ersten und dritten Arguments zu einem Tensor S in $\mathcal{T}_1^1(V)$. Am Beispiel eines Basistensors:

$$(e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes e_{i_3} \otimes \varepsilon^{j_1})(\omega, \cdot, \xi, \cdot) := \langle \omega, e_{i_1} \rangle \langle \xi, e_{i_3} \rangle e_{i_2} \otimes \varepsilon^{j_1}.$$

In Komponenten bzgl. irgendeiner Basis von V und der zugehörigen dualen Basis von V^* sieht diese Rechnung für einen beliebigen Tensor $T \in \mathcal{T}_1^3(V)$ wie folgt aus:

$$\sum_{i_1=1}^n \sum_{i_3=1}^n T_{j_1}^{i_1, i_2, i_3} \omega_{i_1} \xi_{i_3} =: S_{j_1}^{i_2}.$$

Wir werden in Zukunft einen Tensor

$$T \in \mathcal{T}_s^r(V)$$

nach Bedarf mit einem Element in $\text{Hom}(\underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{r\text{-mal}} \otimes \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{s\text{-mal}}, K)$ bzw. mit der multilinearen Abbildung

$$\underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{r\text{-mal}} \times \underbrace{V \times \dots \times V}_{s\text{-mal}} \rightarrow K$$

nach Satz 22.23 identifizieren und letztere ebenfalls mit T bezeichnen. Wir schreiben daher einfach auch $T(\omega^1, \dots, \omega^r, v_1, \dots, v_s)$ für das Einsetzen aller Argumente in die zum Tensor T gehörige Multilinearform. Hat ω^i die Koordinaten $\begin{pmatrix} \omega_{i,1} \\ \vdots \\ \omega_{i,n} \end{pmatrix}$ bzgl. der Basis $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n$ und hat v_j die Koordinaten $\begin{pmatrix} v^{j,1} \\ \vdots \\ v^{j,n} \end{pmatrix}$ bzgl. der Basis e_1, \dots, e_n und hat T die Komponenten $T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r}$ bzgl. der Basis (22.15), dann gilt

$$T(\omega^1, \dots, \omega^r, v_1, \dots, v_s) = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_r=1}^n \sum_{j_1=1}^n \dots \sum_{j_s=1}^n T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} \omega_{1, i_1} \dots \omega_{r, i_r} v^{1, j_1} \dots v^{s, j_s}.$$

(Quizfrage 22.4: Warum ist das so?)

Ende der Vorlesung 7

⁶²wobei der Dualraum V^{**} von V^* mit V identifiziert wird (Satz 21.42)

§ 22.4 SYMMETRISCHE UND SCHIEFSYMMETRISCHE TENSOREN

Die Notation in der nachfolgenden Definition wurde nachträglich angepasst, um Doppelindizes zu vermeiden.

Definition 22.29 (symmetrische, schief-symmetrische und alternierende Tensoren).

Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K . Weiter sei $r \in \mathbb{N}_0$.

- (i) Ein Tensor $T \in \mathcal{T}_0^r(V) \cong \text{Hom}(V^* \otimes \cdots \otimes V^*, K) \cong \text{Mult}(V^* \times \cdots \times V^*; K)$ heißt **(total) symmetrisch** (englisch: **(totally) symmetric tensor**), wenn für alle $\omega^1, \dots, \omega^r \in V^*$ und jede Permutation $\sigma \in S_r$ gilt:

$$T(\omega^1, \dots, \omega^r) = T(\omega^{\sigma(1)}, \dots, \omega^{\sigma(r)}). \quad (22.18)$$

Die Menge aller symmetrischen Tensoren in $\mathcal{T}_0^r(V)$ bezeichnen wir mit $\mathcal{T}_0^r(V)_{\text{sym}}$.

- (ii) Ein Tensor $T \in \mathcal{T}_0^r(V) \cong \text{Hom}(V^* \otimes \cdots \otimes V^*, K) \cong \text{Mult}(V^* \times \cdots \times V^*; K)$ heißt **(total) schief-symmetrisch** (englisch: **(totally) skew-symmetric tensor**), wenn für alle $\omega^1, \dots, \omega^r \in V^*$ und jede Permutation $\sigma \in S_r$ gilt:

$$T(\omega^1, \dots, \omega^r) = (\text{sgn } \sigma) T(\omega^{\sigma(1)}, \dots, \omega^{\sigma(r)}). \quad (22.19)$$

Die Menge aller schief-symmetrischen Tensoren in $\mathcal{T}_0^r(V)$ bezeichnen wir mit $\mathcal{T}_0^r(V)_{\text{skew}}$.

- (iii) Ein Tensor $T \in \mathcal{T}_0^r(V) \cong \text{Hom}(V^* \otimes \cdots \otimes V^*, K) \cong \text{Mult}(V^* \times \cdots \times V^*; K)$ heißt **alternierend** (englisch: **alternating tensor**), wenn für $\omega^1, \dots, \omega^r \in V^*$ gilt:

$$\omega_i = \omega_k \text{ für ein } k \neq i \implies T(\omega^1, \dots, \omega^r) = 0. \quad (22.20)$$

Die Menge aller alternierenden Tensoren in $\mathcal{T}_0^r(V)$ bezeichnen wir mit $\mathcal{T}_0^r(V)_{\text{alt}}$. \triangle

Die Symmetrie von $T \in \mathcal{T}_0^r(V)$ bedeutet also gerade, dass die Reihenfolge der r Argumente unerheblich ist. Die Schief-symmetrie von $T \in \mathcal{T}_0^r(V)$ bedeutet dagegen, dass $T(\varepsilon^{i_1}, \dots, \varepsilon^{i_r})$ das Vorzeichen wechselt, wenn genau zwei Argumente vertauscht werden. Die alternierende Eigenschaft bedeutet schließlich, dass das Bild von T gleich 0 ist, sobald zwei Argumente identisch sind.

Die Eigenschaften **symmetrisch**, **schief-symmetrisch** und **alternierend** verwenden wir analog zu **Definition 22.29** auch für Multilinearformen in $\text{Mult}(V^* \times \cdots \times V^*; K)$.

Lemma 22.30 (Zusammenhang zwischen schief-symmetrischen und alternierenden Tensoren).

Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K . Weiter sei $r \in \mathbb{N}_0$.

- (i) Ist $T \in \mathcal{T}_0^r(V)$ alternierend, dann ist T auch schief-symmetrisch.
- (ii) Im Fall $\text{char}(K) \neq 2$ gilt auch die Umkehrung.
- (iii) Im Fall $\text{char}(K) = 2$ gilt $\mathcal{T}_0^r(V)_{\text{sym}} = \mathcal{T}_0^r(V)_{\text{skew}}$.
- (iv) Im Fall $r = 0$ und $r = 1$ gilt $\mathcal{T}_0^r(V)_{\text{sym}} = \mathcal{T}_0^r(V)_{\text{skew}} = \mathcal{T}_0^r(V)_{\text{alt}} = \mathcal{T}_0^r(V)$.

Beweis. Aussage (iv): Die einzige Permutation in S_0 ist die leere Permutation, und die einzige Permutation in S_1 ist die Identität. Daher sind (22.18) und (22.19) für jede Permutation und jeden Tensor erfüllt. Außerdem ist im Fall $r = 0$ und $r = 1$ jeder Tensor alternierend, da es nicht möglich ist, zwei verschiedene identische Argumente einzusetzen.

Aussage (i): Im Fall $r = 0$ und $r = 1$ ist wie in Aussage (iv) gezeigt, jeder Tensor alternierend und schiefsymmetrisch.

Es sei nun $r \geq 2$. Für jeden Tensor $T \in \mathcal{T}_0^r(V) \cong \text{Mult}(V^* \times \cdots \times V^*; K)$ gilt:

$$\begin{aligned} T(\omega_1 + \bar{\omega}_1, \omega_2 + \bar{\omega}_2, \dots, \omega_r) \\ = T(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r) + T(\bar{\omega}_1, \omega_2, \dots, \omega_r) + T(\omega_1, \bar{\omega}_2, \dots, \omega_r) + T(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots, \omega_r). \end{aligned}$$

Ist $T \in \mathcal{T}_0^r(V)$ alternierend und gilt $\omega_1 = \omega_2$ und $\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_2$, also auch $\omega_1 + \bar{\omega}_1 = \omega_2 + \bar{\omega}_2$, so folgt

$$0 = \underbrace{T(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r)}_{=0} + T(\bar{\omega}_1, \omega_2, \dots, \omega_r) + T(\omega_1, \bar{\omega}_2, \dots, \omega_r) + \underbrace{T(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots, \omega_r)}_{=0},$$

also $T(\bar{\omega}_1, \omega_1, \dots, \omega_r) = -T(\omega_1, \bar{\omega}_1, \dots, \omega_r)$. Dasselbe Argument kann nicht nur für die Positionen 1 und 2 angewendet werden, sondern für beliebige zwei Positionen. Das zeigt: T ist schiefsymmetrisch.

Aussage (ii): Im Fall $r = 0$ und $r = 1$ ist wie in Aussage (iv) gezeigt, jeder Tensor alternierend und schiefsymmetrisch.

Es sei daher nun $r \geq 2$. Für jeden Tensor $T \in \mathcal{T}_0^r(V) \cong \text{Mult}(V^* \times \cdots \times V^*; K)$ gilt:

$$\begin{aligned} T(\omega_1 + \bar{\omega}_1, \omega_1 + \bar{\omega}_1, \dots, \omega_r) \\ = T(\omega_1, \omega_1, \dots, \omega_r) + T(\bar{\omega}_1, \omega_1, \dots, \omega_r) + T(\omega_1, \bar{\omega}_1, \dots, \omega_r) + T(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_1, \dots, \omega_r). \end{aligned}$$

Ist $T \in \mathcal{T}_0^r(V)$ schiefsymmetrisch und gilt $\omega_1 = \bar{\omega}_1$, also auch $\omega_1 + \bar{\omega}_1 = 2\omega_1$, dann folgt

$$4T(\omega_1, \omega_1, \dots, \omega_r) = T(\omega_1, \omega_1, \dots, \omega_r) + \underbrace{T(\bar{\omega}_1, \omega_1, \dots, \omega_r) + T(\omega_1, \bar{\omega}_1, \dots, \omega_r)}_{=0} + T(\omega_1, \omega_1, \dots, \omega_r),$$

also auch

$$2T(\omega_1, \omega_1, \dots, \omega_r) = 0.$$

Falls $\text{char}(K) \neq 2$ gilt, so folgt $T(\omega_1, \omega_1, \dots, \omega_r) = 0$. Dasselbe Argument kann nicht nur für die Positionen 1 und 2 angewendet werden, sondern für beliebige zwei Positionen. Das zeigt: T ist alternierend.

Aussage (iii): Im Fall $\text{char}(K) = 2$ gilt $-1 = 1$, also ist (22.19) äquivalent zu (22.18). \square

Lemma 22.31 (Symmetrie und Schiefsymmetrie von Tensoren und Komponenten).

Es seien V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K , (e_1, \dots, e_n) eine Basis von V und $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$ die duale Basis von V^* . Weiter sei $r \in \mathbb{N}_0$. Dann sind äquivalent:

- (i) $T \in \mathcal{T}_0^r(V)$ ist symmetrisch.
- (ii) Die Komponenten erfüllen $T^{i_1, \dots, i_r} = T^{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(r)}}$ für alle $1 \leq i_1, \dots, i_r \leq n$ und alle Permutationen $\sigma \in S_r$.

Weiter sind äquivalent:

- (i) $T \in \mathcal{T}_0^r(V)$ ist schiefsymmetrisch.

(ii) Die Komponenten erfüllen $T^{i_1, \dots, i_r} = (\text{sgn } \sigma) T^{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(r)}}$ für alle $1 \leq i_1, \dots, i_r \leq n$ und alle Permutationen $\sigma \in S_r$.

Beweis. Der Beweis ist Gegenstand von [Hausaufgabe II-4.3](#). □

Lemma 22.32 (symmetrische und schiefsymmetrische Tensoren bilden Unterräume).

Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K . Weiter sei $r \in \mathbb{N}_0$. Die Mengen der symmetrischen bzw. der schiefsymmetrischen Tensoren $\mathcal{T}_0^r(V)_{\text{sym}}$ bzw. $\mathcal{T}_0^r(V)_{\text{skew}}$ bilden Unterräume von $\mathcal{T}_0^r(V)$.

Beweis. Der Nulltensor $0 \otimes \dots \otimes 0$ gehört zu $\mathcal{T}_0^r(V)_{\text{sym}}$, also ist $\mathcal{T}_0^r(V)_{\text{sym}} \neq \emptyset$. Sind $S, T \in \mathcal{T}_0^r(V)_{\text{sym}}$, so gilt

$$\begin{aligned} (S+T)(\varepsilon^{i_1}, \dots, \varepsilon^{i_r}) &= S(\varepsilon^{i_1}, \dots, \varepsilon^{i_r}) + T(\varepsilon^{i_1}, \dots, \varepsilon^{i_r}) \\ &= S(\varepsilon^{i_{\sigma(1)}}, \dots, \varepsilon^{i_{\sigma(r)}}) + T(\varepsilon^{i_{\sigma(1)}}, \dots, \varepsilon^{i_{\sigma(r)}}) \\ &= (S+T)(\varepsilon^{i_{\sigma(1)}}, \dots, \varepsilon^{i_{\sigma(r)}}) \end{aligned}$$

und weiterhin für $\alpha \in K$

$$\begin{aligned} (\alpha T)(\varepsilon^{i_1}, \dots, \varepsilon^{i_r}) &= \alpha T(\varepsilon^{i_1}, \dots, \varepsilon^{i_r}) \\ &= \alpha T(\varepsilon^{i_{\sigma(1)}}, \dots, \varepsilon^{i_{\sigma(r)}}) \\ &= (\alpha T)(\varepsilon^{i_{\sigma(1)}}, \dots, \varepsilon^{i_{\sigma(r)}}). \end{aligned}$$

Nach dem Unterraumkriterium [Satz 12.8](#) ist $\mathcal{T}_0^r(V)_{\text{sym}}$ damit ein Unterraum. Der Beweis für $\mathcal{T}_0^r(V)_{\text{skew}}$ läuft analog. □

Definition 22.33 (Projektion).

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K . Ein Endomorphismus $P \in \text{End}(V)$ heißt eine **Projektion** (englisch: **projection**) oder ein **Projektor** (englisch: **projector**), wenn er idempotent ist, wenn also

$$P \circ P = P \tag{22.21}$$

gilt. Insbesondere sprechen wir von einer **Projektion auf den Unterraum** $\text{Bild}(P)$. △

Wir zeigen jetzt, wie wir einen beliebigen $(r, 0)$ -Tensor symmetrisieren bzw. „schiefsymmetrisieren“ können. Dazu definieren wir zunächst, wie eine Permutation $\sigma \in S_r$ als lineare Abbildung auf dem Tensorproduktraum $\mathcal{T}_0^r(V)$ wirkt: Für einen Basistensor $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r}$ definieren wir

$$\sigma(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r}) := e_{i_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes e_{i_{\sigma(r)}}. \tag{22.22}$$

Dadurch ist die **Permutation** σ durch [Satz 22.21](#) auf ganz $\mathcal{T}_0^r(V)$ eindeutig definiert.

Satz 22.34 (Projektionen auf die Unterräume der symmetrischen und schiefsymmetrischen Tensoren).

Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K ~~mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$~~ mit $\text{char}(K) = 0$. Weiter sei $r \in \mathbb{N}_0$.

(i) Der Endomorphismus

$$\mathcal{T}_0^r(V) \ni T \mapsto \text{proj}_{\text{sym}}(T) := \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \sigma(T) \in \mathcal{T}_0^r(V) \tag{22.23}$$

ist eine Projektion auf den Unterraum der symmetrischen Tensoren $\mathcal{T}_0^r(V)_{\text{sym}}$.

(ii) Der Endomorphismus

$$\mathcal{T}_0^r(V) \ni T \mapsto \text{proj}_{\text{skew}}(T) := \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} (\text{sgn } \sigma) \sigma(T) \in \mathcal{T}_0^r(V) \quad (22.24)$$

ist eine Projektion auf den Unterraum der schiefsymmetrischen Tensoren $\mathcal{T}_0^r(V)_{\text{skew}}$.

Quizfrage 22.5: Was bedeutet $\frac{1}{r!}$ in einem beliebigen Körper, und warum fordern wir $\text{char}(K) = 0$?

Beweis. Der Beweis ist Gegenstand von [Hausaufgabe II-4.4](#). □

Quizfrage 22.6: Wie sehen die Komponenten eines symmetrisierten Tensors aus? **Quizfrage 22.7:** Wie sehen die Komponenten eines schiefsymmetrisierten Tensors aus?

Lemma 22.35 (Dimension des Unterraumes $\mathcal{T}_0^r(V)_{\text{skew}}$).

Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K mit $\text{char}(K) \neq 2$ und $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei $r \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt⁶³

$$\dim(\mathcal{T}_0^r(V)_{\text{skew}}) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}. \quad (22.25)$$

Insbesondere gilt $\dim(\mathcal{T}_0^n(V)_{\text{skew}}) = 1$ und $\dim(\mathcal{T}_0^r(V)_{\text{skew}}) = 0$ für $r \geq n$.

Beweis. Nach [Lemma 22.31](#) liegt die Schiefsymmetrie von $T \in \mathcal{T}_0^r(V)_{\text{skew}}$ genau dann vor, wenn die Komponenten bzgl. einer beliebigen Basis von V schiefsymmetrisch sind. In diesem Fall sind die Komponenten bereits durch die Komponenten mit den Indizes

$$I_{\text{skew}} := \{(i_1, \dots, i_r) \in \llbracket 1, n \rrbracket^r \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n\}$$

eindeutig bestimmt. Für die Indizes nicht in I_{skew} ist entweder ein Index doppelt, woraus folgt, dass dieser Eintrag in den Komponenten gleich 0 ist, oder es gibt eine Permutation σ , sodass $\sigma(i_1, \dots, i_r) \in I_{\text{skew}}$ liegt. Andererseits können die Einträge mit Indizes in I_{skew} frei gewählt werden, sodass sich $\dim(\mathcal{T}_0^r(V)_{\text{skew}}) = \#I_{\text{skew}}$ ergibt.

Es bleibt zu zeigen, dass $\#I_{\text{skew}} = \binom{n}{r}$ ist. Das ist aber offensichtlich, da $\binom{n}{r}$ die Anzahl der Möglichkeiten angibt, genau r verschiedene Indizes aus dem Vorrat $\llbracket 1, n \rrbracket$ auszuwählen, die dann aufsteigend sortiert werden. □

[Lemma 22.35](#) zeigt insbesondere, dass es in einem Vektorraum V mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$ bis auf Skalierung nur einen einzigen schiefsymmetrischen Tensor in $\mathcal{T}_0^n(V)_{\text{skew}}$ gibt. Wir können die Resultate aus [§ 22.4](#) natürlich auch auf V^* statt V anwenden. Insbesondere gibt es – bis auf Skalierung – nur einen einzigen schiefsymmetrischen Tensor in $\mathcal{T}_n^0(V)_{\text{skew}}$, also nach [Satz 22.23 – bis auf Skalierung](#) – auch nur eine einzige schiefsymmetrische Multilinearform $V \times \dots \times V \rightarrow K$. Diese ist Gegenstand von [§ 23](#).

Ende der Vorlesung 8

Ende der Woche 4

⁶³In (22.25) ist $\binom{n}{r}$ der **Binomialkoeffizient** (englisch: binomial coefficient) „ n über r “.

§ 23 DETERMINANTEN

Literatur: Fischer, Springborn, 2020, Kapitel 4, Bosch, 2014, Kapitel 4

In diesem Abschnitt ist V stets ein Vektorraum über einem Körper K mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$. Die Determinante ist eine Maßzahl für Endomorphismen $f \in \text{End}(V)$, die gewisse Eigenschaften festhält. Unser Vorgehen wird sein, zunächst Determinantenformen auf V^n zu definieren, eine bestimmte davon als *die* Determinante für Matrizen zu erklären und diesen Begriff dann mittels Darstellungsmatrizen auf Endomorphismen zu übertragen.

Definition 23.1 (Determinantenform auf einem Produktraum V^n).

Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K und $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$. Eine Abbildung

$$\Delta: V^n \ni (v_1, \dots, v_n) \mapsto \Delta(v_1, \dots, v_n) \in K$$

heißt eine **Determinantenform** (englisch: **determinant form**) auf V^n , wenn folgende Eigenschaften gelten:

(i) Δ ist eine n -lineare Form auf V^n .

(ii) Δ ist alternierend.

(iii) Δ ist nicht die Nullform. △

Als n -lineare Form auf V^n wird Δ durch genau einen Tensor $T \in \mathcal{T}_n^0(V)$ repräsentiert. Wegen der alternierenden Eigenschaft ist dieser Tensor auch schiefsymmetrisch (Lemma 22.30). Nach Lemma 22.31 und dem Beweis von Lemma 22.35 ist das Schema der Komponenten bereits durch einen einzigen Index eindeutig festgelegt. O. B. d. A. ist das der Index $(1, 2, \dots, n)$, also der Funktionswert $\Delta(b_1, \dots, b_n)$ auf einer beliebigen Basis (b_1, \dots, b_n) von V . Dass Δ nicht die Nullform ist, bedeutet gerade, dass $\Delta(b_1, \dots, b_n) \neq 0$ ist. Eine konkrete Determinantenform auf V^n wird also durch den Funktionswert $\Delta(b_1, \dots, b_n) \in K \setminus \{0\}$ festgelegt, den man als Normierungswert verstehen kann.

Wie folgendes Resultat zeigt, hat die in Definition 23.1 geforderte alternierende Eigenschaft die Funktion, die lineare Abhängigkeit der eingesetzten Vektoren zu erkennen:

Lemma 23.2 (Bedeutung der alternierenden Eigenschaft).

Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K und $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei $T \in \mathcal{T}_n^0(V)$. Dann sind äquivalent:

(i) T ist alternierend.

(ii) Wenn die Familie (v_1, \dots, v_n) linear abhängig ist, dann gilt $T(v_1, \dots, v_n) = 0$.

Beweis. Aussage (i) \Rightarrow Aussage (ii): Es sei (v_1, \dots, v_n) linear abhängig, dann gibt es einen Index $1 \leq i \leq n$, sodass

$$v_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \alpha_j v_j$$

gilt (Lemma 13.3). O. B. d. A. gilt $i = 1$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
 T(v_1, \dots, v_n) &= T\left(\sum_{j=2}^n \alpha_j v_j, v_2, \dots, v_n\right) \\
 &= \sum_{j=2}^n \alpha_j T(v_j, v_2, \dots, v_n) \quad \text{wegen der Multilinearität} \\
 &= \sum_{j=2}^n 0 \quad \text{wegen der alternierenden Eigenschaft} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Aussage (ii) \Rightarrow Aussage (i): Wir betrachten (v_1, \dots, v_n) , wobei zwei der Vektoren identisch sind. Dann ist (v_1, \dots, v_n) linear abhängig, also $T(v_1, \dots, v_n) = 0$. Damit ist T alternierend. \square

Wie sieht nun eine Determinantenform auf V^n konkret aus? Diese Frage beantwortet das folgende Lemma.

Lemma 23.3 (Gestalt von Determinantenformen).

Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K und $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei (b_1, \dots, b_n) eine Basis von V . Ist Δ eine Determinantenform auf V^n , dann gilt:

$$\Delta(v_1, \dots, v_n) = \left(\sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ = \pm 1 \in K}} (\text{sgn } \sigma) t_{\sigma(1),1} \cdots t_{\sigma(n),n} \right) \underbrace{\Delta(b_1, \dots, b_n)}_{\text{Normierungswert} \in K \setminus \{0\}} \quad (23.1)$$

für alle $(v_1, \dots, v_n) \in V^n$, wobei T die durch

$$v_j = \sum_{i=1}^n t_{ij} b_i$$

eindeutig definierte Matrix ist.⁶⁴

Beweis. Aufgrund der Multilinearität der Determinantenform gilt

$$\begin{aligned}
 \Delta(v_1, \dots, v_n) &= \Delta\left(\sum_{i=1}^n t_{i,1} b_i, \dots, \sum_{i=1}^n t_{i,n} b_i\right) \\
 &= \sum_{i_1=1}^n t_{i_1,1} \Delta\left(b_{i_1}, \dots, \sum_{i=1}^n t_{i,n} b_i\right) \\
 &= \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n t_{i_1,1} t_{i_2,2} \Delta\left(b_{i_1}, b_{i_2}, \dots, \sum_{i=1}^n t_{i,n} b_i\right) \\
 &= \dots \\
 &= \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \cdots \sum_{i_n=1}^n t_{i_1,1} t_{i_2,2} \cdots t_{i_n,n} \Delta(b_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_n}).
 \end{aligned}$$

⁶⁴In der j -ten Spalte von T stehen also die Koordinaten von v_j bzgl. der Basis (b_1, \dots, b_n) . Falls die (v_1, \dots, v_n) ebenfalls eine Basis bilden, so ist T die Transformationsmatrix $T = \mathcal{T}_{(b_1, \dots, b_n)}^{(v_1, \dots, v_n)} \in K^{n \times n}$, siehe Definition 20.1.

Da Δ als Determinantenform alternierend ist, gilt $\Delta(b_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_n}) = 0$, sobald zwei der Indizes übereinstimmen. Wir können die Summation daher auf diejenigen Indextupel (i_1, \dots, i_n) beschränken, deren Einträge sämtlich verschieden sind. Mit anderen Worten: Wir beschränken die Summation auf die *Permutationen* der Menge $\{1, \dots, n\}$, also die Elemente der symmetrischen Gruppe S_n , siehe [Definition 7.21](#). Es ergibt sich:

$$= \sum_{\sigma \in S_n} t_{\sigma(1),1} \cdots t_{\sigma(n),n} \Delta(b_{\sigma(1)}, \dots, b_{\sigma(n)}).$$

Da Δ als alternierende Multilinearform schiefssymmetrisch ist, folgt schließlich

$$= \left(\sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) t_{\sigma(1),1} \cdots t_{\sigma(n),n} \right) \Delta(b_1, \dots, b_n),$$

was zu beweisen war. □

Folgerung 23.4 (Determinantenformen sind genau auf Basen nicht Null).

Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K und $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$. Ist Δ eine Determinantenform auf V^n , dann sind äquivalent:

- (i) $\Delta(v_1, \dots, v_n) \neq 0$.
- (ii) (v_1, \dots, v_n) ist eine Basis von V .

Beweis. \neg [Aussage \(ii\)](#) $\Rightarrow \neg$ [Aussage \(i\)](#): Ist (v_1, \dots, v_n) keine Basis von V , dann ist (v_1, \dots, v_n) eine linear abhängige Familie. Aus [Lemma 23.2](#) folgt $\Delta(v_1, \dots, v_n) = 0$.

[Aussage \(ii\)](#) \Rightarrow [Aussage \(i\)](#): Δ ist nach [Definition 23.1](#) nicht die Nullform. Also gibt es eine Familie (b_1, \dots, b_n) mit $\Delta(b_1, \dots, b_n) \neq 0$. Aus [Lemma 23.2](#) folgt, dass (b_1, \dots, b_n) linear unabhängig ist, also eine Basis von V .

Wir wenden nun [Lemma 23.3](#) an mit vertauschten Rollen von (b_1, \dots, b_n) und (v_1, \dots, v_n) , also mit $T := \mathcal{T}_{(v_1, \dots, v_n)}^{(b_1, \dots, b_n)}$. Es gilt also der Zusammenhang

$$\Delta(b_1, \dots, b_n) = \left(\sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) t_{\sigma(1),1} \cdots t_{\sigma(n),n} \right) \Delta(v_1, \dots, v_n),$$

also $\Delta(b_1, \dots, b_n) = \alpha \Delta(v_1, \dots, v_n)$ für ein $\alpha \in K$. Wegen $\Delta(b_1, \dots, b_n) \neq 0$ muss auch $\Delta(v_1, \dots, v_n) \neq 0$ sein. □

Schließlich müssen wir noch zeigen, dass Determinantenformen auf V^n tatsächlich existieren, denn wir haben bisher nur bewiesen, dass eine Determinantenform *notwendigerweise* die Gestalt [\(23.1\)](#) hat. Die Konstruktion benutzte, dass alternierende Formen *notwendigerweise* schiefssymmetrisch sind. Wir müssen uns also noch davon überzeugen, dass [\(23.1\)](#) tatsächlich auch die Bedingungen aus [Definition 23.1](#) erfüllt, vor allem, dass eine solche Form alternierend ist, und zwar auch im Fall $\operatorname{char}(K) = 2$.

Satz 23.5 (Existenzsatz für Determinantenformen).

Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K und $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei (b_1, \dots, b_n) eine Basis von V . Zu jedem $\alpha \in K \setminus \{0\}$ gibt es genau eine Determinantenform auf V^n mit der Eigenschaft $\Delta(b_1, \dots, b_n) = \alpha$. Diese ist durch

$$\Delta(v_1, \dots, v_n) = \left(\sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) t_{\sigma(1),1} \cdots t_{\sigma(n),n} \right) \underbrace{\Delta(b_1, \dots, b_n)}_{=\alpha} \quad (23.2)$$

gegeben, wobei T die durch

$$v_j = \sum_{i=1}^n t_{ij} b_i$$

eindeutig definierte Matrix ist.

Beweis. Wir wissen bereits aus Lemma 23.3, dass eine Determinantenform auf V^n notwendigerweise (23.2) erfüllt, also durch den Wert von $\alpha \in K \setminus \{0\}$ eindeutig bestimmt ist. Zu zeigen ist, dass die durch (23.2) gegebene Form für $\alpha \in K \setminus \{0\}$ tatsächlich die Bedingungen aus Definition 23.1 erfüllt.

Schritt 1: Δ ist n -linear:

Es gilt $v_j = \sum_{i=1}^n t_{ij} b_i$ für $j = 1, \dots, n$. Ersetzen wir also genau einen der Vektoren v_j durch βv_j mit $\beta \in K$, dann wird die Spalte j der Matrix T mit β skaliert. Es folgt

$$\begin{aligned} \Delta(v_1, \dots, \beta v_j, \dots, v_n) &= \left(\sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) t_{\sigma(1),1} \cdots (\beta t_{\sigma(j),j}) \cdots t_{\sigma(n),n} \right) \Delta(b_1, \dots, b_n) \\ &= \beta \left(\sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) t_{\sigma(1),1} \cdots t_{\sigma(n),n} \right) \Delta(b_1, \dots, b_n) \\ &= \beta \Delta(v_1, \dots, v_n). \end{aligned}$$

Es gelte weiterhin $w_j = \sum_{i=1}^n s_{ij} b_i$ für $j = 1, \dots, n$. Ersetzen wir genau einen Vektoren v_j durch $v_j + w_j$, dann wird die j -te Spalte der Matrix T mit der j -ten Spalte der Matrix S addiert. Es folgt

$$\begin{aligned} \Delta(v_1, \dots, v_j + w_j, \dots, v_n) &= \left(\sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) t_{\sigma(1),1} \cdots (t_{\sigma(j),j} + s_{\sigma(j),j}) \cdots t_{\sigma(n),n} \right) \Delta(b_1, \dots, b_n) \\ &= \left(\sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) t_{\sigma(1),1} \cdots t_{\sigma(j),j} \cdots t_{\sigma(n),n} \right) \Delta(b_1, \dots, b_n) \\ &\quad + \left(\sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) t_{\sigma(1),1} \cdots s_{\sigma(j),j} \cdots t_{\sigma(n),n} \right) \Delta(b_1, \dots, b_n) \\ &= \Delta(v_1, \dots, v_j, \dots, v_n) + \Delta(v_1, \dots, w_j, \dots, v_n). \end{aligned}$$

Also ist Δ linear im j -ten Argument.

Schritt 2: Δ ist alternierend:

Wir brauchen nur den Fall $n \geq 2$ zu untersuchen. (**Quizfrage 23.1:** Warum?) Es seien o. B. d. A. $v_1 = v_2$. Wir betrachten die Transposition $\tau := \tau(1, 2) \in S_n$. Die symmetrische Gruppe S_n zerfällt in die zwei disjunkten Nebenklassen A_n (die geraden Permutationen) und

$A_n \circ \tau$ (die ungeraden Permutationen), vgl. [Beispiel 8.18](#). Es ist also $S_n = A_n \cup (A_n \circ \tau)$ eine disjunkte Vereinigung und damit

$$\begin{aligned} \Delta(v_1, \dots, v_n) &= \left(\sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) t_{\sigma(1),1} \cdots t_{\sigma(n),n} \right) \Delta(b_1, \dots, b_n) \\ &= \left(\sum_{\sigma \in A_n} \underbrace{(\operatorname{sgn} \sigma)}_{=1} t_{\sigma(1),1} \cdots t_{\sigma(n),n} + \sum_{\sigma \in A_n \circ \tau} \underbrace{(\operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau))}_{=-1} t_{(\sigma \circ \tau)(1),1} \cdots t_{(\sigma \circ \tau)(n),n} \right) \Delta(b_1, \dots, b_n). \end{aligned}$$

Für Indizes $j \geq 3$ gilt $(\sigma \circ \tau)(j) = \sigma(j)$ und damit $t_{(\sigma \circ \tau)(j),j} = t_{\sigma(j),j}$. Für die ersten zwei Spalten von T gilt $t_{\bullet 1} = t_{\bullet 2}$ und daher

$$t_{(\sigma \circ \tau)(1),1} = t_{\sigma(2),1} = t_{\sigma(2),2} \quad \text{und} \quad t_{(\sigma \circ \tau)(2),2} = t_{\sigma(1),2} = t_{\sigma(1),1}.$$

Das zeigt

$$\begin{aligned} \Delta(v_1, \dots, v_n) &= \left(\sum_{\sigma \in A_n} [t_{\sigma(1),1} \cdots t_{\sigma(n),n} - t_{(\sigma \circ \tau)(1),1} \cdots t_{(\sigma \circ \tau)(n),n}] \right) \Delta(b_1, \dots, b_n) \\ &= \left(\sum_{\sigma \in A_n} \underbrace{[t_{\sigma(1),1} \cdots t_{\sigma(n),n} - t_{\sigma(1),1} \cdots t_{\sigma(n),n}]}_{=0} \right) \Delta(b_1, \dots, b_n) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Das gilt auch im Fall $\operatorname{char}(K) = 2$, also wenn $-1 = 1$ ist. (**Quizfrage 23.2:** Warum?) Also ist Δ alternierend.

Schritt 3: Δ erfüllt $\Delta(b_1, \dots, b_n) = \alpha$, ist also nicht die Nullform:

Diese Aussage ist klar, weil $\alpha \neq 0$ ist. □

§ 23.1 DIE DETERMINANTE EINER MATRIX

Wir betrachten in diesem Abschnitt den Vektorraum $V = K^n$, somit ist $V^n \cong K^{n \times n}$. Wir identifizieren also ein Tupel (a_1, \dots, a_n) von Vektoren in K^n mit der Matrix $A = [a_1 \ \cdots \ a_n]$. Die Determinantenformen auf $K^{n \times n}$ unterscheiden sich nur im Normierungswert $\Delta(b_1, \dots, b_n)$ auf einer Basis (b_1, \dots, b_n) von K^n . Man setzt diesen Wert auf der Standardbasis (e_1, \dots, e_n) auf 1. Dadurch stimmt die durch

$$a_j = \sum_{i=1}^n t_{ij} e_i$$

definierte Koeffizientenmatrix T mit A überein. Das führt auf die folgende Definition.

Definition 23.6 (Determinante einer Matrix).

Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_0$. Die **Determinante** (englisch: **determinant**) einer Matrix $A \in K^{n \times n}$ ist definiert durch die spezielle Determinantenform

$$\det(A) := \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}. \quad (23.3)$$

△

Beachte: Mit dieser Definition können wir die Aussage von [Satz 23.5](#) auch formulieren als $\Delta(v_1, \dots, v_n) = \det(T) \Delta(b_1, \dots, b_n)$.

Die Gleichung [\(23.3\)](#) heißt die **Leibniz-Formel** (englisch: *Leibniz formula*).

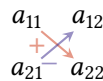
Manche Autoren schreiben statt $\det(A)$ auch $|A|$. Dieser Praxis folgen wir nicht.

Beispiel 23.7 (Determinante einer Matrix).

- (i) Im Fall $n = 0$ ist die Determinante der einzigen (leeren) $n \times n$ -Matrix $\det(A) = 1$. (**Quizfrage 23.3:** Wie folgt das aus [\(23.3\)](#)?)
- (ii) Im Fall $n = 1$ gibt es nur die Permutation $\sigma = \text{id}$. Daher folgt für $A = (a)$ aus [\(23.3\)](#) der Zusammenhang $\det(A) = a$. Die Determinante ist also gerade der einzige Eintrag der Matrix.
- (iii) Im Fall $n = 2$ gibt es zwei Permutationen, $\sigma = \text{id}$ und $\sigma = \tau(1, 2)$. Daher folgt aus [\(23.3\)](#):⁶⁵

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

Grafisch können wir diese Regel wie folgt darstellen:

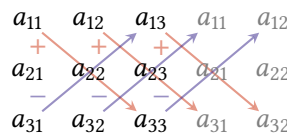


Das Produkt der Hauptdiagonalelemente geht also positiv ein, während das Produkt der Elemente der „Gegendiagonale“ negativ gewichtet wird.

- (iv) Im Fall $n = 3$ gibt es sechs Permutationen. Davon sind drei gerade, nämlich $\sigma = \text{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ und $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, und drei ungerade: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ und $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Das Ausschreiben der Summe in [\(23.3\)](#) ergibt

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{31} a_{12} a_{23} - a_{31} a_{22} a_{13} - a_{21} a_{12} a_{33} - a_{11} a_{32} a_{23}.$$

Grafisch können wir diese sogenannte **Regel von Sarrus** (englisch: *rule of Sarrus*) wie folgt darstellen:



Dabei werden die ersten beiden Spalten der Matrix gedanklich nochmals rechts daneben kopiert, d. h., beim Durchgehen der Diagonalen werden die Einträge in jeder Zeile zyklisch fortgesetzt. Wieder werden die Produkte der Elemente der Haupt- und Nebendiagonalen positiv gewertet, während die Produkte der Elemente in Richtung der „Gegendiagonale“ negativ gewichtet werden.

- (v) Im Fall $n = 4$ gibt es bereits 24 Permutationen und keine einfache Merkregel mehr. △

Um die Determinante einer $n \times n$ -Matrix zu bestimmen, wird man im Normalfall nur für $n \leq 3$ gemäß der Definition [\(23.3\)](#) vorgehen. Für größere Matrizen sehen wir später noch effizientere Möglichkeiten.

⁶⁵Das zweite Klammernpaar lässt man bei Ausdrücken wie $\det \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \right)$ häufig weg und schreibt einfach $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Lemma 23.8 (Eigenschaften der Determinante von Matrizen).

Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_0$. Weiter seien $A, B \in K^{n \times n}$. Die Determinante $\det: K^{n \times n} \rightarrow K$ hat folgende Eigenschaften:

- (i) $\det(A)$ ist eine alternierende Multilinearform auf den Spaltenvektoren $(a_{\bullet 1}, \dots, a_{\bullet n})$ von A .
- (ii) $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$ für alle $\alpha \in K$.
- (iii) $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ ist regulär $\Leftrightarrow \text{Rang}(A) = n \Leftrightarrow (a_{\bullet 1}, \dots, a_{\bullet n})$ ist linear unabhängig.
- (iv) $\det(I) = 1$.
- (v) $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.⁶⁶
- (vi) $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$, falls A invertierbar ist.
- (vii) $\det(A^T) = \det(A)$.

Beweis. Aussage (i): siehe Beweis von Satz 23.5.

Aussage (ii) folgt sofort aus der Multilinearität der Determinante.

Aussage (iii):

$$\begin{aligned} \det(A) \neq 0 & \\ \Leftrightarrow (a_{\bullet 1}, \dots, a_{\bullet n}) \text{ ist linear unabhängig} & \quad \text{nach Folgerung 23.4} \\ \Leftrightarrow \text{Rang}(A) = n & \quad \text{nach Satz 15.12} \\ \Leftrightarrow A \text{ ist regulär} & \quad \text{nach Satz 15.40.} \end{aligned}$$

Aussage (iv): Die Einträge der Einheitsmatrix sind δ_{ij} für $i, j = 1, \dots, n$. Also produziert nur $\sigma = \text{id}$ einen Nicht-Null-Beitrag in der Summe (23.3). Genauer:

$$\det(I) = \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sgn } \sigma) \delta_{\sigma(1),1} \cdots \delta_{\sigma(n),n} = (\text{sgn id}) \delta_{\text{id}(1),1} \cdots \delta_{\text{id}(n),n} = 1.$$

Aussage (v): **Der Beweis dieser Aussage wurde neu formuliert.** Wir schreiben die Matrix B spaltenweise als

$$B = \left[\sum_{i_1=1}^n b_{i_1,1} e_{i_1} \quad \cdots \quad \sum_{i_n=1}^n b_{i_n,n} e_{i_n} \right].$$

Dann gilt nach Definition des Matrix-Matrix-Produkts

$$\begin{aligned} AB &= \left[\sum_{i_1=1}^n A b_{i_1,1} e_{i_1} \quad \cdots \quad \sum_{i_n=1}^n A b_{i_n,n} e_{i_n} \right] \\ &= \left[\sum_{i_1=1}^n b_{i_1,1} A e_{i_1} \quad \cdots \quad \sum_{i_n=1}^n b_{i_n,n} A e_{i_n} \right]. \end{aligned}$$

Daher gilt für die Determinante unter Verwendung der Multilinearität

$$\det(AB) = \det \left(\sum_{i_1=1}^n b_{i_1,1} A e_{i_1} \quad \cdots \quad \sum_{i_n=1}^n b_{i_n,n} A e_{i_n} \right)$$

⁶⁶Die Determinante ist also ein Monoidhomomorphismus vom Monoid $(K^{n \times n}, \cdot)$ in das Monoid (K, \cdot) .

$$= \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_n=1}^n b_{i_1,1} \cdots b_{i_n,n} \det(A e_{i_1} \cdots A e_{i_n}).$$

Wie im Beweis von [Lemma 23.3](#) können wir die Summation auf diejenigen Indextupel (i_1, \dots, i_n) beschränken, deren Einträge sämtlich verschieden sind:

$$\begin{aligned} &= \sum_{\sigma \in S_n} b_{\sigma(1),1} \cdots b_{\sigma(n),n} \det(A e_{i_1} \cdots A e_{i_n}) \\ &= \underbrace{\sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) b_{\sigma(1),1} \cdots b_{\sigma(n),n}}_{\det(B)} \underbrace{\det(A e_1 \cdots A e_n)}_{\det(A)} \\ &= \det(A) \det(B) \end{aligned}$$

Aussage (vi): Es sei A invertierbar, dann folgt aus [Aussage \(iii\)](#) und [Aussage \(iv\)](#)

$$1 = \det(I) = \det(A A^{-1}) = \det(A) \det(A^{-1})$$

und damit die Behauptung.

Aussage (vii): Es gilt

$$\begin{aligned} \det(A^T) &= \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)} && \text{nach der Leibniz-Formel (23.3)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{\sigma^{-1}(1),1} \cdots a_{\sigma^{-1}(n),n} && \text{durch Umsortieren der Faktoren} \\ &= \sum_{\tau \in S_n} (\operatorname{sgn} \tau^{-1}) a_{\tau(1),1} \cdots a_{\tau(n),n} && \text{durch Ersetzen von } \tau := \sigma^{-1} \\ &= \sum_{\tau \in S_n} (\operatorname{sgn} \tau) a_{\tau(1),1} \cdots a_{\tau(n),n} && \text{wegen } \operatorname{sgn} \tau = \operatorname{sgn} \tau^{-1}, \text{ siehe Folgerung 7.30} \\ &= \det(A). \end{aligned}$$

(Quizfrage 23.4: Warum durfte die Summation über $\sigma \in S_n$ durch die Summation über $\tau \in S_n$ ersetzt werden?) □

Lemma 23.9 (ähnliche Matrizen haben dieselben Determinante).

Es sei K ein Körper und $A, \widehat{A} \in K^{n \times n}$ mit $n \in \mathbb{N}_0$. Sind A und \widehat{A} ähnlich, dann gilt $\det(A) = \det(\widehat{A})$.

Beweis. Sind A und \widehat{A} , dann gibt es eine invertierbare Matrix $T \in K^{n \times n}$ mit

$$\widehat{A} = T A T^{-1}.$$

Mit [Lemma 23.8](#) folgt

$$\begin{aligned} \det(\widehat{A}) &= \det(T) \det(A) \det(T^{-1}) \\ &= \det(T) \det(A) \det(T)^{-1} \\ &= \det(A). \end{aligned}$$

□

Wie kann nun die Determinante einer Matrix effizienter berechnet werden als mit Hilfe der [Definition 23.6](#)? Wir geben dazu mehrere Resultate an.

Lemma 23.10 (Determinante einer Dreiecksmatrix).

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ mit $n \in \mathbb{N}_0$.

(i) Ist $A \in K_{\nabla}^{n \times n}$ oder $A \in K_{\searrow}^{n \times n}$, dann gilt

$$\det(A) = a_{11} \cdots a_{nn}. \quad (23.4)$$

(ii) Ist A eine obere oder untere Blockdreiecksmatrix, also $A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ bzw. $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$, dann gilt

$$\det(A) = \det(A_{11}) \det(A_{22}). \quad (23.5)$$

Beweis. Der Beweis ist Gegenstand von [Hausaufgabe II-5.1](#). □

Aufgrund des vorherigen Lemmas ist es nützlich, eine Matrix z. B. durch Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform (also obere Dreiecksgestalt) zu bringen, um ihre Determinante zu berechnen. Wir betrachten zu diesem Zweck die elementaren Zeilenumformungen aus [§ 15.3](#):

Typ I:

$$\text{Für } D := \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \alpha & \\ & & & 1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \text{ gilt } \det(D) = \alpha.$$

Typ II:

$$\text{Für } S := \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \alpha & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \text{ gilt } \det(S) = 1.$$

Typ III:

$$\text{Für } T := \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 0 & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \\ & & 1 & & & 0 \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \text{ gilt } \det(T) = -1.$$

Bei der Berechnung der Zeilenstufenform multiplizieren wir wiederholt die betrachtete Matrix A von links mit Matrizen vom Typ II oder III. (**Quizfrage 23.5:** Wofür braucht man nochmal die Matrizen vom Typ I?) Bei jedem Zeilentausch (Typ III) ändert sich dabei die Determinante um den Faktor -1 . Wir müssen uns also nur merken, ob wir eine gerade oder ungerade Anzahl von Zeilentauschvorgängen durchgeführt haben.

Beispiel 23.11 (Berechnung der Determinante durch elementare Zeilenumformungen).

(i) Wir berechnen die Determinante von $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, die wir als Matrix über dem Körper \mathbb{Z}_5 auffassen, vgl. **Beispiel 16.7**. Wir bringen A dazu auf Zeilenstufenform:

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \end{array} & \rightsquigarrow & \begin{array}{c} \star \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \\
 & & \text{Tauschen der Zeilen 1 und 2} \\
 \\
 \begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \star \\ \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \end{array} & \rightsquigarrow & \begin{array}{c} \star \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \\
 & & \text{Erzeugen von Nullen} \\
 & & \text{unterhalb des Pivot-Elements} \\
 \\
 \begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \star \\ \begin{array}{c} \star \\ \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \end{array} \end{array} & \rightsquigarrow & \begin{array}{c} \star \\ \star \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \\
 & & \text{Tauschen der Zeilen 2 und 3} \\
 \\
 \begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \star \\ \star \\ \star \\ \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \end{array} & \rightsquigarrow & \begin{array}{c} \star \\ \star \\ \star \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \\
 & & \text{Erzeugen von Nullen} \\
 & & \text{unterhalb des Pivot-Elements}
 \end{array}$$

Die Determinante der letzten Matrix ist nach **Lemma 23.10** das Produkt der Diagonalelemente, also $1 \cdot 3 \cdot 2 = 1$ in \mathbb{Z}_5 . Da wir auf dem Weg dahin zweimal Zeilen getauscht haben, gilt auch $\det(A) = 1$.

(ii) Wir betrachten jetzt die modifizierte Matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$:

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \end{array} & \rightsquigarrow & \begin{array}{c} \star \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \\
 & & \text{Tauschen der Zeilen 1 und 2} \\
 \\
 \begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \star \\ \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \end{array} & \rightsquigarrow & \begin{array}{c} \star \\ \star \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \\
 & & \text{Erzeugen von Nullen} \\
 & & \text{unterhalb des Pivot-Elements}
 \end{array}$$

An dieser Stelle können wir die Rechnung beenden, weil ein Pivot-Element nicht auf der Diagonalen steht. Damit gilt $\text{Rang}(A) < n = 3$, also $\det(A) = 0$ (**Lemma 23.8**). △

Definition 23.12 (Streichungsmatrix, Minoren, Kofaktoren und Adjunkte).

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Weiter seien $1 \leq i, j \leq n$.

(i) Die **Streichungsmatrix** von A bzgl. des Index (i, j) ist diejenige $(n - 1) \times (n - 1)$ -Untermatrix, die aus A durch Weglassen der i -ten Zeile und der j -ten Spalte entsteht, also

$$(A)_{\neq i, \neq j} := \begin{bmatrix} a_{1,1} & \text{---} & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \text{---} & a_{1,n} \\ | & & | & | & & | \\ a_{i-1,1} & \text{---} & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \text{---} & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \text{---} & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \text{---} & a_{i+1,n} \\ | & & | & | & & | \\ a_{n,1} & \text{---} & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \text{---} & a_{n,n} \end{bmatrix}. \tag{23.6}$$

(ii) Die **Unterdeterminante** (englisch: **subdeterminant**) oder der **Minor** (englisch: **minor**) von A bzgl. des Index (i, j) ist die Determinante der zugehörigen Streichungsmatrix, also⁶⁷

$$[A]_{ij} := \det((A)_{\neq i, \neq j}) = \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad (23.7)$$

(iii) Die Größe

$$\tilde{a}_{ij} := (-1)^{i+j} [A]_{ij} \quad (23.8)$$

heißt der **Kofaktor** (englisch: **cofactor**) der Matrix A bzgl. des Index (i, j) . Die Matrix $\text{cof}(A) := (\tilde{a}_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ heißt die **Kofaktormatrix** (englisch: **cofactor matrix**) von A .

(iv) Die **Adjunkte** (englisch: **adjugate matrix, adjunct matrix**) von A oder die zu A **komplementäre Matrix** ist die Transponierte der Kofaktormatrix:

$$\text{adj}(A) := \text{cof}(A)^T. \quad (23.9)$$

△

Für die Kofaktoren \tilde{a}_{ij} gibt es eine gleichwertige alternative Definition, bei der die Zeile i und Spalte j (oder auch nur die Spalte j) ersetzt werden, statt sie zu streichen:

Lemma 23.13 (alternative Definition der Kofaktoren).

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Für die Kofaktoren von A gilt

$$\tilde{a}_{ij} = \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \uparrow j\text{-te Spalte} \end{matrix} \quad (23.10a)$$

$$= \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & 1 & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \uparrow j\text{-te Spalte} \end{matrix} \quad (23.10b)$$

$$= \det(a_{\bullet 1}, \dots, a_{\bullet j-1}, e_i, a_{\bullet j+1}, \dots, a_{\bullet n}). \quad (23.10c)$$

⁶⁷Für Minoren gibt es in der Literatur keine einheitliche Notation.

Beweis. Durch $i - 1$ Vertauschungen benachbarter Zeilen (durch Multiplikation mit Elementarmatrizen vom Typ III von links) und $j - 1$ Vertauschungen benachbarter Spalten (durch Multiplikation mit Elementarmatrizen vom Typ III von rechts) kann die Matrix in (23.10a) auf die Gestalt

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

gebracht werden, deren Determinante nach (23.5) gleich $[A]_{ij}$ ist. Durch die Zeilen- und Spaltenvertauschungen kommt der Faktor $(-1)^{i+j}$ hinzu. Also ist die Determinante der Matrix in (23.10a) gleich $(-1)^{i+1} [A]_{ij}$, was nach (23.8) die Definition des Kofaktors \tilde{a}_{ij} bzgl. des Index (i, j) ist.

Die Matrix in (23.10a) geht dadurch aus (23.10b) hervor, dass geeignete Vielfache der j -ten Spalte zu den anderen Spalten addiert werden. Dadurch ändert sich die Determinante nicht. Also gilt die Gleichheit von (23.10b) und (23.10a).

Die Übereinstimmung von (23.10c) und (23.10b) ist klar. □

Beispiel 23.14 (Streichungsmatrix, Minoren, Kofaktoren und Adjunkte).

Die Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ hat die Kofaktoren

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{11} &= (-1)^2 [A]_{11} = 4 && \text{oder nach (23.10a)} && \tilde{a}_{11} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 4 \\ \tilde{a}_{12} &= (-1)^3 [A]_{12} = -3 && \text{oder nach (23.10a)} && \tilde{a}_{12} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = -3 \\ \tilde{a}_{21} &= (-1)^3 [A]_{21} = -2 && \text{oder nach (23.10a)} && \tilde{a}_{21} = \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -2 \\ \tilde{a}_{22} &= (-1)^4 [A]_{22} = 1 && \text{oder nach (23.10a)} && \tilde{a}_{22} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1. \end{aligned}$$

Die Kofaktormatrix von A ist daher $\text{cof}(A) = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, und die Adjunkte von A ist $\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$. △

Lemma 23.15 (Bedeutung der Adjunkten).

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$\text{adj}(A) A = A \text{adj}(A) = \det(A) I. \tag{23.11}$$

Beachte: Bis auf den Faktor $\det(A)$ ist die Adjunkte also die Inverse von A .

Beweis. Wir betrachten den Eintrag (i, k) der Matrix $B := \text{adj}(A) A$. Es gilt

$$\begin{aligned}
 b_{ik} &= \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ji} a_{jk} && \text{nach Definition des Matrix-Matrix-Produkts} \\
 &= \sum_{j=1}^n a_{jk} \det(a_{\bullet 1}, \dots, a_{\bullet i-1}, e_j, a_{\bullet i+1}, \dots, a_{\bullet n}) && \text{nach (23.10c)} \\
 &= \det(a_{\bullet 1}, \dots, a_{\bullet i-1}, \sum_{j=1}^n a_{jk} e_j, a_{\bullet i+1}, \dots, a_{\bullet n}) && \text{wegen der Multilinearität der Determinante} \\
 &= \det(a_{\bullet 1}, \dots, a_{\bullet i-1}, a_{\bullet k}, a_{\bullet i+1}, \dots, a_{\bullet n}).
 \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist gleich 0, wenn $i \neq k$ ist, weil sich dann einer der Vektoren wiederholt und die Determinante alternierend ist. Wenn jedoch $i = k$ gilt, dann ist der Ausdruck gleich $\det(A)$. Das bedeutet $B = \text{adj}(A) A = \det(A) I$.

Die zweite Behauptung $\text{adj}(A) A = \det(A) I$ folgt, weil $\frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$ als Linksinverse von A gleichzeitig auch Rechtsinverse von A ist, siehe Satz 15.42. \square

Beispiel 23.16 (Inverse einer 2×2 -Matrix).

Die Inverse einer invertierbaren 2×2 -Matrix über einem Körper K

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

ist gegeben durch $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$, also durch

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}. \quad \triangle$$

Neben der Transformation auf Zeilenstufenform (Beispiel 23.11) gibt es eine weitere Möglichkeit, Determinanten zu berechnen. Diese bietet sich insbesondere dann an, wenn in einer Zeile oder in einer Spalte der Matrix viele Nulleinträge stehen.

Satz 23.17 (Entwicklungssatz von Laplace⁶⁸).

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:

Entwicklung nach der i -ten Zeile (englisch: expansion by the i -th row):

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det((A)_{\neq i, \neq j}) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} [A]_{ij}. \quad (23.12a)$$

Entwicklung nach der j -ten Spalte (englisch: expansion by the j -th column):

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det((A)_{\neq i, \neq j}) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} [A]_{ij}. \quad (23.12b)$$

⁶⁸englisch: Laplace expansion theorem

Beweis. Nach Lemma 23.15 gilt $\det(A) I = A \operatorname{adj}(A)$. Für $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ist daher

$$\begin{aligned} \det(A) &= (A \operatorname{adj}(A))_{ii} \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij} \operatorname{adj}(A)_{ji} && \text{nach Definition der Matrix-Matrix-Multiplikation} \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij} \operatorname{cof}(A)_{ij} && \text{nach Definition (23.9) der Adjunkte} \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} \det((A)_{\neq i, \neq j}) && \text{nach Definition (23.8) des Kofaktors} \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} [A]_{ij} && \text{nach Definition (23.7) des Minors } [A]_{ij}. \end{aligned}$$

Damit ist (23.12a) gezeigt. (23.12b) folgt analog. □

Beispiel 23.18 (Entwicklungssatz von Laplace).

Wir betrachten die Matrix $A \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir entwickeln die Determinante nach der zweiten Spalte ($j = 2$), weil dort zumindest eine Null auftaucht:⁶⁹

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{i=1}^3 (-1)^{i+2} a_{i2} \det((A)_{\neq i, \neq 2}) \\ &= -a_{12} \det((A)_{\neq 1, \neq 2}) + a_{22} \det((A)_{\neq 2, \neq 2}) - a_{32} \det((A)_{\neq 3, \neq 2}) \\ &= -2 \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} + 1 \det \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} - 0 \det \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -2(-1+4) + 1(-2+12) + 0 \\ &= -6 + 10 \\ &= 4. \end{aligned}$$

△

Wir schließen diesen Abschnitt mit der Cramerschen Regel, die es erlaubt, einzelne Einträge des Lösungsvektors eines linearen Gleichungssystems zu bestimmen, was mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren aus § 16 nicht möglich ist.

Satz 23.19 (Cramersche Regel⁷⁰).

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei $b \in K^n$. Ist A invertierbar, dann gilt für die Koordinaten der eindeutigen Lösung $x \in K^n$ des linearen Gleichungssystems $Ax = b$

$$x_i = \frac{\det(a_{\bullet 1}, \dots, a_{\bullet i-1}, b, a_{\bullet i+1}, \dots, a_{\bullet n})}{\det(A)} \quad \text{für } i = 1, \dots, n. \tag{23.13}$$

⁶⁹Alternative: Entwicklung nach der dritten Zeile ($i = 3$)

⁷⁰englisch: Cramer's rule

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} x &= A^{-1}b \\ &= \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) b && \text{nach Lemma 23.15,} \\ \text{also } x_i &= \frac{1}{\det(A)} \sum_{j=1}^n (\operatorname{adj}(A))_{ij} b_j. \end{aligned}$$

Für die Einträge der Adjunkten gilt weiter

$$\begin{aligned} \operatorname{adj}(A)_{ij} &= \tilde{a}_{ji} && \text{nach Definition der Adjunkten (23.9)} \\ &= \det(a_{\bullet 1}, \dots, a_{\bullet i-1}, e_j, a_{\bullet i+1}, \dots, a_{\bullet n}) && \text{nach (23.10c).} \end{aligned}$$

Setzen wir diese Beziehung oben ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{1}{\det(A)} \sum_{j=1}^n (\operatorname{adj}(A))_{ij} b_j \\ &= \frac{1}{\det(A)} \sum_{j=1}^n \det(a_{\bullet 1}, \dots, a_{\bullet i-1}, e_j, a_{\bullet i+1}, \dots, a_{\bullet n}) b_j \\ &= \frac{1}{\det(A)} \det(a_{\bullet 1}, \dots, a_{\bullet i-1}, b, a_{\bullet i+1}, \dots, a_{\bullet n}). \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit gilt wegen der Multilinearität der Determinante. □

Beispiel 23.20 (Cramersche Regel).

Wir betrachten das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

über dem Körper \mathbb{Q} . Es gilt $\det(A) = 4$, die Matrix A ist also regulär.

Wir bestimmen die Lösung des Gleichungssystems mittels Cramerscher Regel:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\det(A)} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} (1 - 4) = -\frac{3}{4} \\ x_2 &= \frac{1}{\det(A)} \det \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} (-4 - 4 + 24 + 1) = \frac{17}{4} \\ x_3 &= \frac{1}{\det(A)} \det \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} (-16 + 4) = -3. \end{aligned}$$

Wir erhalten also die Lösung $x = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 \\ 17 \\ -12 \end{pmatrix}$. △

Die Cramersche Regel ist zur praktischen Lösung linearer Gleichungssysteme (oder zur Bestimmung einiger Koordinaten des Lösungsvektors) nur für geringe Dimensionen geeignet oder aber dann, wenn die Koeffizientenmatrix A in einer Zeile oder Spalte viele Nulleinträge aufweist, sodass die benötigten Determinanten günstig mit Hilfe des [Laplaceschen Entwicklungssatzes 23.17](#) berechnet werden können. Abseits dieser Fälle findet die Cramersche Regel auch als Mittel in Beweisen weitere Anwendung.

Ende der Vorlesung 10

Ende der Woche 5

§ 23.2 DIE DETERMINANTE EINES ENDOMORPHISMUS

Wir kommen zurück zu der eingangs von § 23 angeführten Motivation, die Determinante als Maßzahl für Endomorphismen $f \in \text{End}(V)$ einzuführen.

Definition 23.21 (Determinante auf dem Raum $\text{End}(V)$ der Endomorphismen).

Es seien K ein Körper und V ein Vektorraum über K mit Basis $B_V = (v_1, \dots, v_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Die **Determinante** eines Endomorphismus $f \in \text{End}(V)$ ist definiert als

$$\det(f) := \det(A) \tag{23.14}$$

für die Darstellungsmatrix $A = \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f)$. △

Es stellt sich sofort die Frage, ob die Determinante eines Endomorphismus wohldefiniert ist, also für jede Wahl der Basis B_V von V übereinstimmt. Das ist aber der Fall, denn ist \widehat{B}_V eine weitere Basis von V , dann gilt nach [Satz 20.12](#) für die Darstellungsmatrix $\widehat{A} = \mathcal{M}_{\widehat{B}_V}^{\widehat{B}_V}(f)$

$$\widehat{A} = T A T^{-1}$$

mit der Transformationsmatrix $T = \mathcal{T}_{\widehat{B}_V}^{B_V}$. Da A und \widehat{A} ähnliche Matrizen sind, folgt $\det(A) = \det(\widehat{A})$ aus [Lemma 23.9](#). Daher ist tatsächlich unerheblich, welche Basis für die Darstellungsmatrix in der Definition (23.14) der Determinante eines Endomorphismus verwendet wird.

Lemma 23.22 (Eigenschaften der Determinante für Endomorphismen, vgl. [Lemma 23.8](#)).

Es seien K ein Körper und V ein Vektorraum über K mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$. Weiter seien $f, g \in \text{End}(f)$. Die Determinante $\det: \text{End}(f) \rightarrow K$ hat folgende Eigenschaften:

- (i) $\det(\alpha f) = \alpha^n \det(f)$ für alle $\alpha \in K$.
- (ii) $\det(f) \neq 0 \Leftrightarrow f$ ist invertierbar $\Leftrightarrow \text{Rang}(f) = n \Leftrightarrow$ Jede Darstellungsmatrix von f ist invertierbar.
- (iii) $\det(\text{id}_V) = 1$.
- (iv) $\det(f \circ g) = \det(f) \det(g)$.
- (v) $\det(f^{-1}) = 1/\det(f)$, falls f invertierbar ist.
- (vi) $\det(f^*) = \det(f)$ für die zu f duale Abbildung $f^* \in \text{End}(V^*)$.

Beachte: Statt „ f ist invertierbar“ können wir auch „ f ist ein Automorphismus“, also „ $f \in \text{Aut}(V)$ “ schreiben.

Beweis. Der Beweis ist Gegenstand von [Hausaufgabe II-6.1](#). □

§ 23.3 ORIENTIERUNG EINES VEKTORRAUMES

Für den Begriff der Orientierung benötigen wir zunächst den Begriff des geordneten Körpers. Dabei handelt es sich um einen Körper mit einer Totalordnung, die in gewissem Sinne mit den Verknüpfungen der Körpers verträglich ist.

Definition 23.23 (geordneter Körper).

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und \leq eine Totalordnung auf K .

(i) Der Körper heißt **geordnet** (englisch: **ordered field**) bzgl. der Totalordnung \leq , wenn gilt:

$$\alpha \leq \beta \quad \Rightarrow \quad \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma \quad (23.15a)$$

$$\alpha \geq 0 \text{ und } \beta \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha \cdot \beta \geq 0 \quad (23.15b)$$

jeweils für $\alpha, \beta, \gamma \in K$.

(ii) $\alpha \in K$ heißt **nichtnegativ**, wenn $\alpha \geq 0$ ist.

(iii) $\alpha \in K$ heißt **positiv**, wenn $\alpha \geq 0$ und $\alpha \neq 0$ ist.

(iv) $\alpha \in K$ heißt **nichtpositiv**, wenn $\alpha \leq 0$ ist.

(v) $\alpha \in K$ heißt **negativ**, wenn $\alpha \leq 0$ und $\alpha \neq 0$ ist. △

Lemma 23.24 (Rechenregeln in geordneten Körpern).

Es sei $(K, +, \cdot)$ mit der Totalordnung \leq ein geordneter Körper. Dann gilt für $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in K$:

$$(i) \quad \alpha \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\alpha \leq 0$$

$$(ii) \quad \alpha \leq \beta \text{ und } \gamma \leq \delta \quad \Rightarrow \quad \alpha + \gamma \leq \beta + \delta$$

$$(iii) \quad \alpha \leq \beta \text{ und } \gamma \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha \gamma \leq \beta \gamma$$

$$(iv) \quad \alpha \leq \beta \text{ und } \gamma \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \beta \gamma \leq \alpha \gamma$$

$$(v) \quad \alpha^2 \geq 0$$

$$(vi) \quad \alpha \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 > 0$$

$$(vii) \quad \alpha > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\alpha} > 0$$

$$(viii) \quad \beta > \alpha > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta} > 0$$

(ix) $n \cdot 1 > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, insbesondere hat K notwendig $\text{char}(K) = 0$.

Beweis. Aussage (i):

$$\begin{aligned} \alpha \geq 0 &\quad \Rightarrow \quad 0 = \alpha + (-\alpha) \geq -\alpha \\ \text{und } -\alpha \leq 0 &\quad \Rightarrow \quad 0 = -\alpha + \alpha \leq \alpha. \end{aligned}$$

Aussage (ii):

$$\begin{aligned} \alpha \leq \beta &\quad \Rightarrow \quad \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma \\ \text{und } \gamma \leq \delta &\quad \Rightarrow \quad \beta + \gamma \leq \beta + \delta. \end{aligned}$$

Transitivität zeigt, dass dann auch $\alpha + \gamma \leq \beta + \delta$ gilt.

Aussage (iii):

$$\begin{aligned}
 & \alpha \leq \beta \\
 \Rightarrow & \beta - \alpha \geq 0 \\
 \Rightarrow & (\beta - \alpha) \gamma \geq 0 \\
 \Rightarrow & \beta \gamma - \alpha \gamma \geq 0 \\
 \Rightarrow & \alpha \gamma \leq \beta \gamma.
 \end{aligned}$$

Aussage (iv): Wegen Aussage (i) ist $-\gamma \geq 0$. Aus Aussage (iii) folgt $\alpha(-\gamma) \leq \beta(-\gamma)$, also $\beta \gamma \leq \alpha \gamma$.

Aussage (v): Nehmen wir zunächst $\alpha \geq 0$ an. Es folgt $\alpha^2 = \alpha \cdot \alpha \geq 0$. Im Fall $\alpha \leq 0$ ist $-\alpha \geq 0$. Es folgt $\alpha^2 = (-\alpha) \cdot (-\alpha) \geq 0$.

Aussage (vi): Die Behauptung folgt aus der Nullteilerfreiheit des Körpers K .

Aussage (vii): Wegen $\alpha > 0$ ist $\alpha \neq 0$, also multiplikativ invertierbar. Das Inverse $\frac{1}{\alpha}$ ist ebenfalls $\neq 0$. Die Annahme $\frac{1}{\alpha} < 0$ würde $1 = \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} < 0$ ergeben. Andererseits ist aber $1 = 1 \cdot 1 > 0$ nach Aussage (vi), Widerspruch. Also muss $\frac{1}{\alpha} > 0$ gelten.

Aussage (viii):

$$\begin{aligned}
 & \beta > \alpha > 0 \\
 \Rightarrow & 1 > \frac{\alpha}{\beta} > 0 \quad \text{wegen } \frac{1}{\beta} > 0 \text{ nach Aussage (vii)} \\
 \Rightarrow & \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta} > 0 \quad \text{wegen } \frac{1}{\alpha} > 0 \text{ nach Aussage (vii)}
 \end{aligned}$$

Aussage (ix): Aus Aussage (vi) folgt $1 > 0$. Es folgt weiter $1 + 1 > 1 + 0 = 1 > 0$. Induktiv zeigt man $n \cdot 1 > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Folglich ist $n \cdot 1 \neq 0$ für all $n \in \mathbb{N}$, d. h., $\text{char}(K) = 0$. \square

Beispiel 23.25 (geordneter Körper).

- (i) Die rationalen Zahlen \mathbb{Q} mit der bekannten Totalordnung bilden einen geordneten Körper.
- (ii) Die reellen Zahlen \mathbb{R} mit der bekannten Totalordnung bilden einen geordneten Körper.
- (iii) Die komplexen Zahlen \mathbb{C} sind mit keiner Totalordnung ein geordneter Körper, da $i^2 = -1$ den Aussagen (i) und (vi) aus Lemma 23.24 widerspricht. \triangle

Definition 23.26 (orientierungstreuer Endomorphismus).

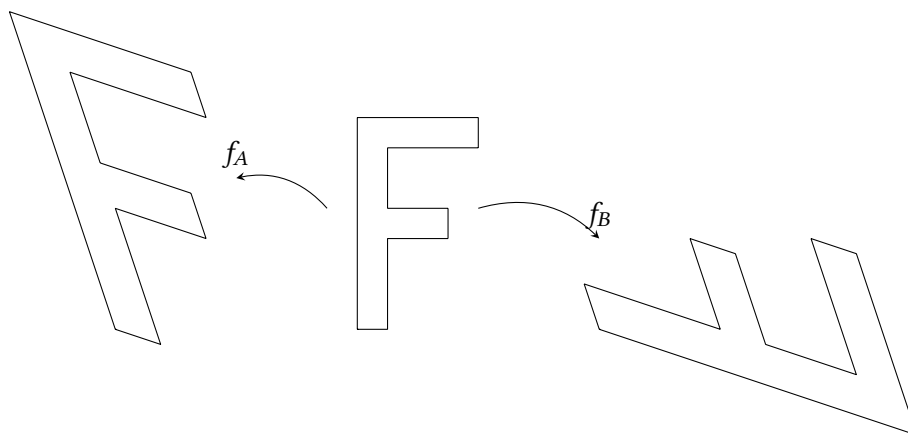
Es seien K ein geordneter Körper und V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K . Ein Automorphismus $f \in \text{Aut}(V)$ heißt **orientierungstreu** oder **orientierungserhaltend** (englisch: **orientation preserving**) im Fall $\det(f) > 0$ und **orientierungsuntreu** oder **orientierungsumkehrend** (englisch: **orientation reversing**) im Fall $\det(f) < 0$. \triangle

Beispiel 23.27 (orientierungstreuer Endomorphismus).

Wir betrachten die durch die Matrizen

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

induzierten Automorphismen auf dem Vektorraum \mathbb{R}^2 . Es gilt $\det(A) = 2 > 0$ und $\det(B) = -2 < 0$. Die Wirkung der orientierungstreuen Abbildung f_A und der orientierungsumkehrenden Abbildung f_B auf Punkte, die den Umriss des Buchstabens „F“ ergeben, zeigt folgende Abbildung:



△

Definition 23.28 (gleichorientierte Basen).

Es seien K ein geordneter Körper und V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K .

- (i) Zwei Basen $B_V = (v_1, \dots, v_n)$ und $\widehat{B}_V = (\widehat{v}_1, \dots, \widehat{v}_n)$ heißen **gleich orientiert** (englisch: **equally oriented**), wenn die Transformationsmatrix $T = \mathcal{T}_{\widehat{B}_V}^{B_V}$ die Bedingung $\det(T) > 0$ erfüllt.
- (ii) Zwei Basen $B_V = (v_1, \dots, v_n)$ und $\widehat{B}_V = (\widehat{v}_1, \dots, \widehat{v}_n)$ heißen **umgekehrt orientiert** (englisch: **differently oriented**), wenn die Transformationsmatrix $T = \mathcal{T}_{\widehat{B}_V}^{B_V}$ die Bedingung $\det(T) < 0$ erfüllt.

△

Lemma 23.29 (Gleichorientierung ist Äquivalenzrelation).

Es seien K ein geordneter Körper und V ein Vektorraum über K mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$. Gleichorientierung ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Basen von V .

Beweis. Jede Basis ist zu sich selbst gleich orientiert, da die Transformationsmatrix dann die Einheitsmatrix ist und $\det(I) = 1 > 0$ gilt. Das ist die Reflexivität der Gleichorientierung. Die Symmetrie folgt, da mit $T = \mathcal{T}_{\widehat{B}_V}^{B_V}$ und $\det(T) > 0$ auch $T^{-1} = \mathcal{T}_{B_V}^{\widehat{B}_V}$ die Bedingung $\det(T^{-1}) = \det(T)^{-1} > 0$ erfüllt. Schließlich folgt die Transitivität aus der Tatsache, dass die Determinante des Produkts von Matrizen das Produkt der Determinanten ist. □

Beachte: Es gibt (für $n \geq 1$) genau zwei Äquivalenzklassen, da $\text{char}(K) \neq 2$ gilt.

Jede der beiden Äquivalenzklassen von Basen eines Vektorraumes V mit $\dim(V) \in \mathbb{N}$ über einem geordneten Körper K wird als eine **Orientierung** (englisch: **orientation**) des Vektorraumes V bezeichnet. Oft wird eine der beiden die **positive Orientierung** (englisch: **positive orientation**) und die andere die **negative Orientierung** (englisch: **negative orientation**) des Vektorraumes genannt. Die Festlegung, welche welche ist, ist allerdings willkürlich, also nicht kanonisch.

Kapitel 5 Normalformen von Endomorphismen

§ 24 GRUNDLAGEN ZU EIGENWERTEN UND EIGENVEKTOREN

Literatur: Fischer, Springborn, 2020, Kapitel 5, Bosch, 2014, Kapitel 6

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K .

Zur Erinnerung: Ein Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ heißt ein **Eigenvektor** zum **Eigenwert** $\lambda \in K$ des Endomorphismus $f \in \text{End}(V)$, wenn $f(v) = \lambda v$ gilt. In diesem Fall heißt $(\lambda, v) \in K \times (V \setminus \{0\})$ auch ein **Eigenpaar** von f , siehe Definition 20.19. Ebenso heißt ein Vektor $x \in K^n \setminus \{0\}$ ein **Eigenvektor** zum **Eigenwert** $\lambda \in K$ der Matrix $A \in K^{n \times n}$, wenn $Ax = \lambda x$ gilt. In diesem Fall heißt $(\lambda, v) \in K \times (K^n \setminus \{0\})$ auch ein **Eigenpaar** von A , siehe Definition 20.19.

Wir erinnern auch an die Frage aus § 20, welche Wahl der Basis in einem endlich-dimensionalen Vektorraum V dazu führt, dass die Darstellungsmatrix $A = \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f)$ eines Endomorphismus $f \in \text{End}(V)$ eine möglichst einfache Struktur hat. Mit anderen Worten, wir suchen nach einer Normalform der Darstellungsmatrizen von Endomorphismen. Wir hatten gesehen, dass dabei f -invariante Unterräume eine wesentliche Rolle spielen, also Unterräume $U \subseteq V$ mit der Eigenschaft $f(U) \subseteq U$. Eindimensionale f -invariante Unterräume sind genau diejenigen, die jeweils durch einen Eigenvektor aufgespannt werden.

Die Diagonalisierbarkeit von f führt auf den einfachsten Fall einer Darstellungsmatrix. Ein Endomorphismus eines Vektorraumes V mit $\dim(V) = n$ heißt **diagonalisierbar** (Definition 20.23), wenn es f -invariante Unterräume U_1, \dots, U_n der Dimension 1 gibt, sodass $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_n$ gilt. Es stellt sich die Frage, wann dieser Fall eintritt, also die Frage nach einem Diagonalisierbarkeitskriterium.

Nach Satz 20.24 ist ein Endomorphismus genau dann diagonalisierbar, wenn V eine Basis besitzt, die nur aus Eigenvektoren von f besteht. Das ist wiederum genau dann der Fall, wenn eine (und damit alle) Darstellungsmatrizen A von f ähnlich zu einer Diagonalmatrix (nämlich zur Diagonalmatrix mit den Eigenwerten) ist:

$$X^{-1}AX = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} =: D \quad (24.1a)$$

oder äquivalent

$$AX = X \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} = XD. \quad (24.1b)$$

Spaltenweise gelesen bedeutet die Gleichung (24.1b), dass die j -te Spalte der Matrix

$$X = [x_{\bullet 1} \quad \dots \quad x_{\bullet n}] \in K^{n \times n}$$

ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_j der Matrix $A \in K^{n \times n}$ ist. Ist $A = \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f)$ die Darstellungsmatrix von f bzgl. der Basis $B_V = (v_1, \dots, v_n)$, dann ist nach [Lemma 20.20](#)

$$\Phi_{B_V}(x_{\bullet j}) = \sum_{i=1}^n x_{ij} v_i \quad (24.1c)$$

ein Eigenvektor von f zum Eigenwert λ_j . Die Spalten von X enthalten also die Koordinaten der Eigenvektoren bzgl. der Basis B_V .

Wir untersuchen zunächst die Bedeutung paarweise verschiedener Eigenwerte.

Satz 24.1 (paarweise verschiedene Eigenwerte).

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K . Weiter sei $f \in \text{End}(V)$.

- (i) Ist $k \in \mathbb{N}_0$ und sind (v_1, \dots, v_k) Eigenvektoren von f zu paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$, so ist die Familie (v_1, \dots, v_k) linear unabhängig. Insbesondere gilt $k \leq \dim(V)$.
- (ii) Gilt $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$, so hat f höchstens n paarweise verschiedene Eigenwerte.

Beweis. **Aussage (i):** Wir führen einen Induktionsbeweis. Für $k = 0$ ist nichts zu zeigen. Für $k = 1$ ist die Familie (v_1) linear unabhängig, da der Eigenvektor $v_1 \neq 0$ ist. Wir schließen nun von k auf $k + 1$. Es seien also $\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}$ paarweise verschiedene Eigenwerte von f und v_1, \dots, v_{k+1} zugehörige Eigenvektoren. Wir setzen die Linearkombination

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} = 0 \quad (24.2)$$

an. Durch Anwendung von f erhalten wir

$$f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1}) = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_k \lambda_k v_k + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} v_{k+1} = 0.$$

Die Subtraktion des λ_{k+1} -Fachen von (24.2) von dieser Gleichung ergibt

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_{k+1}) v_1 + \dots + \alpha_k (\lambda_k - \lambda_{k+1}) v_k + \alpha_{k+1} \underbrace{(\lambda_{k+1} - \lambda_{k+1})}_{=0} v_{k+1} = 0.$$

Da die k Eigenvektoren v_1, \dots, v_k aufgrund der Induktionsannahme linear unabhängig sind, folgt

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_{k+1}) = \dots = \alpha_k (\lambda_k - \lambda_{k+1}) = 0.$$

Da die Eigenwerte paarweise verschieden sind, muss $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$ gelten. Aus der ersten Gleichung folgt nun $\alpha_{k+1} v_{k+1} = 0$ und wegen $v_{k+1} \neq 0$ schließlich auch $\alpha_{k+1} = 0$. Das heißt, dass die Familie (v_1, \dots, v_{k+1}) linear unabhängig ist.

Aussage (ii) folgt sofort aus **Aussage (i)**. □

Als Folgerung von [Satz 24.1](#) erhalten wir ein hinreichendes Kriterium für die Diagonalisierbarkeit:

Folgerung 24.2 (hinreichendes Kriterium für Diagonalisierbarkeit).

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$. Besitzt $f \in \text{End}(V)$ n paarweise verschiedene Eigenwerte, dann ist f diagonalisierbar.

Beweis. Es seien (v_1, \dots, v_n) Eigenvektoren zu den paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Nach [Satz 24.1 Aussage \(i\)](#) ist die Familie (v_1, \dots, v_n) linear unabhängig, also eine Basis von V , die aus lauter Eigenvektoren von f besteht. Nach [Satz 20.24](#) ist f diagonalisierbar. \square

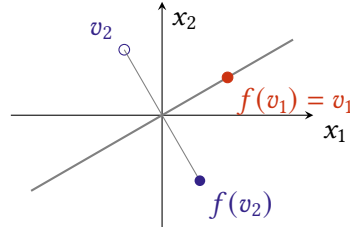
Beispiel 24.3 (paarweise verschiedene Eigenwerte).

Wie wir in [Beispiel 20.16](#) gesehen haben, bildet die Spiegelungsabbildung auf \mathbb{R}^2 mit der Darstellungsmatrix bzgl. der Standardbasis

$$A = \begin{bmatrix} \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) & 2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) \\ 2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) & \sin^2(\alpha) - \cos^2(\alpha) \end{bmatrix}$$

den Vektor $v_1 = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$ (und Vielfache davon) auf v_1 ab und

den Vektor $v_2 = \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ (und Vielfache davon) auf $-v_2$.



Das bedeutet, dass der zugehörige Endomorphismus $f_A \in \text{End}(\mathbb{R}^2)$ die beiden Eigenwerte ± 1 besitzt. Nach [Folgerung 24.2](#) ist f_A also diagonalisierbar. Die Darstellungsmatrix von f_A bzgl. der Basis $B = (v_1, v_2)$ aus Eigenvektoren ist folglich diagonal:

$$\mathcal{M}_B^B(f_A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad \triangle$$

Wie gleich in [Lemma 24.10](#) am Beispiel von Projektoren klar werden wird, ist das Kriterium von n paarweise verschiedener Eigenwerte nur hinreichend, aber nicht notwendig.

§ 24.1 BERECHNUNG VON EIGENVEKTOREN ZU GEGEBENEM EIGENWERT

Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem Körper K . Bevor wir der Frage nach der Bestimmung von Eigenwerten nachgehen, klären wir, wie zu gegebenem Eigenwert $\lambda \in K$ ein zugehöriger Eigenvektor $v \in V$ des Endomorphismus $f \in \text{End}(V)$ gefunden werden kann. Es gilt

$$\begin{aligned} f(v) &= \lambda v \\ \Leftrightarrow \lambda v - f(v) &= 0 \\ \Leftrightarrow (\lambda \text{id}_V - f)(v) &= 0 \\ \Leftrightarrow v \in \text{Kern}(\lambda \text{id}_V - f). \end{aligned} \quad (24.3)$$

Der Vektor $v \in V$ ist also ein Eigenvektor des Endomorphismus f zum Eigenwert $\lambda \in K$ genau dann, wenn $v \neq 0$ ist und $v \in \text{Kern}(\lambda \text{id}_V - f)$ gilt.

Wir können damit insbesondere ein Kriterium formulieren, wann ein Endomorphismus injektiv bzw. bijektiv ist:

Lemma 24.4 (Invertierbarkeitskriterium für einen Endomorphismus mit Eigenwerten).

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und $f \in \text{End}(V)$. Dann gilt:

- (i) f ist injektiv $\Leftrightarrow 0$ ist kein Eigenwert von f .
- (ii) Ist V endlich-dimensional, dann gilt sogar: f ist bijektiv $\Leftrightarrow 0$ ist kein Eigenwert von f .

Beweis. **Aussage (i):** Nach [Lemma 17.6](#) ist f genau dann injektiv, wenn $\text{Kern}(f) = \{0\}$ gilt. Wegen $\text{Kern}(f) = \text{Kern}(0 \text{id}_V - f)$ ist $\text{Kern}(f) = \{0\}$ genau dann der Fall, wenn 0 kein Eigenwert von f ist.

Aussage (ii): Wenn V endliche Dimension hat, dann ist nach [Folgerung 18.9](#) die Injektivität von f bereits hinreichend für die Bijektivität. \square

Die Menge aller Eigenwerte eines Endomorphismus bezeichnen wir mit

$$\Lambda(f) := \{\lambda \in K \mid \lambda \text{ ist ein Eigenwert von } f\} \subseteq K. \quad (24.4)$$

Wir können analoge Aussagen auch für Matrizen $A \in K^{n \times n}$ formulieren. Es gilt

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda x \\ \Leftrightarrow \lambda x - Ax &= 0 \\ \Leftrightarrow (\lambda I - A)(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &\in \text{Kern}(\lambda I - A). \end{aligned} \quad (24.5)$$

Der Vektor $x \in K^n \setminus \{0\}$ ist also genau dann ein Eigenvektor der Matrix $A \in K^{n \times n}$ zum Eigenwert $\lambda \in K$, wenn $x \neq 0$ ist und $x \in \text{Kern}(\lambda I - A)$ gilt.

Die Bestimmung von Eigenvektoren zu gegebenem Eigenwert $\lambda \in K$ wird damit zu einer Aufgabe, die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems

$$(\lambda I - A)x = 0$$

zu bestimmen.

Lemma 24.5 (Invertierbarkeitskriterium für eine Matrix mit Eigenwerten).

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Dann sind äquivalent:

- (i) A ist regulär.
- (ii) 0 ist kein Eigenwert von A .

Beweis. \square

Die Menge aller Eigenwerte einer Matrix bezeichnen wir mit

$$\Lambda(A) := \{\lambda \in K \mid \lambda \text{ ist ein Eigenwert von } A\} \subseteq K. \quad (24.6)$$

Ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert von $f \in \text{End}(V)$, dann ist per Definition $\text{Kern}(\lambda \text{id}_V - f)$ ein Unterraum, der mindestens die Dimension 1 besitzt.

Definition 24.6 (Eigenraum, geometrische Vielfachheit).

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K .

(i) Ist $f \in \text{End}(V)$ und $\lambda \in K$, dann heißt

$$\text{Eig}(f, \lambda) := \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\} \quad (24.7a)$$

der **Eigenraum** (englisch: eigenspace) von f zu λ . Die Kardinalzahl

$$\mu^{\text{geo}}(f, \lambda) := \dim(\text{Eig}(f, \lambda)) \quad (24.7b)$$

heißt die **geometrische Vielfachheit** (englisch: geometric multiplicity) von λ .

(ii) Ist $A \in K^{n \times n}$ und $\lambda \in K$, dann heißt

$$\text{Eig}(A, \lambda) := \{v \in V \mid Av = \lambda v\} \quad (24.8a)$$

der **Eigenraum** von A zu λ . Die Kardinalzahl

$$\mu^{\text{geo}}(A, \lambda) := \dim(\text{Eig}(A, \lambda)) \quad (24.8b)$$

heißt die **geometrische Vielfachheit** von λ . △

Beachte: Wir sprechen also auch dann von Eigenräumen, wenn λ kein Eigenwert von f bzw. A ist.

Lemma 24.7 (Eigenschaften von Eigenräumen von Endomorphismen).

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und $f \in \text{End}(V)$ sowie $\lambda \in K$. Dann gilt:

- (i) $\text{Eig}(f, \lambda)$ ist ein Unterraum von V .
- (ii) $\text{Eig}(f, \lambda) \neq \{0\} \Leftrightarrow \lambda$ ist ein Eigenwert von f .
- (iii) $\text{Eig}(f, \lambda) \setminus \{0\}$ ist die Menge der zu λ gehörenden Eigenvektoren von f .
- (iv) $\text{Eig}(f, \lambda) = \text{Kern}(\lambda \text{id}_V - f)$.
- (v) Sind $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ verschieden, dann gilt $\text{Eig}(f, \lambda_1) \cap \text{Eig}(f, \lambda_2) = \{0\}$.

Beachte: Insbesondere ist $\text{Kern}(f)$ der Eigenraum zu $0 \in K$.

Beweis. Der Beweis ist Gegenstand von [Hausaufgabe II-6.3](#). □

Analog gilt für Matrizen:

Lemma 24.8 (Eigenschaften von Eigenräumen von Matrizen).

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ sowie $\lambda \in K$. Dann gilt:

- (i) $\text{Eig}(A, \lambda)$ ist ein Unterraum von V .
- (ii) $\text{Eig}(A, \lambda) \neq \{0\} \Leftrightarrow \lambda$ ist ein Eigenwert von A .
- (iii) $\text{Eig}(A, \lambda) \setminus \{0\}$ ist die Menge der zu λ gehörenden Eigenvektoren von A .
- (iv) $\text{Eig}(A, \lambda) = \text{Kern}(\lambda I - A)$.
- (v) Sind $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ verschieden, dann gilt $\text{Eig}(A, \lambda_1) \cap \text{Eig}(A, \lambda_2) = \{0\}$.

Beachte: Insbesondere ist $\text{Kern}(A)$ der Eigenraum zu $0 \in K$.

Beweis. wie Lemma 24.7 □

Das folgende Resultat wurde nachträglich eingefügt. Die Aussage (v) von Lemma 24.7 und Lemma 24.8 bedeutet, dass die Summe $\text{Eig}(A, \lambda_1) \oplus \text{Eig}(A, \lambda_2)$ direkt ist. Tatsächlich gilt das sogar auch für mehr als zwei Eigenräume:

Lemma 24.9 (Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten bilden eine direkte Summe).

Es sei K ein Körper.

- (i) Es sei $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_s, s \in \mathbb{N}_0$, paarweise verschiedene Eigenwerte von A , dann ist die Summe der Unterräume $\text{Eig}(A, \lambda_1), \dots, \text{Eig}(A, \lambda_s)$ direkt.
- (ii) Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und $f \in \text{End}(V)$. Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_s, s \in \mathbb{N}_0$, paarweise verschiedene Eigenwerte von f , dann ist die Summe der Unterräume $\text{Eig}(f, \lambda_1), \dots, \text{Eig}(f, \lambda_s)$ direkt.

Beweis. Aussage (i): Gemäß Definition 14.12 müssen wir zeigen: Für jedes $j \in \llbracket 1, s \rrbracket$ gilt:

$$\text{Eig}(A, \lambda_j) \cap \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^s \text{Eig}(A, \lambda_i) = \{0\}.$$

Es sei also $j \in \llbracket 1, s \rrbracket$ und $v_j \in \text{Eig}(A, \lambda_j) \cap \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^s \text{Eig}(A, \lambda_i)$. Das heißt, es gibt Vektoren $v_i \in \text{Eig}(A, \lambda_i)$

für $i \in \llbracket 1, s \rrbracket \setminus \{j\}$ mit der Eigenschaft

$$v_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^s v_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j \\ v_i \neq 0}}^s v_i.$$

Nach Lemma 13.3 bedeutet das aber, dass die Menge $\{v_j\} \cup \{v_i \mid i \in \llbracket 1, s \rrbracket \setminus \{j\}, v_i \neq 0\}$ linear abhängig ist. Wenn $v_j \neq 0$ wäre, dann wären die Elemente dieser Menge alle Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten, was nach Satz 24.1 unmöglich ist. Also muss $v_j = 0$ sein.

Der Beweis von Aussage (ii) geht analog. □

Eine besonders einfache Klasse von Abbildungen, deren Diagonalisierbarkeit wir jetzt schon zeigen können, ist die der Projektoren (Definition 22.33), also der Endomorphismen mit $P \circ P = P$:

Lemma 24.10 (Projektoren sind diagonalisierbar).

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei $P \in \text{End}(V)$ ein Projektor und $r := \text{Rang}(P)$.

- (i) $V = \text{Kern}(P) \oplus \text{Bild}(P)$.
- (ii) Für die Eigenwerte von P gilt $\Lambda(P) \subseteq \{0, 1\}$.
- (iii) Jedes $v \in \text{Bild}(P), v \neq 0$, ist ein Eigenvektor zum Eigenwert 1. Für die geometrische Vielfachheit gilt $\mu^{\text{geo}}(f, 1) = r = \text{Rang}(P) = \dim(\text{Bild}(P))$.
- (iv) Jedes $v \in \text{Kern}(P), v \neq 0$, ist ein Eigenvektor zum Eigenwert 0. Für die geometrische Vielfachheit gilt $\mu^{\text{geo}}(f, 0) = n - r = \text{Defekt}(P) = \dim(\text{Kern}(P))$.

(v) Wählen wir eine Basis von V so, dass

$$B_V = (\underbrace{v_1, \dots, v_r}_{\text{Basis von Bild}(P)}, \underbrace{v_{r+1}, \dots, v_n}_{\text{Basis von Kern}(P)})$$

gilt, dann hat die Darstellungsmatrix $A = \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(P)$ die Diagonalgestalt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

← r -te Zeile
 ← $(r + 1)$ -te Zeile

Beachte: Projektoren haben also höchstens zwei verschiedene Eigenwerte und sind dennoch immer diagonalisierbar. Das zeigt, dass das Diagonalisierbarkeitskriterium aus Folgerung 24.2 nur hinreichend aber nicht notwendig ist.

Beweis. **Aussage (i):** Wir verwenden zum Beweis von $V = \text{Kern}(P) \oplus \text{Bild}(P)$ die Charakterisierung direkter Summen aus Satz 14.7 **Aussage (iii)**. Aus dem Dimensionssatz für lineare Abbildungen (Folgerung 18.7) folgt

$$\dim(V) = \dim(\text{Bild}(P)) + \dim(\text{Kern}(P)),$$

es ist also $\dim(\text{Kern}(P)) = n - r$. Es bleibt $\text{Bild}(P) \cap \text{Kern}(P) = \{0\}$ zu zeigen. Es sei dazu $v \in \text{Bild}(P) \cap \text{Kern}(P)$. Dann gibt es ein $u \in V$ mit $v = P(u)$, und außerdem gilt $P(v) = 0$. Es folgt

$$v = P(u) = P(P(u)) = P(v) = 0,$$

also gilt tatsächlich $\text{Bild}(P) \cap \text{Kern}(P) = \{0\}$.

Aussage (ii): Es sei $v \neq 0$ ein Eigenvektor von P zum unbekanntem Eigenwert $\lambda \in K$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{einerseits } & P(v) = \lambda v \\ \text{und andererseits } & P(v) = P(P(v)) = P(\lambda v) = \lambda P(v) = \lambda^2 v. \end{aligned}$$

Also gilt wegen $v \neq 0$ für den Eigenwert $\lambda = \lambda^2$ oder äquivalent $\lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1) = 0$. Nach Satz 11.21 gilt für die Nullstellen dieses Polynoms also $\lambda = 0$ oder $\lambda = 1$.

Aussage (iii): Es sei $v \in \text{Bild}(P)$, also $v = P(u)$ für ein $u \in V$. Dann gilt

$$P(v) = P(P(u)) = P(u) = v.$$

Also ist v ein Eigenvektor von P zum Eigenwert 1, sofern $v \neq 0$ ist.

Damit gilt $\text{Bild}(P) \subseteq \text{Eig}(P, 1)$, und umgekehrt gilt auch $\text{Eig}(P, 1) \subseteq \text{Bild}(P)$. (**Quizfrage 24.1:** Warum?) Also folgt $\mu^{\text{geo}}(P, 1) = \dim(\text{Bild}(P)) = \text{Rang}(P) = r$.

Aussage (iv): Nach Lemma 24.7 ist $\text{Kern}(P) = \text{Eig}(P, 0)$. Also folgt $\mu^{\text{geo}}(P, 0) = \dim(\text{Kern}(P)) = \text{Defekt}(P) = n - r$.

Aussage (v) folgt sofort aus der Definition von Darstellungsmatrizen, vgl. (19.3). □

§ 24.2 BERECHNUNG VON EIGENWERTEN, CHARAKTERISTISCHES POLYNOM

Wie können wir nun die unbekanntenen Eigenwerte eines Endomorphismus bzw. einer Matrix bestimmen? Mit anderen Worten, für welche $\lambda \in K$ besteht $\text{Eig}(f, \lambda)$ aus mehr als nur dem Nullvektor?

Lemma 24.11 (Eigenwerte eines Endomorphismus).

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei $f \in \text{End}(V)$ und $\lambda \in K$. Dann sind äquivalent:

- (i) λ ist ein Eigenwert von f .
- (ii) $\det(\lambda \text{id}_V - f) = 0$.

Beweis. Es gilt:

$$\begin{aligned}
 & \lambda \in K \text{ ist ein Eigenwert von } f \\
 \Leftrightarrow & \text{Eig}(f, \lambda) = \text{Kern}(\lambda \text{id}_V - f) \neq \{0\} \quad \text{nach Lemma 24.7} \\
 \Leftrightarrow & \lambda \text{id}_V - f \text{ ist nicht bijektiv} \quad \text{nach Folgerung 18.9} \\
 \Leftrightarrow & \det(\lambda \text{id}_V - f) = 0 \quad \text{nach Lemma 23.22.} \quad \square
 \end{aligned}$$

Analog gilt für die Eigenwerte von Matrizen:

Lemma 24.12 (Eigenwerte einer Matrix).

Es sei K ein Körper, $A \in K^{n \times n}$ und $\lambda \in K$. Dann sind äquivalent:

- (i) λ ist ein Eigenwert von A .
- (ii) $\det(\lambda I - A) = 0$.

Beweis. wie Lemma 24.11 □

Welche Art Ausdruck verbirgt sich hinter $\det(\lambda I - A)$ mit der Unbekannten λ ? Es gilt **In (24.9) wurden einige Vorzeichenfehler korrigiert.**

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n,n-1} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (24.9)$$

Das Ausschreiben dieser Determinante mit Hilfe der Leibniz-Formel (23.3), also

$$\det(\lambda I - A) = \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sgn } \sigma) \prod_{j=1}^n (\delta_{\sigma(j),j} \lambda - a_{\sigma(j),j}) \quad (24.10)$$

zeigt, dass es sich dabei um ein Polynom in der Variablen λ handelt.

Definition 24.13 (charakteristisches Polynom-einer-Matrix).

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Der Ausdruck (24.9) heißt das **charakteristische Polynom** (englisch: **characteristic polynomial**) der Matrix A , geschrieben χ_A . \triangle

Lemma 24.14 (Eigenwerte von Matrizen sind Nullstellen des charakteristischen Polynoms).

Es sei K ein Körper, $A \in K^{n \times n}$, $n \in \mathbb{N}_0$ und $\lambda \in K$. Dann sind äquivalent:

- (i) λ ist ein Eigenwert von A .
- (ii) λ ist eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms χ_A .

Beweis. Das Resultat folgt sofort aus Lemma 24.12. \square

Gemäß Satz 11.21 besitzt das charakteristische Polynom χ_A die Darstellung

$$\chi_A = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s} \cdot q \quad (24.11)$$

mit den $s \in \mathbb{N}_0$ paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in K$, Exponenten $n_1, \dots, n_s \in \mathbb{N}$ und einem Polynom $q \in K[\lambda]$, das keine Nullstellen in K besitzt.

Definition 24.15 (algebraische Vielfachheit des Eigenwertes einer Matrix).

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

- (i) Die Zahlen $n_i \in \mathbb{N}$ in der (bis auf die Reihenfolge der Faktoren) eindeutigen Zerlegung (24.11) heißen die **algebraischen Vielfachheiten** (englisch: **algebraic multiplicities**) der Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ von A . Wir schreiben $\mu^{\text{alg}}(A, \lambda_i) = n_i$.
- (ii) Im Fall $n_i = 1$ nennen wir λ_i einen **einfachen Eigenwert** (englisch: **simple eigenvalue**) von A . Im Fall $n_i \geq 2$ nennen wir λ_i einen **mehrfachen Eigenwert** (englisch: **multiple eigenvalue**) von A . \triangle

Beachte: Nach Folgerung 11.22 gilt für die Summe der algebraischen Vielfachheiten $\sum_{i=1}^s \mu^{\text{alg}}(A, \lambda_i) \leq n$.

Wir können die algebraische Vielfachheit eines einzelnen Eigenwertes auch angeben, ohne die gesamte Darstellung (24.11) vorliegen zu haben:

Lemma 24.16 (algebraische Vielfachheit und Teiler des charakteristischen Polynoms).

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Für die algebraische Vielfachheit $\mu^{\text{alg}}(A, \lambda_i)$ eines Eigenwertes λ_i von A gilt

$$\mu^{\text{alg}}(A, \lambda_i) = \max\{k \in \mathbb{N} \mid (\lambda - \lambda_i)^k \mid \chi_A\}. \quad (24.12)$$

Beweis. Das Resultat folgt aus der Darstellung (24.11). \square

Beispiel 24.17 (charakteristisches Polynom).

- (i) Die Darstellungsmatrix der Spiegelungsabbildung aus [Beispiel 20.16](#) bzgl. der Standardbasis in \mathbb{R}^2

$$A = \begin{bmatrix} \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) & 2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) \\ 2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) & \sin^2(\alpha) - \cos^2(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{bmatrix}$$

besitzt das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} \chi_A &= \det \begin{pmatrix} \lambda - \cos(2\alpha) & -\sin(2\alpha) \\ -\sin(2\alpha) & \lambda + \cos(2\alpha) \end{pmatrix} \\ &= (\lambda - \cos(2\alpha))(\lambda + \cos(2\alpha)) - \sin^2(2\alpha) \\ &= \lambda^2 - \cos^2(2\alpha) - \sin^2(2\alpha) \\ &= \lambda^2 - 1 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda + 1). \end{aligned}$$

Dessen Nullstellen, also Eigenwerte von A , sind ± 1 , was das Ergebnis von [Beispiel 24.3](#) bestätigt. Die algebraische Vielfachheit beider Eigenwerte ist $\mu^{\text{alg}}(A, 1) = \mu^{\text{alg}}(A, -1) = 1$.

- (ii) Die Darstellungsmatrix der Drehabbildung aus [Beispiel 17.8](#) bzgl. der Standardbasis in \mathbb{R}^2

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

besitzt das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} \chi_A &= \det \begin{pmatrix} \lambda - \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \lambda - \cos(\alpha) \end{pmatrix} \\ &= (\lambda - \cos(\alpha))(\lambda - \cos(\alpha)) + \sin^2(\alpha) \\ &= \lambda^2 - 2\lambda \cos(\alpha) + \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) \\ &= \lambda^2 - 2\lambda \cos(\alpha) + 1. \end{aligned}$$

Dieses Polynom hat genau dann eine Nullstelle in \mathbb{R} , wenn $\cos^2(\alpha) - 1 \geq 0$ gilt, also $\cos^2(\alpha) \geq 1$, was wegen $|\cos(\alpha)| \leq 1$ gleichbedeutend ist mit $\cos^2(\alpha) = 1$, also $\alpha = 0$ oder $\alpha = \pi$ im Intervall $[0, 2\pi)$.

Im Fall $\alpha = 0$ erhalten wir $\chi_A = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$, also ist 1 der einzige Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit $\mu^{\text{alg}}(A, 1) = 2$. Im Fall $\alpha = \pi$ erhalten wir $\chi_A = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$, also ist -1 der einzige Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit $\mu^{\text{alg}}(A, -1) = 2$. \triangle

Bemerkung 24.18 (charakteristisches Polynom).

- (i) Es stellt sich die Frage, ob man ohne Bedenken (lineare) Polynome in die Einträge einer Matrix einsetzen kann. Schließlich haben wir Matrizen an sich sowie auch die Determinante nur für Matrizen definiert, deren Einträgen aus einem Körper K kommen. Nach [Lemma 11.12](#) ist aber der Ring der Polynome $K[\lambda]$ (und auch die Teilmenge der Polynome vom Höchstgrad 1) kein Körper.

Es gibt zwei mögliche Abhilfen: Wir könnten Matrizen allgemeiner über kommutativen Ringen definieren. Es ist aber auch möglich, den Polynomring $K[\lambda]$ zum sogenannten **rationalen**

Funktionskörper $K(\lambda)$ zu erweitern.¹ Dieser besteht aus den Äquivalenzklassen von

$$\left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in K[\lambda], q \neq 0 \right\}$$

bzgl. der Äquivalenzrelation $\frac{p_1}{q_1} \sim \frac{p_2}{q_2} \Leftrightarrow p_1 \cdot q_2 = p_2 \cdot q_1$. Der Polynomring $K[\lambda]$ wird durch Identifikation von p mit der Äquivalenzklasse zu $\frac{p}{1}$ zu einem kommutativen Unterring mit Eins von $K(\lambda)$. Der Körper K ist ein Unterkörper von $K(\lambda)$.

- (ii) Die Matrix $\lambda I - A$ kann also als Matrix im Vektorraum $K(\lambda)^{n \times n}$ über dem Körper $K(\lambda)$ aufgefasst werden. Die Determinante von $\lambda I - A$ ist damit nach [Definition 23.6](#) definiert als Element von $K(\lambda)$. Das heißt, auch $\chi_A = \det(\lambda I - A)$ gehört zu $K(\lambda)$. In Wirklichkeit liegt $\chi_A = \det(\lambda I - A)$ sogar im Unterring der Polynome $K[\lambda] \subsetneq K(\lambda)$. **Das liegt daran, dass alle Einträge von $\lambda I - A$ rationale Ausdrücke mit Nenner $1 \in K \subsetneq K(\lambda)$ sind. Damit trifft das auch auf Produkte von Einträgen und schließlich auf Summen von Produkten von Einträgen zu, also auf $\det(\lambda I - A)$.**
- (iii) Oft wird das charakteristische Polynom einer Matrix A als $\det(A - \lambda I)$ definiert, was sich von [\(24.9\)](#) im Vorzeichen unterscheidet. Dieser Unterschied hat aber im Folgenden keine Auswirkungen. △

Definition 24.19 (Spur einer Matrix).

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Die **Spur** (englisch: **trace**) von A ist definiert als

$$\text{Spur}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}, \quad (24.13)$$

also als die Summe der Hauptdiagonalelemente. △

Satz 24.20 (Eigenschaften des charakteristischen Polynoms).

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Das charakteristische Polynom

$$\chi_A = \sum_{i=0}^n \alpha_i \lambda^i \in K_n[\lambda] \quad (24.14)$$

und seine Koeffizienten $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ haben folgende Eigenschaften:

- (i) χ_A ist ein normiertes Polynom vom Grad $\deg(\chi_A) = n$, also gilt $\alpha_n = 1$.
- (ii) Im Fall $n \geq 1$ gilt $\alpha_{n-1} = -\text{Spur}(A)$.
- (iii) Es gilt $\alpha_0 = (-1)^n \det(A)$.

Beweis. Wir schreiben wie in [\(24.10\)](#)

$$\chi_A = \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sgn } \sigma) \prod_{j=1}^n (\delta_{\sigma(j),j} \lambda - a_{\sigma(j),j})$$

¹Diese Konstruktion ist für alle Integritätsringe R möglich, also für kommutative, nullteilerfreie Ringe mit Eins ungleich dem Nullring ([Definition 9.7](#)). Der Polynomring über einem Körper hat diese Eigenschaft, siehe [Folgerung 11.11](#). Allgemein spricht man vom **Quotientenkörper** (englisch: **field of fractions**) eines Integritätsringes R , das ist der (bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte) kleinste Körper, in den R eingebettet werden kann. Ein prominentes Beispiel ist \mathbb{Q} , der Quotientenkörper von \mathbb{Z} .

$$= \underbrace{\prod_{j=1}^n (\lambda - a_{jj})}_{p_1} + \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n \setminus \{\text{id}\}} (\text{sgn } \sigma) \underbrace{\prod_{j=1}^n (\delta_{\sigma(j),j} \lambda - a_{\sigma(j),j})}_{p_2}.$$

In der Summe p_2 treten in jedem Produkt höchstens $n - 2$ Diagonalelemente auf. (**Quizfrage 24.2:** Warum?) Damit ist der Grad von p_2 höchstens $n - 2$. Die gesuchten Koeffizienten α_n und α_{n-1} von χ_A sind also in p_1 zu finden. Durch Ausmultiplizieren von p_1 erhalten wir

$$\begin{aligned} p_1 &= 1 \cdot \lambda^n - (a_{11} + \dots + a_{nn}) \lambda^{n-1} + \dots \\ &= \lambda^n - \text{Spur}(A) \lambda^{n-1} + \dots \end{aligned}$$

Den Koeffizienten α_0 niedrigster Ordnung erhalten wir durch Einsetzen $\lambda = 0$ in die zu χ_A gehörige Polynomfunktion $\widetilde{\chi}_A$, was $\alpha_0 = \det(-A) = (-1)^n \det(A)$ bestätigt. \square

Welcher Zusammenhang besteht zwischen der geometrischen und der algebraischen Vielfachheit eines Eigenwertes?

Satz 24.21 (geometrische und algebraische Vielfachheit).

Es sei K ein Körper, $A \in K^{n \times n}$, $n \in \mathbb{N}_0$ und $\lambda \in K$ ein Eigenwert von A . Dann gilt:

$$1 \leq \mu^{\text{geo}}(A, \lambda) \leq \mu^{\text{alg}}(A, \lambda). \quad (24.15)$$

Beweis. Es sei $\lambda_i \in K$ ein Eigenwert von A . Nach **Definition 24.6** gilt $\mu^{\text{geo}}(A, \lambda_i) := \dim(\text{Eig}(A, \lambda_i))$, und nach **Lemma 24.8** gilt $1 \leq \mu^{\text{geo}}(A, \lambda_i)$.

Wir setzen zur Abkürzung $g := \mu^{\text{geo}}(A, \lambda_i)$. Es sei nun (v_1, \dots, v_g) eine Basis von $\text{Eig}(A, \lambda_i)$. Wir ergänzen diese zu einer Basis $(v_1, \dots, v_g, v_{g+1}, \dots, v_n)$ von K^n . Für die Darstellungsmatrix von f_A in dieser Basis gilt dann (siehe die Überlegungen vor **Satz 20.17**)

$$\widehat{A} = \left[\begin{array}{c|c} g & n-g \\ \hline \lambda_i I & * \\ \hline 0 & B \end{array} \right]_{n-g}.$$

Für das charakteristische Polynom dieser zu A ähnlichen Matrix haben wir also (die Gleichheit $\chi_{\widehat{A}} = \chi_A$ wird gleich in **Lemma 24.22** bewiesen)

$$\chi_{\widehat{A}} = \chi_A = (\lambda - \lambda_i)^g \chi_B.$$

Es ist nun möglich, dass im Restpolynom χ_B nochmals eine Potenz des Linearfaktors $(\lambda - \lambda_i)^g$ auftritt. Damit haben wir $g = \mu^{\text{geo}}(A, \lambda_i) \leq \mu^{\text{alg}}(A, \lambda_i)$. \square

§ 24.3 CHARAKTERISTISCHES POLYNOM EINES ENDOMORPHISMUS

Lemma 24.22 (ähnliche Matrizen haben dasselbe charakteristische Polynom).

Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_0$. Sind $A, \widehat{A} \in K^{n \times n}$ ähnlich, dann gilt $\chi_A = \chi_{\widehat{A}}$.

Beweis. Nach Voraussetzung gilt $\widehat{A} = T A T^{-1}$ mit einer invertierbaren Matrix $T \in K^{n \times n}$. Wir fassen jetzt λ , ein Polynom vom Grad 1, als Element des rationalen Funktionenkörpers $K(\lambda)$ auf. Weiterhin fassen wir I, T, A usw. als Elemente von $K(\lambda)^{n \times n}$ auf, also als $n \times n$ -Matrizen über dem Körper $K(\lambda)$. λI ist die S-Multiplikation von $\lambda \in K(\lambda)$ mit $I \in K(\lambda)^{n \times n}$. Es gilt

$$\begin{aligned} \lambda I - \widehat{A} &= \lambda T T^{-1} - T A T^{-1} \\ &= T (\lambda T^{-1}) - T A T^{-1} \quad \text{wegen (15.12)} \\ &= T (\lambda I) T^{-1} - T A T^{-1} \\ &= T (\lambda I - A) T^{-1}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \chi_{\widehat{A}} &= \det(\lambda I - \widehat{A}) \\ &= \det(T (\lambda I - A) T^{-1}) \\ &= \det(T) \det(\lambda I - A) \det(T^{-1}) \\ &= \det(\lambda I - A) \\ &= \chi_A. \end{aligned} \quad \square$$

Wegen Lemma 24.22 besitzen alle Darstellungsmatrizen eines Endomorphismus dasselbe charakteristische Polynom. Dieses wird damit auch zu einer Eigenschaft des Endomorphismus selbst.

Definition 24.23 (charakteristisches Polynom eines Endomorphismus).

Es seien K ein Körper und V ein Vektorraum über K mit Basis $B_V = (v_1, \dots, v_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Das **charakteristische Polynom** eines Endomorphismus $f \in \text{End}(V)$ ist definiert als

$$\chi_f := \chi_A \tag{24.16}$$

für die Darstellungsmatrix $A = \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f)$. Folglich können wir wie in Definition 24.15 und Lemma 24.16 auch von der **algebraischen Vielfachheit** $\mu^{\text{alg}}(f, \lambda)$ des Eigenwertes λ von f sprechen. \triangle

Wir können nun das Analogon von Lemma 24.14 angeben:

Lemma 24.24 (Eigenwerte von Endomorphismen sind Nullstellen des charakteristischen Polynoms, vgl. Lemma 24.14).

Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem Körper K . Weiter sei $f \in \text{End}(V)$ und $\lambda \in K$. Dann sind äquivalent:

- (i) λ ist ein Eigenwert von f .
- (ii) λ ist eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms χ_f .

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} &\lambda \text{ ist ein Eigenwert von } f \\ \Leftrightarrow &\det(\lambda \text{id}_V - f) = 0 \quad \text{nach Lemma 24.11} \\ \Leftrightarrow &\det(\lambda I - A) = 0 \quad \text{nach Definition 23.21} \\ \Leftrightarrow &\lambda \text{ ist Nullstelle von } \chi_A \quad \text{nach Definition von } \chi_A \\ \Leftrightarrow &\lambda \text{ ist Nullstelle von } \chi_f \quad \text{wegen (24.16).} \end{aligned} \quad \square$$

Beachte: Damit ist auch klar: $\mu^{\text{alg}}(f, \lambda) = \mu^{\text{alg}}(A, \lambda)$ für jede Darstellungsmatrix A von f .

Aus Lemma 24.22 lässt sich außerdem folgendes Resultat gewinnen:

Lemma 24.25 (ähnliche Matrizen haben dieselbe Spur).

Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_0$. Sind $A, \widehat{A} \in K^{n \times n}$ ähnlich, dann gilt $\text{Spur}(A) = \text{Spur}(\widehat{A})$.

Beweis. Nach Satz 24.20 ist die Spur einer Matrix der zweithöchste Koeffizient ihres charakteristischen Polynoms. Die charakteristischen Polynome χ_A und $\chi_{\widehat{A}}$ sind nach Lemma 24.22 identisch, also auch ihre Koeffizienten. (**Quizfrage 24.3:** Wie argumentiert man im Fall $n = 0$?) \square

Damit wird auch die Spur zu einer Eigenschaft eines Endomorphismus:

Definition 24.26 (Spur eines Endomorphismus).

Es seien K ein Körper und V ein Vektorraum über K mit Basis $B_V = (v_1, \dots, v_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Die **Spur** eines Endomorphismus $f \in \text{End}(V)$ ist definiert als

$$\text{Spur}(f) := \text{Spur}(A) \quad (24.17)$$

für die Darstellungsmatrix $A = \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f)$. \triangle

Wir geben nun neben dem bereits bekannten hinreichenden Kriterium (Folgerung 24.2) auch ein notwendiges Kriterium für die Diagonalisierbarkeit an.

Lemma 24.27 (notwendiges Kriterium für Diagonalisierbarkeit).

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$. Ist $f \in \text{End}(V)$ diagonalisierbar, dann zerfällt das charakteristische Polynom χ_f in Linearfaktoren, es gilt also

$$\chi_f = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s} \quad (24.18)$$

mit den paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in K$ und deren algebraischen Vielfachheiten $n_1, \dots, n_s \in \mathbb{N}$, für die $n_1 + \dots + n_s = n$ gilt.

Beweis. Es sei f diagonalisierbar, es gibt also nach Satz 20.24 eine Basis $B_V = (v_1, \dots, v_n)$ aus Eigenvektoren von f . Die zugehörigen paarweise verschiedenen Eigenwerte seien

$$\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{n_1\text{-mal}}, \dots, \underbrace{\lambda_s, \dots, \lambda_s}_{n_s\text{-mal}}.$$

Für die zugehörige Darstellungsmatrix $A = \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f)$ gilt dann

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_s \\ & & & & \lambda_s \end{bmatrix} \quad \text{und damit} \quad \lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda - \lambda_1 & & & \\ & \lambda - \lambda_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda - \lambda_s \\ & & & & \lambda - \lambda_s \end{bmatrix}.$$

Es folgt

$$\chi_f = \chi_A = \det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}. \quad \square$$

Das folgende Resultat wurde nachträglich eingefügt.

Satz 24.28 (notwendiges und hinreichendes Kriterium für Diagonalisierbarkeit).

Es sei K ein Körper.

(i) Es sei $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Weiter seien $\lambda_1, \dots, \lambda_s, s \in \mathbb{N}_0$, die paarweise verschiedenen Eigenwerte von A . Dann sind äquivalent:

(a) A ist diagonalisierbar.

$$(b) K^n = \bigoplus_{j=1}^s \text{Eig}(A, \lambda_j).$$

$$(c) \sum_{j=1}^s \mu^{\text{geo}}(A, \lambda_j) = n.$$

(d) Das charakteristische Polynom χ_A zerfällt vollständig in Linearfaktoren, und es gilt $\mu^{\text{alg}}(A, \lambda_j) = \mu^{\text{geo}}(A, \lambda_j)$ für alle $j = 1, \dots, s$.

(ii) Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei $f \in \text{End}(V)$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_s, s \in \mathbb{N}_0$, die paarweise verschiedenen Eigenwerte von f . Dann sind äquivalent:

(a) f ist diagonalisierbar.

$$(b) K^n = \bigoplus_{j=1}^s \text{Eig}(f, \lambda_j).$$

$$(c) \sum_{j=1}^s \mu^{\text{geo}}(f, \lambda_j) = n.$$

(d) Das charakteristische Polynom χ_f zerfällt vollständig in Linearfaktoren, und es gilt $\mu^{\text{alg}}(f, \lambda_j) = \mu^{\text{geo}}(f, \lambda_j)$ für alle $j = 1, \dots, s$.

Beweis. Wir beweisen nur **Aussage (i)**.

Aussage (a) \Rightarrow Aussage (b): Es sei A diagonalisierbar, d. h., K^n besitzt eine Basis aus n Eigenvektoren von A (Satz 20.24). Wenn wir diese nach den zugehörigen Eigenwerten $\lambda_j, j = 1, \dots, s$ gruppieren, so erhalten wir jeweils eine Basis von $\text{Eig}(f, \lambda_j)$, der Mächtigkeit $\dim(\text{Eig}(f, \lambda_j)) = \mu^{\text{geo}}(f, \lambda_j)$. Nach Lemma 24.9 ist $\sum_{j=1}^s \text{Eig}(f, \lambda_j)$ eine direkte Summe in K^n . Die Vereinigung der zugehörigen Basen ist nach Satz 14.16 eine Basis von $\bigoplus_{j=1}^s \text{Eig}(f, \lambda_j)$. Für die Dimension dieses Unterraumes von K^n gilt daher

$$\dim\left(\bigoplus_{j=1}^s \text{Eig}(f, \lambda_j)\right) = n,$$

also schließen wir $K^n = \bigoplus_{j=1}^s \text{Eig}(f, \lambda_j)$.

Aussage (b) \Rightarrow Aussage (c): Die Dimension $\dim(\bigoplus_{j=1}^s \text{Eig}(f, \lambda_j))$ ist die Summe der Dimensionen $\dim(\text{Eig}(f, \lambda_j)) = \mu^{\text{geo}}(f, \lambda_j), j = 1, \dots, s$.

Aussage (c) \Rightarrow Aussage (a): Die Vereinigung von Basen der Eigenräume $\text{Eig}(f, \lambda_j), j = 1, \dots, s$, ergibt eine Basis der direkten Summe $\bigoplus_{j=1}^s \text{Eig}(f, \lambda_j)$. Nach Voraussetzung ist die Mächtigkeit dieser Basis gleich n , und sie besteht nur aus Eigenvektoren von A . Damit ist A diagonalisierbar.

Aussage (a) \Rightarrow Aussage (d): Ist A diagonalisierbar, dann ist A nach [Definition 20.23](#) ähnlich zu einer Diagonalmatrix. Bezeichnen wir die geometrischen Vielfachheiten mit $n_j := \mu^{\text{geo}}(f, \lambda_j)$, so gilt genauer, dass A ähnlich ist zu

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & & & \\ & \lambda_2 I_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_s I_{n_s} \end{bmatrix} \begin{matrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_s \end{matrix}$$

Da ähnliche Matrizen dasselbe charakteristische Polynom besitzen ([Lemma 24.22](#)), gilt

$$\chi_A = \prod_{j=1}^s (t - \lambda_j)^{n_j}.$$

Das charakteristische Polynom χ_A zerfällt also in Linearfaktoren, und es gilt $\mu^{\text{alg}}(f, \lambda_j) = \mu^{\text{geo}}(f, \lambda_j)$ für alle $j = 1, \dots, s$.

Aussage (d) \Rightarrow Aussage (c): Für das charakteristische Polynom von A gelte

$$\chi_A = \prod_{j=1}^s (t - \lambda_j)^{n_j}$$

mit Exponenten $n_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, s$. Dann gilt $n_j = \mu^{\text{alg}}(f, \lambda_j)$, und nach Voraussetzung auch $n_j = \mu^{\text{geo}}(f, \lambda_j)$. Da $\deg(\chi_A) = n$ ist und andererseits nach [Lemma 11.10](#) auch $\sum_{j=1}^s n_j = n$, haben wir $\sum_{j=1}^s \mu^{\text{geo}}(f, \lambda_j) = n$.

Der Beweis von [Aussage \(ii\)](#) geht analog. □

Wir halten als Ergebnis von [Satz 24.28](#) noch fest, welche Situationen dafür verantwortlich sein können, dass ein Endomorphismus eines n -dimensionalen Vektorraumes bzw. eine $n \times n$ -Matrix **nicht diagonalisierbar** sind:

Beispiel 24.29 (mögliche Ursachen fehlender Diagonalisierbarkeit).

(i) χ_A zerfällt nicht vollständig in Linearfaktoren, es gilt also wie in [\(24.11\)](#)

$$\chi_A = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s} \cdot q$$

mit einem Polynom q mindestens vom Grad 2, das keine Nullstellen in K besitzt. (**Quizfrage 24.4:** Warum gilt $\deg(q) \geq 2$?)

In dieser Situation gilt für die Dimension der (direkten) Summe $\bigoplus_{i=1}^s \text{Eig}(A, \lambda_i)$ aller Eigenräume

$$\dim\left(\bigoplus_{i=1}^s \text{Eig}(A, \lambda_i)\right) = \sum_{i=1}^s \mu^{\text{geo}}(A, \lambda_i) \leq \sum_{i=1}^s \mu^{\text{alg}}(A, \lambda_i) = \sum_{i=1}^s n_i = n - \deg(q) \leq n - 2.$$

Daher können wir mit Eigenvektoren nicht den ganzen Raum K^n aufspannen.

Ein Beispiel für diese Situation ist

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

mit dem charakteristischen Polynom $\chi_A = \lambda^2 + 1$, das über \mathbb{R} keine Nullstellen besitzt.

(ii) Für mindestens einen Eigenwert λ_i von f gilt $\mu^{\text{geo}}(A, \lambda_i) < \mu^{\text{alg}}(A, \lambda_i)$.

Ein Beispiel für diese Situation ist

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

mit dem charakteristischen Polynom $\chi_A = (\lambda - 1)^2$ mit $\mu^{\text{alg}}(A, 1) = 2$. Es gilt jedoch

$$\text{Eig}(A, 1) = \text{Kern}(1I - A) = \text{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$$

mit $\mu^{\text{geo}}(A, 1) = 1$. △

Bemerkung 24.30 (Bestimmung von Nullstellen ist schwierig).

Die Bestimmung von Nullstellen eines Polynoms ist im Allgemeinen schwierig. Man kann mit Hilfe der nach Galois benannten Theorie zeigen, dass für allgemeine Polynome vom Grad $n \geq 5$ keine Lösungsformeln mehr existiert, sodass man auf eine numerische Bestimmung von Eigenwerten angewiesen ist.² Damit ist es auch schwierig, festzustellen, ob das charakteristische Polynom einer Matrix oder eines Endomorphismus vollständig in Linearfaktoren zerfällt. △

Ende der Vorlesung 13

§ 25 ALGEBREN ÜBER KÖRPERN

Wir wollen im weiteren Verlauf von [Kapitel 5](#) auch für den nicht-diagonalisierbaren Fall klären, bzgl. welcher Basen die Darstellungsmatrix eines Endomorphismus eine möglichst einfache Gestalt hat und wie diese aussieht. Dazu müssen wir etwas weiter ausholen.

Wir hatten zu Beginn von [§ 11.2](#) die Frage gestellt, welche Elemente man für die Variable t in einem Polynom

$$p = \alpha_n t^n + \alpha_{n-1} t^{n-1} + \dots + \alpha_1 t + \alpha_0$$

sinnvollerweise (in die zugehörige Polynomfunktion) einsetzen kann. Dort hatten wir zunächst Elemente des kommutativen Ringes R eingesetzt, aus dem auch die Koeffizienten $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ stammen. Dabei nutzen wir die „Multiplikation“ im Ring, um für $a \in R$ den Ausdruck

$$\alpha_n \cdot a^n = \alpha_n \cdot \underbrace{a \cdots a}_{n\text{-mal}} \in R$$

zu bilden. Weiterhin nutzen wir die „Addition“ im Ring, um mehrere solcher Terme zu „addieren“.

Es ist jedoch auch möglich, allgemeinere Objekte als Elemente des Koeffizientenringes R einzusetzen. Stammen diese Elemente aus einer Struktur A , dann benötigen wir offenbar

neben einer inneren Verknüpfung $\star: A \times A \rightarrow A$ zur Bildung von $a^n = a \star a \cdots \star a$ für $a \in A$

auch die innere Verknüpfung $+: A \times A \rightarrow A$ zur „Addition“ $\alpha_0 + \alpha_1 \cdot a + \alpha_2 \cdot a^2 + \dots$

sowie eine äußere Verknüpfung $\cdot: R \times A \rightarrow A$ zur Bildung von $\alpha_n \cdot a^n$ für $\alpha_n \in R$ und $a \in A$.

Eine solche Struktur, deren Elemente sich u. a. für das Einsetzen in Polynome eignen, heißt eine **Algebra** über dem (kommutativen) Ring R . Wir benötigen in dieser Vorlesung aber nur Algebren über Körpern.

²Mehr dazu in Vorlesungen zur Numerik, insbesondere zur numerischen linearen Algebra.

Definition 25.1 (Algebra über einem Körper).

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Eine (**assoziative**) **Algebra** (englisch: **(associative) algebra**) $(A, +, \cdot, \star)$ **über** K (kurz: eine K -Algebra) ist eine Menge A mit zwei inneren Verknüpfungen $+: A \times A \rightarrow A$ und $\star: A \times A \rightarrow A$ sowie einer äußeren Verknüpfung $\cdot: K \times A \rightarrow A$, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

- (i) $(A, +, \cdot)$ ist ein K -Vektorraum.
- (ii) $(A, +, \star)$ ist ein Ring.
- (iii) Die Verknüpfung \star , genannt die **Multiplikation** (englisch: **multiplication**) ist verträglich mit der S -Multiplikation, d. h., es gilt ein „**gemischtes**“ **Assoziativgesetz**

$$(\alpha \cdot a) \star b = \alpha \cdot (a \star b) = a \star (\alpha \cdot b) \quad (25.1)$$

für alle $\alpha \in K$ und $a, b \in A$.³

Eine Algebra A heißt **kommutativ** (englisch: **commutative**), wenn \star kommutativ ist.

Eine Algebra A heißt eine **Algebra mit Eins** (englisch: **algebra with unity**) oder eine **unitäre Algebra** (englisch: **unitary algebra**), wenn es in A ein neutrales Element bzgl. \star gibt.⁴ Existiert dann zu $a \in A$ bzgl. \star ein inverses Element, so bezeichnen wir dieses mit a^{-1} . \triangle

Wir vereinbaren, dass \star stärker bindet als $+$ und $-$, sodass wir beispielsweise statt $(a \star b) + (a \star c)$ auch $a \star b + a \star c$ schreiben können. Zwischen \cdot und \star müssen wir wegen (25.2) keine Bindungsstärke festlegen.

Lemma 25.2 (Multiplikation in einer Algebra ist bilinear).

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(A, +, \cdot, \star)$ eine Algebra über K . Dann ist die Multiplikation \star bilinear, d. h., es gilt

$$(\alpha \cdot a + \beta \cdot b) \star c = \alpha \cdot (a \star c) + \beta \cdot (b \star c) \quad (25.2a)$$

$$a \star (\beta \cdot b + \gamma \cdot c) = \beta \cdot (a \star b) + \gamma \cdot (a \star c) \quad (25.2b)$$

für alle $a, b, c \in A$ und alle $\alpha, \beta, \gamma \in K$.

Beweis. Aufgrund der Ringeigenschaft von $(A, +, \star)$ gelten die Distributivgesetze (vgl. (9.1))

$$(a + b) \star c = (a \star c) + (b \star c)$$

$$a \star (b + c) = (a \star b) + (a \star c)$$

für alle $a, b, c \in A$. Wir haben also

$$\begin{aligned} (\alpha \cdot a + \beta \cdot b) \star c &= (\alpha \cdot a) \star c + (\beta \cdot b) \star c && \text{nach Distributivgesetz} \\ &= \alpha \cdot (a \star c) + \beta \cdot (b \star c) && \text{wegen (25.2)} \end{aligned}$$

Analog gilt auch

$$\begin{aligned} a \star (\beta \cdot b + \gamma \cdot c) &= a \star (\beta \cdot b) + a \star (\gamma \cdot c) && \text{nach Distributivgesetz} \\ &= \beta \cdot (a \star b) + \gamma \cdot (a \star c) && \text{wegen (25.2)}. \quad \square \end{aligned}$$

³Zur Verdeutlichung haben wir in (25.2) die S -Multiplikation vorübergehend wieder mit \cdot gekennzeichnet. Wie in Vektorräumen üblich, werden wir das aber ab sofort wieder unterlassen.

⁴Vergleiche die Bezeichnungsweise bei Ringen (Definition 9.1).

Beispiel 25.3 (Algebra über einem Körper).

- (i) Über jedem Körper ist die **Nullalgebra** (englisch: **zero algebra**) die (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmte Algebra mit $A = \{0\}$ und die dadurch eindeutig bestimmten Verknüpfungen $0 + 0 = 0$, $\alpha \cdot 0 = 0$ für $\alpha \in K$ und $0 \star 0 = 0$. Wie beim Nullring (Beispiel 9.2) ist auch die Nullalgebra eine Algebra mit Einselement $1 = 0$. Sie ist die einzige Algebra, in der das Nullelement und das Einselement identisch sind, siehe Lemma 9.3.
- (ii) Für jeden Körper $(K, +, \cdot)$ ist $(K, +, \cdot, \cdot)$ eine kommutative Algebra mit Einselement 1 über sich selbst.
- (iii) Allgemeiner sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(U, +, \cdot)$ ein Unterkörper. Dann ist $(K, +, \cdot_U, \cdot)$ eine kommutative Algebra mit Eins über U . (Dabei ist $\cdot_U: U \times K \rightarrow K$ die als S-Multiplikation dienende Einschränkung der Multiplikation $\cdot: K \times K \rightarrow K$ im Körper K .) Beispielsweise ist \mathbb{R} eine \mathbb{Q} -Algebra, und \mathbb{C} ist eine \mathbb{R} -Algebra und eine \mathbb{Q} -Algebra.
- (iv) Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist die Menge der $n \times n$ -Matrizen $(K^{n \times n}, +, \cdot, \cdot)$ mit der Matrix-Matrix-Multiplikation \cdot ist eine (im Fall $n \geq 2$ nicht-kommutative) Algebra über K mit Einselement I_n .

Die Verknüpfungssymbole \cdot für die S-Multiplikation und \cdot für die Matrix-Matrix-Multiplikation sind identisch, aber wir können sie anhand der Objekte, die verknüpft werden unterscheiden, etwa $\alpha \cdot A$ und $A \cdot B$. Die Verknüpfungssymbole in dieser **Matrixalgebra** (englisch: **matrix algebra**) werden häufig auch gar nicht geschrieben, also αAB statt $\alpha \cdot A \cdot B$.

- (v) Ist $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über K , dann bildet $(\text{End}(V), +, \cdot, \circ)$ mit der Komposition \circ als „Multiplikation“ eine i. A. nicht kommutative Algebra über K mit Einselement id_V , genannt die **Endomorphismenalgebra von V** (englisch: **algebra of endomorphisms**).
- (vi) Ist $(K, +, \cdot)$ ein Körper, dann bilden die Polynome $(K[t], +, \cdot, \cdot)$ mit der Polynommultiplikation \cdot (siehe (11.3)) eine kommutative Algebra über K mit Einselement 1 (Einspolynom), genannt die **Polynomialalgebra** (englisch: **algebra of polynomials**). (**Quizfrage 25.1:** Gilt das auch für die Polynome $K_n[t]$ vom Höchstgrad $n \in \mathbb{N}_0$?)
- (vii) Ist X eine beliebige Menge, $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(A, +, \cdot, \star)$ eine Algebra über K , dann bildet die Menge der Funktionen

$$A^X = \{f: X \rightarrow A\}$$

mit den punktweisen Addition, S-Multiplikation und inneren Multiplikation eine Algebra über K . Diese erbt die möglicherweise vorhandene Kommutativität und das neutrale Element bzgl. \star von A .

- (viii) Insbesondere bildet also die Menge der Funktionen $K^X = \{f: X \rightarrow K\}$ eine kommutative Algebra mit Eins über K . △

Definition 25.4 (Unteralgebra, vgl. Definition 7.31 einer Untergruppe).

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(A, +, \cdot, \star)$ eine Algebra über K .

- (i) Eine Teilmenge $U \subseteq A$ heißt ein **Unteralgebra** (englisch: **subalgebra**) von $(A, +, \cdot, \star)$, wenn U bzgl. $+$, \cdot und \star abgeschlossen ist und wenn $(U, +, \cdot, \star)$ selbst wieder ein Algebra ist.

Beachte: Das ist genau dann erfüllt, wenn $(U, +, \cdot)$ ein Unterraum von $(A, +, \cdot)$ und wenn $(U, +, \star)$ in Unterring von $(A, +, \star)$ ist.

- (ii) Ist $(A, +, \cdot, \star)$ eine Algebra mit Einselement e , dann fordern wir für eine **Unteralgebra mit Eins** (englisch: **subalgebra with unity**) $(U, +, \cdot, \star)$ zusätzlich zu Eigenschaft (i), dass $e \in U$ liegt.⁵

Beachte: Es reicht nicht aus, zu fordern, dass (U, \cdot) irgendein neutrales Element besitzt.

- (iii) Eine Unteralgebra $(U, +, \cdot, \star)$ von $(A, +, \cdot, \star)$ heißt **echt** (englisch: **proper subalgebra**), wenn $U \subsetneq A$ gilt. △

Definition 25.5 (Algebrahomomorphismus, vgl. Definition 8.1 eines Halbgruppenhomomorphismus).
Es seien $(A_1, +_1, \cdot_1, \star)$ und $(A_2, +_2, \cdot_2, \square)$ zwei Algebren über demselben Körper K .

- (i) Eine Abbildung $f: A_1 \rightarrow A_2$ heißt **strukturverträglich** oder ein **(Algebra-)Homomorphismus** (englisch: **algebra homomorphism**) von $(A_1, +_1, \cdot_1, \star)$ in $(A_2, +_2, \cdot_2, \square)$, wenn gilt:

$$f(a +_1 b) = f(a) +_2 f(b) \quad \text{für alle } a, b \in A_1, \quad (25.3a)$$

$$f(\alpha \cdot_1 a) = \alpha \cdot_2 f(a) \quad \text{für alle } \alpha \in K \text{ und } a \in A_1. \quad (25.3b)$$

$$f(a \star b) = f(a) \square f(b) \quad \text{für alle } a, b \in A_1. \quad (25.3c)$$

Besitzen beide Algebren ein Einselement e_{A_1} bzw. e_{A_2} und fordern wir zusätzlich

$$f(e_{A_1}) = e_{A_2} \quad (25.3d)$$

dann nennen wir f genauer einen **Homomorphismus von Algebren mit Eins** (englisch: **homomorphism of algebras with unity**).

- (ii) Wie in Definition 8.1 sprechen wir im Fall $(A_1, +_1, \cdot_1, \star) = (A_2, +_2, \cdot_2, \square)$ von einem **(Algebra-)Endomorphismus** (englisch: **algebra endomorphism**) bzw. von einem **Endomorphismus einer Algebra mit Eins** (englisch: **endomorphism of an algebra with unity**).
- (iii) Ist $f: A_1 \rightarrow A_2$ bijektiv, so heißt f auch **strukturertretend** oder ein **(Algebra-)Isomorphismus** (englisch: **algebra isomorphism**) bzw. ein **Isomorphismus von Algebren mit Eins** (englisch: **isomorphism of an algebra with unity**). In diesem Fall nennen wir $(A_1, +_1, \cdot_1, \star)$ und $(A_2, +_2, \cdot_2, \square)$ auch zueinander **isomorphe Algebren** (englisch: **isomorphic algebras**) bzw. zueinander **isomorphe Algebren mit Eins** (englisch: **isomorphic algebras with unity**) und schreiben

$$(A_1, +_1, \cdot_1, \star) \cong (A_2, +_2, \cdot_2, \square).$$

- (iv) Im Fall $(A_1, +_1, \cdot_1, \star) = (A_2, +_2, \cdot_2, \square)$ und $f: A_1 \rightarrow A_2$ bijektiv sprechen wir auch von einem **(Algebra-)Automorphismus** (englisch: **algebra automorphism**) bzw. von einem **Automorphismus einer Algebra mit Eins** (englisch: **automorphism of an algebra with unity**).
- (v) Das **Bild** (englisch: **image**) und der **Kern** (englisch: **kernel**) eines Algebrahomomorphismus $f: A_1 \rightarrow A_2$ sind definiert als

$$\text{Bild}(f) := \{f(x) \in A_2 \mid x \in A_1\} = f(A_1), \quad (25.4)$$

$$\text{Kern}(f) := \{x \in A_1 \mid f(x) = 0_{A_2}\} = f^{-1}(\{0_{A_2}\}). \quad \Delta$$

Beispiel 25.6 (Algebrahomomorphismus).

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$. Dann sind die Algebra der Endomorphismen von V $(\text{End}(V), +, \cdot, \circ)$ und die Algebra der Matrizen $(K^{n \times n}, +, \cdot, \cdot)$ isomorph als Algebren mit Eins. Für jede Basis B_V von V ist $f \mapsto \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f)$ ein Isomorphismus. △

⁵Dadurch ist die Unteralgebra $(U, +, \cdot, \star)$ dann natürlich selbst wieder ein Algebra mit dem Einselement e .

Wir kommen zurück zu unserer Motivation vom Anfang des § 25, nämlich Elemente einer K -Algebra $(A, +, \cdot, \star)$ in ein Polynom aus $K[t]$ einzusetzen. Es sei dazu

$$p = \sum_{i=0}^n \alpha_i t^i$$

ein Polynom mit Koeffizienten in K . Wir setzen voraus, dass A ein Einselement $e \in A$ besitzt und definieren (vgl. [Bemerkung 7.13](#)) für $a \in A$

$$\begin{aligned} a^0 &:= e \\ a^1 &:= a \\ a^2 &:= a \star a \\ a^3 &:= a \star a \star a \end{aligned}$$

und damit allgemein a^n für $n \in \mathbb{N}_0$. (**Quizfrage 25.2:** Welche Eigenschaft der Algebra A ist für die Wohldefiniertheit dieser abkürzenden Schreibweise wichtig?)

Damit können wir nun die durch p induzierte **Polynomfunktion** (vgl. (11.8)) $\tilde{p}_A: A \rightarrow A$ definieren als

$$\tilde{p}_A(a) := \sum_{i=0}^n \alpha_i a^i = \alpha_0 e + \alpha_1 a + \cdots + \alpha_{n-1} a^{n-1} + \alpha_n a^n \in A. \quad (25.5)$$

Definition 25.7 (Einsetzungshomomorphismus).

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(A, +, \cdot, \star)$ eine Algebra über K mit Eins. Für $a \in A$ heißt die Abbildung

$$\varphi_a: K[t] \ni p \mapsto \tilde{p}_A(a) \in A \quad (25.6)$$

der **Einsetzungshomomorphismus** (englisch: substitution homomorphism) oder der **Auswertungshomomorphismus** (englisch: evaluation homomorphism) **zu** a . △

Lemma 25.8 (Einsetzungshomomorphismus ist Homomorphismus von Algebren mit Eins).

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(A, +, \cdot, \star)$ eine Algebra über K mit Eins. Für jedes $a \in A$ ist der Einsetzungshomomorphismus $\varphi_a: K[t] \rightarrow A$ ein Homomorphismus von Algebren mit Eins.

Beweis. $(K[t], +, \cdot, \cdot)$ ist eine Algebra über dem Körper K mit Eins ([Beispiel 25.3](#)). Dasselbe gilt nach Voraussetzung für $(A, +, \cdot, \star)$. Es sei $a \in A$. Weiter seien $p, q \in K[t]$ und $\alpha \in K$. Wir füllen p oder q ggf. mit Nullkoeffizienten auf, sodass wir p und q in der Form

$$p = \sum_{i=0}^n \alpha_i t^i \quad \text{und} \quad q = \sum_{i=0}^n \beta_i t^i$$

schreiben können, wobei die Koeffizienten $\alpha_i, \beta_i \in K$ liegen.

Wir müssen die drei Bedingungen auf (25.3) nachweisen. Es gilt

$$\begin{aligned}
 \varphi_a(p+q) &= \varphi_a\left(\sum_{i=0}^n \alpha_i t^i + \sum_{i=0}^n \beta_i t^i\right) && \text{wegen der Form von } p \text{ und } q \\
 &= \varphi_a\left(\sum_{i=0}^n (\alpha_i + \beta_i) t^i\right) && \text{nach Definition der Addition von Polynomen (11.3a)} \\
 &= \sum_{i=0}^n (\alpha_i + \beta_i) a^i && \text{nach Definition von } \varphi_a, \text{ siehe (25.5) und (25.6)} \\
 &= \sum_{i=0}^n \alpha_i a^i + \sum_{i=0}^n \beta_i a^i && \text{weil } (A, +, \cdot) \text{ ein Vektorraum ist} \\
 &= \varphi_a(p) + \varphi_a(q) && \text{nach Definition von } \varphi_a, \text{ siehe (25.5) und (25.6)}.
 \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
 \varphi_a(\alpha p) &= \varphi_a\left(\alpha \sum_{i=0}^n \alpha_i t^i\right) && \text{wegen der Form von } p \text{ und } q \\
 &= \varphi_a\left(\sum_{i=0}^n (\alpha \alpha_i) t^i\right) && \text{nach Definition der S-Multiplikation von Polynomen (12.6)} \\
 &= \sum_{i=0}^n (\alpha \alpha_i) a^i && \text{nach Definition von } \varphi_a, \text{ siehe (25.5) und (25.6)} \\
 &= \alpha \sum_{i=0}^n \alpha_i a^i && \text{weil } (A, +, \cdot) \text{ ein Vektorraum ist} \\
 &= \alpha \varphi_a(p) && \text{nach Definition von } \varphi_a, \text{ siehe (25.5) und (25.6)}.
 \end{aligned}$$

Schließlich gilt

$$\begin{aligned}
 \varphi_a(p \cdot q) &= \varphi_a\left(\left(\sum_{i=0}^n \alpha_i t^i\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^n \beta_i t^i\right)\right) && \text{wegen der Form von } p \text{ und } q \\
 &= \varphi_a\left(\sum_{k=0}^{2n} \sum_{i=0}^k \alpha_i \beta_{k-i} t^k\right) && \text{nach Def. der Multipl. von Polynomen (11.3b) und (11.3c)} \\
 &= \sum_{k=0}^{2n} \sum_{i=0}^k \alpha_i \beta_{k-i} a^k && \text{nach Definition von } \varphi_a, \text{ siehe (25.5) und (25.6)} \\
 &= \left(\sum_{i=0}^n \alpha_i a^i\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^n \beta_i a^i\right) && \text{weil } (A, +, \cdot) \text{ ein Ring ist} \\
 &= \varphi_a(p) \cdot \varphi_a(q) && \text{nach Definition von } \varphi_a, \text{ siehe (25.5) und (25.6)}
 \end{aligned}$$

Schließlich wird durch φ_a das Einspolynom in $K[t]$ auf das Einselement in $e \in A$ abgebildet:

$$\begin{aligned}
 \varphi_a(1 t^0) &= 1 a^0 && \text{nach Definition von } \varphi_a, \text{ siehe (25.5) und (25.6)} \\
 &= 1 e && \text{nach Definition von } a^0 \\
 &= e && \text{weil } (A, +, \cdot) \text{ ein Vektorraum ist.} \quad \square
 \end{aligned}$$

Quizfrage 25.3: Warum wird die Kommutativität der Algebra A in Lemma 25.8 nicht benötigt?

Bemerkung 25.9 (Festlegung des Einsetzungshomomorphismus).

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(A, +, \cdot, \star)$ eine Algebra über K mit Einselement e . Der Einsetzungshomomorphismus zu $a \in A$, $\varphi_a: K[t] \rightarrow A$, ist durch

$$\varphi_a(1) = e \quad (\text{das Einspolynom } 1 \in K[t] \text{ wird auf das Einselement } e \in A \text{ abgebildet}) \quad (25.7a)$$

$$\varphi_a(t) = a \quad (\text{das Polynom } t \in K[t] \text{ wird auf das Element } a \in A \text{ abgebildet}) \quad (25.7b)$$

eindeutig festgelegt. \triangle

Bemerkung 25.10 (induzierte Polynomfunktion, vgl. [Bemerkung 11.17](#)).

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(A, +, \cdot, \star)$ eine Algebra über K mit Eins. Die Menge A^A der Funktionen $A \rightarrow A$, ausgestattet mit den punktweisen Verknüpfungen $+$, \cdot und \star aus A , bildet eine K -Algebra mit Eins $(A^A, +, \cdot, \star)$ ([Beispiel 25.3](#)). Die Abbildung

$$\Phi: (K[t], +, \cdot, \cdot) \ni p \mapsto \tilde{p}_A \in (A^A, +, \cdot, \star) \quad (25.8)$$

ist ein Homomorphismus von zwei Algebren mit Eins.

Wie wir in [Bemerkung 11.17](#) bereits gesehen haben, ist Φ i. A. nicht injektiv. Verschiedene Polynome können also dieselbe Polynomfunktion induzieren. Es gilt jedoch das Analogon von [Folgerung 11.23](#): Φ ist injektiv, falls K unendlich und A nicht die Nullalgebra ist.

Φ ist i. A. auch nicht surjektiv. $\text{Bild}(\Phi)$ ist die Unteralgebra mit Eins der Polynomfunktionen der Algebra mit Eins $(A^A, +, \cdot, \star)$. \triangle

Beispiel 25.11 (Einsetzen von Algebraelementen in ein Polynom).

- (i) Wir betrachten einen Körper $(K, +, \cdot)$ und die K -Algebra mit Eins der Matrizen $(K^{n \times n}, +, \cdot, \cdot)$. Das Einsetzen einer Matrix $A \in K^{n \times n}$ in das Polynom $p = t^2 - 1$ ergibt

$$\tilde{p}(A) = A^2 - A^0 = A \cdot A - I.$$

- (ii) Wir betrachten einen Körper $(K, +, \cdot)$, einen K -Vektorraum $(V, +, \cdot)$ und die K -Algebra mit Eins der Endomorphismen $(\text{End}(V), +, \cdot, \circ)$. Das Einsetzen eines Endomorphismus $f \in \text{End}(V)$ in das Polynom $p = t^2 - 1$ ergibt

$$\tilde{p}(f) = f^2 - f^0 = f \circ f - \text{id}_V. \quad \triangle$$

Ende der Vorlesung 14

Ende der Woche 7

Wir schließen den Abschnitt mit der Beobachtung, dass Algebrahomomorphismen mit Polynomen kommutieren, genauer:

Satz 25.12 (Algebrahomomorphismen kommutieren mit Polynomen).

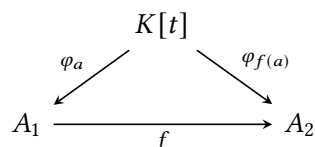
Es sei K ein Körper und A_1, A_2 zwei Algebren mit Eins über K . Weiter sei $f: A_1 \rightarrow A_2$ ein Homomorphismus von Algebren mit Eins und $a \in A_1$. Dann gilt für die Einsetzungshomomorphismen φ_a von A_1 und $\psi_{f(a)}$ von A_2 :

$$f \circ \varphi_a = \psi_{f(a)}. \quad (25.9)$$

Das bedeutet, für jedes $a \in A_1$ und jedes Polynom $p \in K[t]$ gilt:

$$f(\tilde{p}(a)) = \tilde{p}(f(a)). \quad (25.10)$$

Mit anderen Worten, das folgende Diagramm kommutiert:



Beweis. Wir zeigen zunächst, dass (25.9) und (25.10) dieselben Aussagen sind. Nach Definition 25.7 bildet $\varphi_a: K[t] \rightarrow A_1$ ab, und zwar durch

$$\varphi_a(p) = \tilde{p}(a).$$

Nach Definition der Komposition bildet also $f \circ \varphi_a: K[t] \rightarrow A_2$ ab, und zwar durch

$$(f \circ \varphi_a)(p) = f(\varphi_a(p)) = f(\tilde{p}(a)).$$

Für $b \in A_2$ bildet wiederum nach Definition 25.7 $\psi_b: K[t] \rightarrow A_2$ ab, und zwar durch

$$\psi_b(p) = \tilde{p}(b),$$

speziell für $b = f(a)$ erhalten wir also

$$\psi_{f(a)}(p) = \tilde{p}(f(a)).$$

Die Aussage, dass die Abbildungen in (25.9) für beliebige Elemente $p \in K[t]$ übereinstimmen, ist also gerade (25.10).

Wir zeigen nun (25.10). Dazu sei $p = \sum_{i=0}^n \alpha_i t^i \in K[t]$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 f(\tilde{p}(a)) &= f\left(\sum_{i=0}^n \alpha_i a^i\right) \\
 &= \sum_{i=0}^n f(\alpha_i a^i) \quad \text{da } f \text{ additiv ist, siehe (25.3a)} \\
 &= \sum_{i=0}^n \alpha_i f(a^i) \quad \text{da } f \text{ homogen ist, siehe (25.3b)} \\
 &= \sum_{i=0}^n \alpha_i f(a)^i \quad \text{da } f \text{ mit der Multiplikation verträglich ist, siehe (25.3c)} \\
 &= \tilde{p}(f(a)),
 \end{aligned}$$

was zu zeigen war. □

§ 26 DER SATZ VON CAYLEY-HAMILTON

Satz 26.1 (Satz von Cayley-Hamilton⁶).

Es sei K ein Körper.

(i) Es sei $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt $\tilde{\chi}_A(A) = 0 \in K^{n \times n}$.

⁶englisch: Cayley-Hamilton theorem

(ii) Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei $f \in \text{End}(V)$. Dann gilt $\widetilde{\chi}_f(f) = 0 \in \text{End}(V)$.

Die Aussage (i) besagt also, dass eine beliebige Matrix A , eingesetzt in ihr eigenes charakteristisches Polynom, immer die Nullmatrix ergibt. Aussage (ii) bedeutet, dass ein beliebiger Endomorphismus f eines endlich-dimensionalen Vektorraumes, eingesetzt in sein eigenes charakteristisches Polynom, immer den Nullendomorphismus ergibt. Man sagt auch, das charakteristische Polynom **annulliere** seine Matrix bzw. seinen Endomorphismus.

Beweis. Wir beweisen die Aussage hier unter der Voraussetzung Fall $n \geq 1$. (**Quizfrage 26.1:** Warum gilt sie auch im Fall $n = 0$?) **Aussage (i):** Wir fassen $C := \lambda I - A$ als Matrix in $K(\lambda)^{n \times n}$ über dem Körper $K(\lambda)$ auf. Wir betrachten die Adjunkte $\text{adj}(C) \in K(\lambda)^{n \times n}$. Nach Lemma 23.15 gilt dann

$$\text{adj}(C) C = \text{adj}(C) (\lambda I - A) = \det(C) I = \chi_A I \in K(\lambda)^{n \times n}. \tag{26.1}$$

Die Terme $C = \lambda I - A$ sowie I in dieser Gleichung sind Elemente von $K(\lambda)^{n \times n}$, und χ_A ist Element des Körpers $K(\lambda)$.

Die Einträge der Adjunkten $\text{adj}(C)$ sind nach Definition 23.12 vorzeichenbehaftete Unterdeterminanten von C . Die Einträge von $\text{adj}(C)$ liegen daher in $K(\lambda)$ und $\text{adj}(C)$ insgesamt in $K(\lambda)^{n \times n}$. Genauer liegen die Einträge $(\text{adj}(C))_{ij} = \widetilde{c}_{ji} = \det((C)_{\neq i, \neq j})$ sogar im Unterring $K[\lambda] \subseteq K(\lambda)$, sind also rationale Ausdrücke mit Nenner $1 \in K \subseteq K(\lambda)$, weil die Einträge von C im Unterring $K[\lambda]$ liegen und dieser multiplikativ und additiv abgeschlossen ist. Als Unterdeterminanten von C sind die Einträge in $\text{adj}(C)$ schließlich Polynome vom Höchstgrad $n - 1$.

Wir können daher $\text{adj} C \in K(\lambda)^{n \times n}$ als Linearkombination

$$\text{adj}(C) = \sum_{j=0}^{n-1} \underbrace{\lambda^j}_{\in K(\lambda)} \underbrace{B_j}_{\in K^{n \times n} \subseteq K(\lambda)^{n \times n}}$$

im Vektorraum $K(t)^{n \times n}$ schreiben. Alle weiteren Rechnungen finden in der Algebra $K(\lambda)^{n \times n}$ statt. Es gilt

$$\begin{aligned} \chi_A I &= \text{adj}(C) C && \text{wegen (26.1)} \\ &= \left(\sum_{j=0}^{n-1} \lambda^j B_j \right) C \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^j B_j (\lambda I - A) && \text{nach Definition von } C \text{ und Distributivgesetz} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^{j+1} B_j - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^j B_j A && \text{nach Distributivgesetz und (25.2)} \\ &= \sum_{j=0}^n \lambda^j (B_{j-1} - B_j A) && \text{mit den Definitionen } B_{-1} = B_n := 0 \in K^{n \times n}. \end{aligned} \tag{26.2}$$

Das charakteristische Polynom χ_A hat eine Darstellung

$$\chi_A = \sum_{j=0}^n c_j \lambda^j$$

mit Koeffizienten $c_j \in K$, insbesondere $c_n = 1$. Es gilt

$$\begin{aligned}
 \chi_A I &= \left(\sum_{j=0}^n c_j \lambda^j \right) I \\
 &= \sum_{j=0}^n c_j \lambda^j I \quad \text{nach Distributivgesetz} \\
 &= \sum_{j=0}^n \lambda^j (c_j I) \quad \text{nach (25.2)}. \tag{26.3}
 \end{aligned}$$

Wir vergleichen jetzt die beiden rechten Seiten in (26.2) und (26.3). Beides sind Matrizen in $K(\lambda)^{n \times n}$. Gleichheit liegt genau dann vor, wenn alle Einträge übereinstimmen. Jeder Eintrag dieser Matrizen ist ein Element von $K(\lambda)$, genauer sogar ein Polynom in $K_n[\lambda]$. Diese stimmen genau dann überein, wenn alle Koeffizienten übereinstimmen. Führen wir den Koeffizientenvergleich für $j = n, n-1, \dots, 1, 0$ durch, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
 I &= c_n I = B_{n-1} - B_n A = B_{n-1} && \text{im Fall } j = n \\
 c_j I &= B_{j-1} - B_j A && \text{im Fall } j = n-1, \dots, 1 \\
 c_0 I &= B_{-1} - B_0 A = -B_0 A && \text{im Fall } j = 0.
 \end{aligned}$$

Wir setzen nun A in die Polynomfunktion zu χ_A ein:

$$\begin{aligned}
 \widetilde{\chi}_A(A) &= \sum_{j=0}^n c_j A^j = \sum_{j=0}^n c_j I A^j \\
 &= c_n I A^n + \left(\sum_{j=1}^{n-1} c_j I A^j \right) + c_0 I A^0 \\
 &= B_{n-1} A^n + \left(\sum_{j=1}^{n-1} (B_{j-1} - B_j A) A^j \right) - B_0 A && \text{Einsetzen der Koeffizienten } c_j \\
 &= B_{n-1} A^n + \left(\sum_{j=1}^{n-1} B_{j-1} A^j \right) - \left(\sum_{j=1}^{n-1} B_j A^{j+1} \right) - B_0 A \\
 &= B_{n-1} A^n + \left(\sum_{j=0}^n B_j A^{j+1} \right) - \left(\sum_{j=1}^{n-1} B_j A^{j+1} \right) - B_0 A \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Der Beweis von **Aussage (ii)** ist Gegenstand von **Hausaufgabe II-8.1**. □

Bemerkung 26.2 (zu **Satz 26.1**).

Folgende Argumentation zum Beweis des **Satzes von Cayley-Hamilton 26.1** wäre falsch: Das Einsetzen von A an Stelle von λ in das charakteristische Polynom $\chi_A = \det(\lambda I - A)$ ergibt

$$\widetilde{\chi}_A(A) = \det(AI - A) = \det(A - A) = \det(0) = 0.$$

Quizfrage 26.2: Wo liegt der Fehler? △

Beispiel 26.3 (Satz von Cayley-Hamilton).

Die Matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ besitzt das charakteristische Polynom

$$\chi_A = \det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ 1 & \lambda - 3 \end{pmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda + 3) + 1 = \lambda^2 + \lambda - 5.$$

Das Einsetzen von A ergibt

$$\begin{aligned} \widetilde{\chi}_A(A) &= A^2 + A - 5I \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

wie erwartet. △

Folgerung 26.4 (A^{-1} ist ein Polynom in A).

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Wenn A invertierbar ist, dann gibt es ein Polynom $p \in K_{n-1}[t]$ mit der Eigenschaft⁷

$$A^{-1} = \widetilde{p}(A). \quad (26.4)$$

Beweis. Das charakteristische Polynom hat nach Satz 24.20 die Form

$$\chi_A = \sum_{i=0}^n \alpha_i \lambda^i \in K_n[\lambda].$$

Für den niedrigsten Koeffizienten gilt $\alpha_0 = (-1)^n \det(A) \neq 0$, da A invertierbar ist. Setzen wir die Matrix A ein, so ergibt sich nach dem Satz von Cayley-Hamilton 26.1:

$$0 = \widetilde{\chi}_A(A) = \alpha_n A^n + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0 I,$$

also

$$\alpha_0 I = - \sum_{j=1}^n \alpha_j A_j = A \left(- \sum_{j=1}^n \alpha_j A_{j-1} \right).$$

Die Multiplikation mit α_0^{-1} zeigt die Behauptung. □

Beispiel 26.5 (A^{-1} ist ein Polynom in A).

Wir betrachten die Matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, die das charakteristische Polynom

$$\chi_A = \lambda^2 + \lambda - 5$$

besitzt, siehe Beispiel 26.3. Nach dem Satz von Cayley-Hamilton 26.1 gilt also $A^2 + A - 5I = 0$ und damit

$$I = \frac{1}{5}A^2 + \frac{1}{5}A = A \left(\frac{1}{5}A + \frac{1}{5}I \right).$$

Das bedeutet:

$$A^{-1} = \frac{1}{5}A + \frac{1}{5}I. \quad \triangle$$

⁷Im Fall $n = 0$ ist mit $p \in K_{-1}[t]$ das Nullpolynom gemeint.

§ 27 IDEALE IN RINGEN

Ideale in Ringen sind spezielle Unterringe, die dieselbe Funktion einnehmen wie Normalteiler in Gruppen. Mit ihrer Hilfe können wir beispielsweise Faktorringe definieren und einen Homomorphiesatz für Ringe erhalten.

Definition 27.1 (Ideal, vgl. Definition 8.10).

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring.

- (i) Eine Teilmenge $J \subseteq R$ heißt ein **Ideal** (englisch: **ideal**) von $(R, +, \cdot)$, wenn J ein Unterring von R ist und zusätzlich

$$RJ \subseteq J \quad \text{und} \quad JR \subseteq J \quad (27.1)$$

gilt.⁸ Manchmal notiert man die Eigenschaft, dass $(J, +, \cdot)$ ein Ideal des Ringes $(R, +, \cdot)$ ist, als $(J, +, \cdot) \trianglelefteq (R, +, \cdot)$.

Beachte: Das ist genau dann erfüllt, wenn $(J, +)$ eine Untergruppe von $(R, +)$ ist und wenn (27.1) gilt, denn (27.1) impliziert bereits, dass J bzgl. \cdot abgeschlossen ist.

- (ii) Ein Ideal $(J, +, \cdot)$ von $(R, +, \cdot)$ heißt **echt** (englisch: **proper ideal**), wenn $J \subsetneq R$ gilt. △

Lemma 27.2 (Kerne von Ringhomomorphismen sind Ideale).

Es seien $(R_1, +, \cdot)$ und $(R_2, +, \cdot)$ Ringe und $f: R_1 \rightarrow R_2$ ein Homomorphismus. Dann gilt:

$$\text{Kern}(f) = \{a \in R_1 \mid f(a) = 0\}$$

ist ein Ideal von R_1 .

Beweis. Nach Lemma 8.7 ist $\text{Kern}(f)$ eine Untergruppe von $(R_1, +)$. Es sei nun $a \in R$ und $j \in \text{Kern}(f)$. Dann gilt

$$f(a \cdot j) = f(a) \cdot f(j) = f(a) \cdot 0 = 0$$

nach Lemma 9.3 und analog

$$f(j \cdot a) = f(j) \cdot f(a) = 0 \cdot f(a) = 0.$$

Also gehören $a \cdot j$ und $j \cdot a$ wieder zu J . □

Beispiel 27.3 (Ideal).

- (i) In jedem Ring $(R, +, \cdot)$ sind $\{0\}$ (das **Nullideal**, englisch: **zero ideal**) und R (das **Einsideal**, englisch: **unit ideal**) Ideale. Diese heißen die **trivialen Ideale** (englisch: **trivial ideals**).
- (ii) Für $m \in \mathbb{N}$ ist $(m\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ein Ideal von $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.
- (iii) Es sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring. Für $m \in \mathbb{N}_0$ ist $\{p \in R[t] \mid p = \alpha_m t^m + \alpha_{m+1} t^{m+1} + \dots\} = t^m R[t]$ ein Ideal von $(R[t], +, \cdot)$. △

Lemma 27.4 (Durchschnitt von Idealen).

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring und $(J_i, +, \cdot)_{i \in I}$ eine Familie von Idealen mit der nichtleeren Indexmenge I . Dann ist auch $\bigcap_{i \in I} J_i$ ein Ideal in J .

⁸Ausgeschrieben heißt das also: $a \in R$ und $j \in J$ impliziert $aj \in J$ und $ja \in J$.

Beweis. Der Beweis ist Gegenstand von [Hausaufgabe II-8.2](#). □

Definition 27.5 (erzeugtes Ideal, Hauptideal).

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring und $E \subseteq R$.

(i) Dann heißt

$$(E) := \bigcap \{J \mid (J, +, \cdot) \text{ ist Ideal von } (R, +, \cdot) \text{ und } E \subseteq J\} \quad (27.2)$$

das von E **erzeugte Ideal** (englisch: **ideal generated by E**) in $(R, +, \cdot)$.

(ii) Ist speziell $E = \{a\}$ für ein $a \in R$, so schreiben wir auch (a) statt $(\{a\})$ und nennen (a) das **von a erzeugte Hauptideal** (englisch: **principal ideal**).

(iii) Ein Ideal $(J, +, \cdot)$ heißt ein **Hauptideal**, wenn es ein $a \in R$ gibt, sodass gilt: $(a) = J$. △

Satz 27.6 (Darstellung des erzeugten Ideals).

(i) Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring, $E \subseteq R$ und $a \in R$. Dann gilt für das von E bzw. von a erzeugte Ideal:

$$(E) = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \mid \exists n \in \mathbb{N}_0 \forall i = 1, \dots, n (a_i \in E \cup -E \cup RE \cup ER \cup RER) \right\}, \quad (27.3a)$$

$$(a) = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \mid \exists n \in \mathbb{N}_0 \forall i = 1, \dots, n (a_i \in \{\pm a\} \cup Ra \cup aR \cup RaR) \right\}. \quad (27.3b)$$

(ii) Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring **mit Eins**, $E \subseteq R$ und $a \in R$. Dann gilt für das von E bzw. von a erzeugte Ideal:

$$(E) = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \mid \exists n \in \mathbb{N}_0 \forall i = 1, \dots, n (a_i \in RER) \right\}, \quad (27.4a)$$

$$(a) = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \mid \exists n \in \mathbb{N}_0 \forall i = 1, \dots, n (a_i \in RaR) \right\}. \quad (27.4b)$$

Insbesondere ist $(1) = R$.

(iii) Es sei $(R, +, \cdot)$ ein **kommutativer Ring**, $E \subseteq R$ und $a \in R$. Dann gilt für das von E bzw. von a erzeugte Ideal:

$$(E) = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \mid \exists n \in \mathbb{N}_0 \forall i = 1, \dots, n (a_i \in E \cup -E \cup RE) \right\}, \quad (27.5a)$$

$$(a) = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \mid \exists n \in \mathbb{N}_0 \forall i = 1, \dots, n (a_i \in \{\pm a\} \cup Ra) \right\}. \quad (27.5b)$$

(iv) Es sei $(R, +, \cdot)$ ein **kommutativer Ring mit Eins**, $E \subseteq R$ und $a \in R$. Dann gilt für das von E bzw. von a erzeugte Ideal:

$$(E) = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \mid \exists n \in \mathbb{N}_0 \forall i = 1, \dots, n (a_i \in RE) \right\}, \quad (27.6a)$$

$$(a) = Ra. \quad (27.6b)$$

Insbesondere ist $(1) = R$.

In jedem Fall gilt $(\emptyset) = (0) = \{0\}$.

Beweis. Der Beweis ist Gegenstand von [Hausaufgabe II-8.2](#). □

Es gibt Ringe, in denen jedes Ideal ein Hauptideal ist, also von einem einzigen Ringelement erzeugt werden kann. Integritätsringe (kommutative, nullteilerfreie Ringe mit Eins ungleich dem Nullring) mit dieser Eigenschaft heißen **Hauptidealringe** (englisch: [principal ideal domains](#)).

Satz 27.7 (der Polynomring über einem Körper ist ein Hauptidealring).

Es sei K in Körper. Dann gilt:

(i) Zu jedem Ideal J in $K[t]$ existiert ein $p \in K[t]$ mit der Eigenschaft $J = (p)$.

(ii) Das Polynom p aus [Aussage \(i\)](#) ist bis auf einen Faktor $\alpha \in K$ eindeutig bestimmt.

Es gilt also: Sind $p_1, p_2 \in K[t]$ zwei Polynome mit der Eigenschaft $J = (p_1) = (p_2)$, dann gilt $p_2 = \alpha p_1$ mit einem $\alpha \in K \setminus \{0\}$.

(iii) Ist $J \neq \{0\}$, dann ist p aus [Aussage \(i\)](#) eines der Polynome minimalen Grades in $J \setminus \{0\}$.

(iv) Ist $J = \{0\}$, dann gilt $p = 0$.

Beweis. [Aussage \(i\)](#): Im Fall $J = \{0\}$ wählen wir $p = 0$. Nach [\(27.3b\)](#) gilt $J = (p)$.

Nun sei $J \neq \{0\}$, dann besitzt die Menge $\{\deg(p) \mid p \in J \setminus \{0\}\}$ ein Minimum $m \in \mathbb{N}_0$. Es sei $p \in J \setminus \{0\}$ ein Polynom mit $\deg(p) = m$.

Schritt 1: $(p) \subseteq J$:

Wegen $p \in J$ haben wir $(p) \subseteq (J)$, und da J bereits in Ideal ist, gilt $(J) = J$.

Schritt 2: $J \subseteq (p)$:

Es sei $\bar{p} \in J$ beliebig. Nach [Satz 11.14](#) gibt es (eindeutig bestimmte) Polynome $q, r \in K[t]$ mit $\deg(r) < \deg(p)$ und

$$\bar{p} = qp + r.$$

Daraus folgt

$$r = \bar{p} - qp.$$

Weil J ein Ideal ist und $\bar{p}, p \in J$ liegen, ist auch $r \in J$. (**Quizfrage 27.1:** Klar?) Da aber p ein Element minimalen Grades von $J \setminus \{0\}$ ist, muss $r = 0$ gelten, d. h., wir haben $\bar{p} = qp \in K[t]J \subseteq J$.

[Aussage \(ii\)](#): Es gelte $J = (p_1) = (p_2)$. Da $K[t]$ ein kommutativer Ring mit Eins ist, gilt nach [Satz 27.6](#) $(p_1) = K[t]p_1$ und $(p_2) = K[t]p_2$. Aus $p_1 \in (p_2)$ folgt also die Existenz von $q_1 \in K[t]$ mit

$$p_1 = q_1 p_2,$$

und analog folgt aus $p_2 \in (p_1)$ die Existenz von $q_2 \in K[t]$ mit

$$p_2 = q_2 p_1.$$

Zusammen haben wir also

$$p_1 = q_1 q_2 p_1 \quad \text{und damit} \quad p_1 (q_1 q_2 - 1) = 0.$$

$K[t]$ ist nullteilerfrei (Folgerung 11.11). Es muss also $p_1 = 0$ oder $q_1 q_2 = 1$ gelten. Im ersten Fall folgt $J = \{0\}$ und damit auch $p_2 = 0$. Im zweiten Fall folgt aus Lemma 11.10 $\deg(q_1 q_2) = \deg(q_1) + \deg(q_2) = \deg(1) = 0$. Daraus folgt $\deg(q_1) = \deg(q_2) = 0$. Das heißt aber $q_2 = \alpha \in K$ mit $\alpha \neq 0$ und $q_1 = \alpha^{-1}$. Damit folgt wie behauptet $p_2 = \alpha p_1$.

Aussage (iii): Im Beweis von Aussage (i) wurde p als ein Polynom in $J \setminus \{0\}$ minimalen Grades gewählt. Aussage (ii) zeigt, dass jedes andere erzeugende Polynom von J ein Vielfaches von p ist (mit Faktor ungleich 0), also ebenfalls ein Polynom in $J \setminus \{0\}$ minimalen Grades.

Aussage (iv): Diese Aussage ist klar. □

Ende der Vorlesung 15

§ 28 DAS MINIMALPOLYNOM

Wir betrachten zu gegebener Matrix $A \in K^{n \times n}$ die Menge derjenigen Polynome, die A beim Einsetzen auf die Nullmatrix abbilden (die A annullieren). Das charakteristische Polynom ist nach dem Satz von Cayley-Hamilton 26.1 eines davon, aber wir interessieren uns für das Polynom kleinsten Grades. Wir untersuchen dazu zunächst die Struktur dieser Menge von Polynomen mit der genannten Eigenschaft:

Lemma 28.1 (die annullierenden Polynome bilden ein Ideal).

Es sei K ein Körper.

(i) Es sei $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Die Menge

$$J_A := \{p \in K[\lambda] \mid \tilde{p}(A) = 0\} \quad (28.1)$$

ist ein Ideal in $K[\lambda]$ ungleich dem Nullideal.

(ii) Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K und $f \in \text{End}(V)$. Die Menge

$$J_f := \{p \in K[\lambda] \mid \tilde{p}(f) = 0\} \quad (28.2)$$

ist ein Ideal in $K[\lambda]$ ungleich dem Nullideal.

Beachte: Das Nullpolynom und das charakteristische Polynom χ_A sind Elemente von J_A . Ebenso sind das Nullpolynom und das charakteristische Polynom χ_f Elemente von J_f .

Beweis. **Aussage (i):** Wir betrachten den Einsetzungshomomorphismus (Definition 25.7) zu A in der Matrixalgebra $K^{n \times n}$, also

$$\varphi_A: K[t] \ni p \mapsto \tilde{p}(A) \in K^{n \times n}.$$

Insbesondere ist φ_A ein Homomorphismus von Ringen mit Eins, und es gilt

$$J_A = \text{Kern}(\varphi_A).$$

Nach Lemma 27.2 ist J_A also ein Ideal. Das charakteristische Polynom χ_A gehört nach dem Satz von Cayley-Hamilton 26.1 zu J_A , und es ist ungleich dem Nullpolynom. Also ist J_A nicht das Nullideal.

Aussage (ii) kann analog gezeigt werden. □

Nach [Satz 27.7](#) ist jedes gradminimale Polynom in J_A ein Erzeuger des Ideals J_A . Durch Normierung ist dieses Polynom sogar eindeutig bestimmt. Dasselbe gilt für J_f und führt zu folgender Definition.

Definition 28.2 (Minimalpolynom).

Es sei K ein Körper.

- (i) Es sei $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Das eindeutig bestimmte normierte Polynom $\mu_A \neq 0$ geringsten Grades mit der Eigenschaft $\mu_A \in J_A$, also $\widetilde{\mu}_A(A) = 0$, heißt das **Minimalpolynom** (englisch: **minimal polynomial**) **von A** .
- (ii) Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem Körper K . Weiter sei $f \in \text{End}(V)$. Das eindeutig bestimmte normierte Polynom $\mu_f \neq 0$ geringsten Grades mit der Eigenschaft $\mu_f \in J_f$, also $\widetilde{\mu}_f(f) = 0$, heißt das **Minimalpolynom von f** . △

Wir zeigen zunächst einen wichtigen Zusammenhang zwischen dem Minimalpolynom eines Endomorphismus und dem einer beliebigen Darstellungsmatrix:

Satz 28.3 (Minimalpolynome eines Endomorphismus und seiner Darstellungsmatrizen).

Es sei K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K mit der Basis B_V . Weiter sei $f \in \text{End}(V)$ und $A = \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f)$. Dann gilt

$$\mu_f = \mu_A. \quad (28.3)$$

Beachte: Die Gleichheit haben wir auch für die charakteristischen Polynome, allerdings aufgrund der [Definition 24.23](#).

Beweis. Wir betrachten den Algebraisomorphismus $\Phi: (\text{End}(V), +, \cdot, \circ) \rightarrow (K^{n \times n}, +, \cdot, \circ)$, der durch $\Phi(f) = \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f)$ gegeben ist, siehe [Beispiel 25.6](#). Nach Voraussetzung gilt $A = \Phi(f)$.

Nach [Satz 25.12](#) gilt für jedes $p \in K[t]$

$$\Phi(\widetilde{p}(f)) = \widetilde{p}(\Phi(f)) = \widetilde{p}(A),$$

mit anderen Worten: Die Darstellungsmatrix des Endomorphismus $\widetilde{p}(f)$ ist gerade $\widetilde{p}(A)$. Das heißt aber auch:

$$\widetilde{p}(f) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi(\widetilde{p}(f)) = \widetilde{p}(A) = 0.$$

Da Φ also Isomorphismus injektiv ist, gilt auch ~~Mit Hilfe des inversen Isomorphismus Φ^{-1} zeigen wir analog~~

$$\widetilde{p}(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad \widetilde{p}(f) = 0.$$

Damit sind die Ideale J_A und J_f aus [\(28.1\)](#) und [\(28.2\)](#) identisch, also auch die Minimalpolynome μ_f und μ_A . □

Folgerung 28.4 (ähnliche Matrizen haben dasselbe Minimalpolynom).

Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_0$. Sind $A, \widehat{A} \in K^{n \times n}$ ähnlich, dann sind ihre Minimalpolynome identisch, also $\mu_A = \mu_{\widehat{A}}$.

Beweis. Das Resultat folgt sofort aus [Satz 28.3](#) und der Tatsache, dass zwei Matrizen genau dann ähnlich sind, wenn sie Darstellungsmatrizen ein- und desselben Endomorphismus sind ([Satz 20.14](#)). □

§ 28.1 BESTIMMUNG DES MINIMALPOLYNOMS

Setzen wir in ein Polynom $p \in K[t]$ mit der Darstellung

$$p = \sum_{i=0}^m \alpha_i t^i$$

die Matrix A ein, so ergibt sich

$$\tilde{p}(A) = \sum_{i=0}^m \alpha_i A^i.$$

Gilt $\tilde{p}(A) = 0$, so bedeutet die äquivalente Bedingung

$$\sum_{i=0}^m \alpha_i A^i = 0, \quad (28.4)$$

dass die Familie der Matrizen $F_m = (A^0, A^1, \dots, A^m)$ linear abhängig sind, sofern nicht alle Koeffizienten gleich Null sind. Wir können daher bei der Suche nach dem Minimalpolynom die Familien F_m , angefangen bei $m = 0$, auf lineare Unabhängigkeit prüfen. Dazu „vektorisieren“ wir die Matrizen z. B. mit Hilfe des Vektorisierungsisomorphismus aus [Beispiel 17.3](#) $\text{vec}: K^{n \times n} \ni A \mapsto \text{vec}(A) \in K^{n^2}$. Bezeichnen wir $v_i := \text{vec}(A^i)$, dann ist (28.4) äquivalent zu

$$\sum_{i=0}^m \alpha_i v_i = 0, \quad (28.5)$$

also zu einem homogenen linearen Gleichungssystem. Wir prüfen durch Überführung auf Zeilenstufenform, ob dessen Koeffizientenmatrix (v_0, v_1, \dots, v_m) vollen Rang $m + 1$ hat. Falls nicht, so haben wir mit m den Grad des Minimalpolynoms gefunden. Wir bestimmen dann die Lösungsmenge des Gleichungssystems (28.5). Diese wird eindimensional sein. (**Quizfrage 28.1:** Woher wissen wir das?)

In ihr finden wir genau einen Koeffizientenvektor $\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$ mit der Eigenschaft $\alpha_m = 1$. (**Quizfrage 28.2:** Warum ist das so?)

Beispiel 28.5 (Bestimmung des Minimalpolynoms).

Wir bestimmen das Minimalpolynom der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

Es gilt

$$A^2 = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad A^3 = \begin{bmatrix} -18 & 9 & 9 \\ 9 & -18 & 9 \\ 9 & 9 & -18 \end{bmatrix}.$$

Wir betrachten jetzt die Matrix

$$[\text{vec}(A^0) \quad \text{vec}(A^1) \quad \text{vec}(A^2) \quad \text{vec}(A^3)] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 & -18 \\ 0 & 1 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & 6 & -18 \\ 0 & 1 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & 6 & -18 \end{bmatrix}$$

Wir können bei A^3 aufhören, da ja spätestens das charakteristische Polynom $\chi_A = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 9\lambda$ die Bedingung $\widetilde{\chi}_A(A) = 0$ erfüllen wird.

Die Spalten $\{0, 1\}$ zusammen sind noch linear unabhängig, die Spalten $\{0, 1, 2\}$ aber nicht mehr. Es gilt daher $m = 2$, und der Kern von $[\text{vec } A^0 \quad \text{vec } A^1 \quad \text{vec } A^2]$ besteht offenbar aus den Vielfachen von $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Das Minimalpolynom von A ist also

$$\mu_A = \lambda^2 + 3\lambda. \quad \triangle$$

§ 28.2 WEITERE EIGENSCHAFTEN DES MINIMALPOLYNOMS

Lemma 28.6 (das Minimalpolynom teilt jedes Polynom, das seine Matrix annulliert).

Es sei K ein Körper.

- (i) Es sei $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Dann teilt das Minimalpolynom μ_A jedes Polynom in $p \in J_A$, also jedes $p \in K[t]$ mit der Eigenschaft $\widetilde{p}(A) = 0$.
- (ii) Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K und $f \in \text{End}(V)$. Dann teilt das Minimalpolynom μ_f jedes Polynom in $p \in J_f$, also jedes $p \in K[t]$ mit der Eigenschaft $\widetilde{p}(f) = 0$.

Beweis. **Aussage (i):** Das Minimalpolynom μ_A ist nach [Satz 27.7](#) ein Erzeuger des Ideals J_A von $K[t]$, kurz: $J_A = (\mu_A)$. Da $K[t]$ kommutativer Ring mit Eins ist, gilt nach [\(27.6b\)](#)

$$J_A = (\mu_A) = K[t] \mu_A.$$

Mit anderen Worten, für jedes $p \in J_A$ gibt es ein $q \in K[t]$ mit der Eigenschaft $p = q \mu_A$.

Aussage (ii) kann analog gezeigt werden. □

Folgerung 28.7 (das Minimalpolynom teilt das charakteristische Polynom).

Es sei K ein Körper.

- (i) Es sei $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Dann teilt das Minimalpolynom μ_A das charakteristische Polynom χ_A .
- (ii) Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K und $f \in \text{End}(V)$. Dann teilt das Minimalpolynom μ_f das charakteristische Polynom χ_f .

Beweis. Die Aussage folgt sofort aus dem [Satz von Cayley-Hamilton 26.1](#) und [Lemma 28.6](#). □

Das folgende Beispiel stellt eine Alternative dar zur Bestimmung des Minimalpolynoms nach Beispiel 28.5. Es nutzt bereits die Aussage von Lemma 28.9.

Beispiel 28.8 (das Minimalpolynom teilt das charakteristische Polynom).

(i) Die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{2 \times 2}$$

besitzt das charakteristische Polynom $\chi_A = (\lambda - 1)^2$. Da das Minimalpolynom ein Teiler von χ_A mit denselben Nullstellen ist, gilt entweder $\mu_A = (\lambda - 1)$ oder $\mu_A = (\lambda - 1)^2$. Durch Einsetzen finden wir, dass $\mu_A = (\lambda - 1)$ die richtige Wahl ist, da $A - I = 0$ gilt.

(ii) Die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{2 \times 2}$$

besitzt das charakteristische Polynom $\chi_A = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$. Da das Minimalpolynom ein Teiler von χ_A mit denselben Nullstellen ist, bleibt nur die Möglichkeit $\mu_A = \chi_A$.

(iii) Die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -8 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

besitzt das charakteristische Polynom $\chi_A = (\lambda + 1)^2(\lambda - 3)$. Da das Minimalpolynom ein Teiler von χ_A mit denselben Nullstellen ist, gilt entweder $\mu_A = (\lambda + 1)(\lambda - 3)$ oder $\mu_A = \chi_A = (\lambda + 1)^2(\lambda - 3)$. Da

$$(A + I)(A - 3I) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -8 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -8 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

gilt, muss $\mu_A = \chi_A = (\lambda + 1)^2(\lambda - 3)$ die richtige Wahl sein.

(iv) Die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -6 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

besitzt dasselbe charakteristische Polynom $\chi_A = (\lambda + 1)^2(\lambda - 3)$ wie die Matrix oben. Da das Minimalpolynom ein Teiler von χ_A mit denselben Nullstellen ist, gilt wiederum entweder $\mu_A = (\lambda + 1)(\lambda - 3)$ oder $\mu_A = \chi_A = (\lambda + 1)^2(\lambda - 3)$. Da

$$(A + I)(A - 3I) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -6 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -6 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

gilt, muss $\mu_A = \chi_A = (\lambda + 1)^2(\lambda - 3)$ die richtige Wahl sein. △

Wir zeigen nun einen weiteren Zusammenhang zwischen dem Minimalpolynom und dem charakteristischen Polynom:

Lemma 28.9 (Minimalpolynom und charakteristisches Polynom besitzen dieselben Nullstellen).

Es sei K ein Körper.

- (i) Es sei $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Dann sind äquivalent:
- (a) $\lambda \in K$ ist eine Nullstelle des Minimalpolynoms μ_A .
 - (b) $\lambda \in K$ ist eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms χ_A .
- (ii) Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K und $f \in \text{End}(V)$. Dann sind äquivalent:
- (a) $\lambda \in K$ ist eine Nullstelle des Minimalpolynoms μ_f .
 - (b) $\lambda \in K$ ist eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms χ_f .

Beweis. Aussage (i):

Aussage (a) \Rightarrow Aussage (b): Nach [Folgerung 28.7](#) teilt das Minimalpolynom das charakteristische Polynom, d. h., es existiert ein $q \in K[t]$ mit der Eigenschaft $\chi_A = q \mu_A$. Daraus folgt

$$\widetilde{\chi}_A(\lambda) = \widetilde{q}(\lambda) \widetilde{\mu}_A(\lambda) = \widetilde{q}(\lambda) 0 = 0.$$

Aussage (b) \Rightarrow Aussage (a): Nach [Lemma 24.14](#) ist λ ein Eigenwert von A . Es sei v ein zugehöriger Eigenvektor.

Das Minimalpolynom habe die Darstellung $\mu_A = \sum_{i=0}^m \alpha_i t^i$ mit $m \in \mathbb{N}_0$ und Koeffizienten $\alpha_i \in K$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} 0 &= 0 v && \text{„Der Nullvektor ist die Nullmatrix mal Vektor“} \\ &= \widetilde{\mu}_A(A) v && \text{nach dem Satz von Cayley-Hamilton 26.1} \\ &= \left(\sum_{i=0}^m \alpha_i A^i \right) v \\ &= \sum_{i=0}^m \alpha_i A^i v && \text{nach Distributivgesetz der Matrix-Vektor-Multiplikation} \\ &= \sum_{i=0}^m \alpha_i \lambda^i v && \text{wegen } A v = \lambda v \\ &= \left(\sum_{i=0}^m \alpha_i \lambda^i \right) v && \text{nach Distributivgesetz im Vektorraum } K^n \\ &= \widetilde{\mu}_A(\lambda) v. \end{aligned}$$

Weil aber $v \neq 0$ ist, muss $\widetilde{\mu}_A(\lambda) = 0$ gelten.

Aussage (ii) kann analog gezeigt werden. □

Mit [Lemma 24.14](#) und [Lemma 24.24](#) folgt aus [Lemma 28.9](#) unmittelbar:

Folgerung 28.10 (Eigenwerte von Matrizen und Endomorphismen sind Nullstellen des Minimalpolynoms).

Es sei K ein Körper.

- (i) Es sei $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Dann sind äquivalent:
- (a) λ ist ein Eigenwert von A .
 - (b) λ ist eine Nullstelle des Minimalpolynoms μ_A .

(ii) Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem Körper K . Weiter sei $f \in \text{End}(V)$ und $\lambda \in K$. Dann sind äquivalent:

- (a) λ ist ein Eigenwert von f .
- (b) λ ist eine Nullstelle des Minimalpolynoms μ_f .

Ende der Vorlesung 16

Ende der Woche 8

Lemma 28.11 (Minimalpolynom einer Diagonalmatrix).

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ eine Diagonalmatrix

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{bmatrix}.$$

Ist $\{b_1, \dots, b_s\} = \{a_1, \dots, a_n\}$ und sind b_1, \dots, b_s paarweise verschieden⁹, dann gilt

$$\mu_A = (\lambda - b_1) \cdots (\lambda - b_s). \quad (28.6)$$

Beweis. Für jedes Polynom $p \in K[t]$ gilt

$$\tilde{p}(A) = \begin{bmatrix} \tilde{p}(a_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \tilde{p}(a_n) \end{bmatrix}.$$

(Quizfrage 28.3: Klar?) Ein Polynom $p \in K[t]$ erfüllt also $\tilde{p}(a_j) = 0$ genau dann, wenn p den Linearfaktor $\lambda - a_j$ enthält (**Lemma 11.20**). Daraus folgt: $\tilde{p}(A) = 0$ gilt genau dann, wenn p alle Linearfaktoren $\lambda - b_1, \dots, \lambda - b_s$ enthält.

Per Definition ist das Minimalpolynom μ_A das normierte Polynom minimalen Grades mit dieser Eigenschaft $\tilde{p}(A) = 0$. Offenbar ist das gerade $\mu_A = (\lambda - b_1) \cdots (\lambda - b_s)$. \square

Schließlich können mit Hilfe des Minimalpolynoms ein weiteres Kriterium für die Diagonalisierbarkeit einer Matrix bzw. eines Endomorphismus angeben. Dieses verwendet im Unterschied zu **Satz 24.28** das Minimalpolynom:

Satz 28.12 (notwendiges und hinreichendes Kriterium für Diagonalisierbarkeit).

Es sei K ein Körper.

- (i) Es sei $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Dann sind äquivalent:
 - (a) A ist diagonalisierbar.
 - (b) Das Minimalpolynom μ_A zerfällt in Linearfaktoren und besitzt nur einfache Nullstellen.
- (ii) Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K und $f \in \text{End}(V)$. Dann sind äquivalent:
 - (a) f ist diagonalisierbar.

⁹Die Menge $\{b_1, \dots, b_s\}$ besteht also aus den verschiedenen Elementen von $\{a_1, \dots, a_n\}$.

(b) Das Minimalpolynom μ_f zerfällt in Linearfaktoren und besitzt nur einfache Nullstellen.

Beweis. Wir beweisen nur **Aussage (ii)**. (**Quizfrage 28.4:** Wie kann man von **Aussage (ii)** auf **Aussage (i)** schließen?)

Aussage (a) \Rightarrow Aussage (b): Es sei f diagonalisierbar. Das heißt, es gibt eine Basis B_V von V , sodass die Darstellungsmatrix $A = \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f)$ eine Diagonalmatrix ist, siehe **Satz 20.24** oder die Einleitung von **§ 24**. Auf der Diagonale von A stehen die paarweise verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ entsprechend ihrer geometrischen Vielfachheit. **Lemma 28.11** zeigt, dass für das Minimalpolynom gilt:

$$\mu_f = \mu_A = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_s).$$

Dessen Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ sind alle einfach.

Aussage (b) \Rightarrow Aussage (a): Es gelte $\mu_f = \prod_{j=1}^s (\lambda - \lambda_j)$, wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in K$ paarweise verschieden sind. Wir führen einen Induktionsbeweis nach $n = \dim(V) \in \mathbb{N}_0$. Im Fall $n = 0$ und $n = 1$ ist jeder Endomorphismus von V diagonalisierbar.

Die Behauptung sei bewiesen für $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$. Bevor wir den Induktionsschritt durchführen, folgen mehrere Überlegungen:

Schritt 1: Wir zerlegen

$$\mu_f = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_s) =: (\lambda - \lambda_1) p.$$

Dabei ist $p = (\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_s) \in K_{s-1}[t]$ ein Polynom, das ebenfalls in Linearfaktoren zerfällt und lauter einfache Nullstellen hat. Außerdem gilt $\tilde{p}(\lambda_1) \neq 0$.

Nach **Satz 11.14** existieren (eindeutig bestimmte) Polynome $q, r \in K[t]$ mit

$$p = q \cdot (\lambda - \lambda_1) + r, \tag{28.7}$$

wobei $\deg(r) < \deg(\lambda - \lambda_1) = 1$ ist. Also ist $r = \alpha \in K$ ein konstantes Polynom. Wegen

$$\begin{aligned} \tilde{r}(\lambda_1) &= \tilde{p}(\lambda_1) - \tilde{q}(\lambda_1) \cdot (\lambda_1 - \lambda_1) \\ &= \tilde{p}(\lambda_1) \\ &= (\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_s) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

gilt $\alpha = r = \tilde{r}(\lambda_1) \neq 0$.

Schritt 2: Wir zeigen: $V = U \oplus W$ mit $U := \text{Kern}(f - \lambda_1 \text{id}_V) = \text{Eig}(f, \lambda_1)$ und $W := \text{Bild}(f - \lambda_1 \text{id}_V)$.

Dazu setzen wir f in (28.7) ein:

$$\tilde{p}(f) = \tilde{q}(f) \circ (f - \lambda_1 \text{id}_V) + \alpha \text{id}_V.$$

Folglich gilt für alle $v \in V$:

$$(\tilde{p}(f))(v) = (\tilde{q}(f) \circ (f - \lambda_1 \text{id}_V))(v) + \alpha v$$

und wegen $\alpha \neq 0$

$$\begin{aligned} v &= \alpha^{-1}(\tilde{p}(f))(v) - \alpha^{-1}(\tilde{q}(f) \circ (f - \lambda_1 \text{id}_V))(v) \\ &= \underbrace{\alpha^{-1}((f - \lambda_2 \text{id}_V) \circ \cdots \circ (f - \lambda_s \text{id}_V))(v)}_{=: u} - \underbrace{\alpha^{-1}(\tilde{q}(f) \circ (f - \lambda_1 \text{id}_V))(v)}_{=: w}. \end{aligned}$$

Für u gilt

$$\begin{aligned}(f - \lambda_1 \text{id}_V)(u) &= \alpha^{-1}((f - \lambda_1 \text{id}_V) \circ (f - \lambda_2 \text{id}_V) \circ \cdots \circ (f - \lambda_s \text{id}_V))(u) \\ &= \alpha^{-1}(\mu_f(f))(v) \\ &= 0 \quad \text{wegen } \mu_f(f) = 0.\end{aligned}$$

Also liegt $u \in U = \text{Kern}(f - \lambda_1 \text{id}_V)$.

Weiter gilt

$$\begin{aligned}w &= \alpha^{-1}(\tilde{q}(f) \circ (f - \lambda_1 \text{id}_V))(v) \\ &= \alpha^{-1}((f - \lambda_1 \text{id}_V) \circ \tilde{q}(f))(v)\end{aligned}$$

(Quizfrage 28.5: Warum gilt die Gleichheit?) und somit $w \in W = \text{Bild}(f - \lambda_1 \text{id}_V)$.

Wir haben also gezeigt, dass jedes $v \in V$ in der Form $v = u + w$ mit $u \in U$ und $w \in W$ dargestellt werden kann, also gilt $V = U + W$.

Weiter gilt nach der Dimensionsformel für lineare Abbildungen (**Folgerung 18.7**)

$$\dim(U) + \dim(W) = \dim(\text{Kern}(f - \lambda_1 \text{id}_V)) + \dim(\text{Bild}(f - \lambda_1 \text{id}_V)) = \dim(V)$$

und weiter nach (14.2)

$$\dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U + W) = \dim(V) - \dim(V) = 0.$$

Es gilt also tatsächlich $V = U \oplus W$.

Schritt 3: Wir zeigen: $W = \text{Bild}(f - \lambda_1 \text{id}_V)$ ist f -invarianter Unterraum mit $0 \leq \dim(W) < \dim(V)$.

Es sei dazu $w \in W$, d. h., $w = (f - \lambda_1 \text{id}_V)(v)$ für ein $v \in V$. Wir haben

$$\begin{aligned}f(w) &= (f \circ (f - \lambda_1 \text{id}_V))(v) \\ &= ((f - \lambda_1 \text{id}_V) \circ f)(v) \quad \text{wegen } f \circ (f - \lambda_1 \text{id}_V) = (f - \lambda_1 \text{id}_V) \circ f \\ &\in \text{Bild}(f - \lambda_1 \text{id}_V) = W.\end{aligned}$$

Wegen $\dim(U) = \dim(\text{Eig}(f, \lambda_1)) \geq 1$ gilt tatsächlich

$$\dim(W) = \dim(V) - \dim(U) \leq \dim(V) - 1.$$

Wir können nun den Induktionsschritt von $\dim(V) = n$ auf $n + 1$ durchführen. Das Minimalpolynom $\mu_f = \prod_{j=1}^s (\lambda - \lambda_j)$ habe die Koeffizientendarstellung $\mu_f = \sum_{j=1}^s \alpha_j \lambda^j$.

Wir setzen $g := f|_W^W \in \text{End}(W)$. Für $w \in W$ gilt dann

$$\begin{aligned}(\tilde{\mu}_f(g))(w) &= \left(\sum_{j=1}^s \alpha_j g^j \right)(w) \\ &= \sum_{j=1}^s \alpha_j g^j(w) \\ &= \sum_{j=1}^s \alpha_j f^j(w) \\ &= \left(\sum_{j=1}^s \alpha_j f^j \right)(w) \\ &= (\tilde{\mu}_f(f))(w) \\ &= 0 \quad \text{wegen } \mu_f(f) = 0.\end{aligned}$$

Da $w \in W$ beliebig war, bedeutet das: $\widetilde{\mu}_f(g) = 0 \in \text{End}(W)$. Damit gehört μ_f zum Ideal $J_g \subseteq K[t]$. Nach Lemma 28.6 gilt also

$$\mu_g \mid \mu_f = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_s)$$

Nach Voraussetzung sind die $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ paarweise verschieden. Das heißt aber, auch μ_g zerfällt in Linearfaktoren und hat nur einfache Nullstellen.

Aus der Induktionsvoraussetzung können wir schließen, dass $g \in \text{End}(W)$ diagonalisierbar ist, denn es gilt $\dim(W) \leq \dim(V) - 1 \leq n$. Es existiert also eine Basis von W , die aus lauter Eigenvektoren zu den Eigenwerten von $g = f|_W$ besteht. Diese Eigenpaare sind auch Eigenpaare von f . (**Quizfrage 28.6:** Warum?) Ergänzen wir diese Basis von W aus Eigenvektoren von f durch eine Basis von $U = \text{Eig}(f, \lambda_1)$, dann erhalten wir nach Satz 14.8 eine Basis von $V = U \oplus W$, die wiederum aus lauter Eigenvektoren von f besteht. Also ist f diagonalisierbar. \square

Beispiel 28.13 (notwendiges und hinreichendes Kriterium für Diagonalisierbarkeit, vgl. Beispiel 28.8).

(i) Die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{2 \times 2}$$

besitzt das Minimalpolynom $\mu_A = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$, ist also diagonalisierbar.

(ii) Die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -8 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

besitzt das Minimalpolynom $\mu_A = (\lambda + 1)^2(\lambda - 3)$, ist also nicht diagonalisierbar.

(iii) Die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -6 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

besitzt das Minimalpolynom $\mu_A = (\lambda + 1)(\lambda - 3)$, ist also diagonalisierbar. \triangle

§ 28.3 DIE BEGLEITMATRIX EINES POLYNOMS

Definition 28.14 (Begleitmatrix eines Polynoms).

Es sei K ein Körper und

$$p = \lambda^n + \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j \lambda^j \in K[\lambda] \quad (28.8a)$$

ein normiertes Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}_0$ (bzw. das Einspolynom im Fall $n = 0$). Die Matrix

$$C_p := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \in K^{n \times n} \quad (28.8b)$$

heißt die **Begleitmatrix** (englisch: **companion matrix**) von p . △

Beachte: Die Einsen laufen direkt unterhalb der Hauptdiagonale. Der führende Koeffizient von p ist Eins und wird in der Begleitmatrix nicht notiert. Im Fall $n = 0$ ist $p = 1$ und C_p die leere Matrix. Im Fall $n = 1$ mit $p = \alpha_0$ gilt $C_p = -\alpha_0$.

Lemma 28.15 (charakteristisches und Minimalpolynom von Begleitmatrizen).

Es sei K ein Körper und $p \in K[\lambda]$ ein normiertes Polynom. Dann gilt:

$$\chi_{C_p} = \mu_{C_p} = p. \tag{28.9}$$

Beachte: In diesem Sinne ist die Begleitmatrix C_p ein besonders einfacher Repräsentant der Äquivalenzklasse aller zueinander ähnlichen Matrizen, deren charakteristisches und Minimalpolynom dem vorgegebenen Polynom p entsprechen.

Beweis. Die Behauptung $\chi_{C_p} = p$ ist Gegenstand von [Hausaufgabe II-7.1](#). In der dazugehörigen Lösung wurde die Möglichkeit durch Zeilentransformationen zu einer einfachen Matrixstruktur und einer Darstellung von p nach dem **Horner-Schema** zu kommen vorgestellt. Alternativ lässt sich der Nachweis per Induktion nach dem Grad $\deg(p) = n \in \mathbb{N}_0$ zeigen: Für $n = 0$ ist $p = 1$ und $C_p = ()$ mit $\det(\lambda I_0 - ()) = 1$. Wir betrachten nun ein normiertes Polynom $p = \lambda^{n+1} + \sum_{j=0}^n \alpha_j \lambda^j$ vom Grad $\deg(p) = n + 1$, wobei die Behauptung für den Grad n bereits bewiesen sei. Wir haben

$$C_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -\alpha_n \end{bmatrix} \text{ und entwickeln } \det(\lambda I - C_p) = \det \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & \alpha_0 \\ -1 & \lambda & \dots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & \lambda + \alpha_n \end{pmatrix}$$

nach der ersten Zeile mit Hilfe des [Laplaceschen Entwicklungssatzes 23.17](#). Wir erhalten

$$\det(\lambda I - C_p) = \lambda \det \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ -1 & \lambda & \dots & 0 & \alpha_2 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & \alpha_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & \lambda + \alpha_n \end{pmatrix} + (-1)^{n+2} \alpha_0 \det \begin{pmatrix} -1 & \lambda & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die erste Matrix ist gerade $\lambda I - C_q$ mit der Begleitmatrix C_q des Polynoms $q = \alpha_1 + \alpha_2 \lambda + \dots + \alpha_n \lambda^{n-1} + \lambda^n$ vom Grad $\deg(q) = n$. Nach Induktionsvoraussetzung ist also $\det(\lambda I - C_q) = q$. Die zweite Matrix ist eine obere Dreiecksmatrix, und nach [Lemma 23.10](#) ist ihre Determinante gleich $(-1)^n$. Wir erhalten also

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - C_p) &= \lambda q + \alpha_0 \\ &= \lambda (\alpha_1 + \alpha_2 \lambda + \dots + \alpha_n \lambda^{n-1} + \lambda^n) + \alpha_0 \\ &= p, \end{aligned}$$

also $\chi_{C_p} = p$, was zu zeigen war.

Der Beweis der Behauptung $\mu_{C_p} = p$ ist Gegenstand von [Hausaufgabe II-8.3](#). □

§ 29 DIE FROBENIUS-NORMALFORM

Literatur: Liesen, Mehrmann, 2024, Kapitel 16

Normalformen von Endomorphismen endlich-dimensionaler Vektorräume sind dadurch gekennzeichnet, dass die Darstellungsmatrizen Blockdiagonalstruktur

$$\begin{bmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_k \end{bmatrix}$$

mit „möglichst einfachen“ Blöcken besitzt. Jeder Block entspricht nach [Satz 20.17](#) einem f -invarianten Unterraum.

Für die Wahl dieser Blöcke bzw. invarianten Unterräume gibt es verschiedene Möglichkeiten und daher auch verschiedene Normalformen, darunter die **Frobenius-Normalform**, die **Weierstraß-Normalform** und die **Jordan-Normalform**. Bei der Frobenius-Normalform, die wir in diesem Abschnitt betrachten, sind die Blöcke gerade die Begleitmatrizen bestimmter Polynome.

In [Definition 28.2](#) hatten wir das Minimalpolynom einer Matrix $A \in K^{n \times n}$ als das eindeutige normierte Polynom $p \in K[t]$ geringsten Grades definiert, das die Eigenschaft $\tilde{p}(A) = 0$ besitzt. Nun betrachten wir eine verfeinerte Version davon, indem wir nur fordern, dass $\tilde{p}(A)x = 0$ für einen gegebenen Vektor $x \in K^n$ gilt. Man sagt auch, das Polynom **annulliere** die Matrix A **lokal**. „Lokal“ bedeutet hier: bei Anwendung auf einen gegebenen Vektor.

Lemma 29.1 (die lokal annullierenden Polynome bilden ein Ideal).

Es sei K ein Körper.

(i) Es sei $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Für $x \in K^n$ ist die Menge

$$J_{A,x} := \{p \in K[\lambda] \mid \tilde{p}(A)x = 0\} \quad (29.1)$$

ein Ideal in $K[\lambda]$ ungleich dem Nullideal.

(ii) Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K und $f \in \text{End}(V)$. Für $v \in V$ ist die Menge

$$J_{f,v} := \{p \in K[\lambda] \mid \tilde{p}(f)(v) = 0\} \quad (29.2)$$

ein Ideal in $K[\lambda]$ ungleich dem Nullideal.

Beweis. Der Beweis ist Gegenstand von ??.

□

Ganz analog zu [Definition 28.2](#) haben wir mit Hilfe von [Satz 27.7](#):

Definition 29.2 (lokales Minimalpolynom, vgl. [Definition 28.2](#)).

Es sei K ein Körper.

(i) Es sei $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in K^n$. Das eindeutig bestimmte normierte Polynom $\mu_{A,x} \neq 0$ geringsten Grades mit der Eigenschaft $\mu_{A,x} \in J_{A,x}$, also $\widetilde{\mu_{A,x}}(A)x = 0$, heißt das (**lokale**) **Minimalpolynom** (englisch: **local minimal polynomial**) **von A bzgl. x** .

- (ii) Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem Körper K . Weiter sei $f \in \text{End}(V)$ und $v \in V$. Das eindeutig bestimmte normierte Polynom $\mu_{f,v} \neq 0$ geringsten Grades mit der Eigenschaft $\mu_{f,v} \in J_{f,v}$, also $\widetilde{\mu_{f,v}}(f)(v) = 0$, heißt das **(lokale) Minimalpolynom von f bzgl. v** . △

Satz 29.3 (lokale Minimalpolynome eines Endomorphismus und seiner Darstellungsmatrizen, vgl. Satz 28.3).

Es sei K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K mit der Basis $B_V = (v_1, \dots, v_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei $f \in \text{End}(V)$ und $A = \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f)$. Dann gilt für $v \in V$ und seinen Koordinatenvektor $x = \Phi_{B_V}^{-1}(v)$:

$$\mu_{f,v} = \mu_{A,x}. \tag{29.3}$$

Beweis. □

Zur Bestimmung des lokalen Minimalpolynoms einer Matrix A bzgl. eines Vektors x können wir ähnlich wie in Beispiel 28.5 vorgehen. Statt die Matrizen A^0, A^1, \dots etc. auf das erstmalige Auftreten linearer Abhängigkeit zu prüfen, testen wir nun die Vektoren $A^0 x, A^1 x, \dots$

Beispiel 29.4 (Bestimmung des lokalen Minimalpolynoms, vgl. Beispiel 28.5).

- (i) Wir bestimmen das lokale Minimalpolynom der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \text{ bzgl. des Vektors } x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$Ax = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^2 x = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten jetzt die Matrix

$$[A^0 x \quad A^1 x \quad A^2 x] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Wie in Beispiel 28.5 sind auch hier die Spalten $\{0, 1\}$ zusammen noch linear unabhängig, die Spalten $\{0, 1, 2\}$ aber nicht mehr. Es gilt daher $\text{deg}(\mu_{A,x}) = 2$, und der Kern von $[A^0 x \quad A^1 x \quad A^2 x]$ besteht aus den Vielfachen von $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Das lokale Minimalpolynom von A bzgl. x ist also

$$\mu_{A,x} = \lambda^2 + 3\lambda = \mu_A.$$

- (ii) Verwenden wir dieselbe Matrix A , aber den Vektor $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, so erhalten wir

$$Ay = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und erst recht} \quad A^2 y = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nun gilt daher $\deg(\mu_{A,y}) = 1$, und der Kern von $\begin{bmatrix} A^0 y & A^1 y \end{bmatrix}$ besteht aus den Vielfachen von $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Das lokale Minimalpolynom von A bzgl. y ist also

$$\mu_{A,y} = \lambda. \quad \triangle$$

Analog zu Lemma 28.6 gilt:

Lemma 29.5 (das lokale Minimalpolynom teilt jedes Polynom, das seine Matrix lokal annulliert).
Es sei K ein Körper.

- (i) Es sei $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in K^n$. Dann teilt das Minimalpolynom $\mu_{A,x}$ bzgl. x jedes Polynom in $p \in J_{A,x}$, also jedes $p \in K[t]$ mit der Eigenschaft $\tilde{p}(A)x = 0$.
- (ii) Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K , $f \in \text{End}(V)$ und $v \in V$. Dann teilt das Minimalpolynom $\mu_{f,v}$ bzgl. v jedes Polynom in $p \in J_{f,v}$, also jedes $p \in K[t]$ mit der Eigenschaft $\tilde{p}(f)(v) = 0$.

Insbesondere gilt $\mu_{A,x} \mid \mu_A$ für jedes $x \in K^n$ und $\mu_{f,v} \mid \mu_f$ für jedes $v \in V$.

Das folgende Resultat zeigt, dass jedes lokale Minimalpolynom von A einen A -invarianten Unterraum von K^n liefert:

Lemma 29.6 (A -invariante Unterräume durch lokale Minimalpolynome).

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ eine Matrix. Weiter sei $x \in K^n$ und

$$\mu_{A,x} = \sum_{j=0}^{d-1} \alpha_j \lambda^j + \lambda^d$$

das lokale Minimalpolynom bzgl. x . Dann ist der Unterraum

$$U_x := \langle x, Ax, A^2x, \dots, A^{d-1}x \rangle \quad (29.4a)$$

ein A -invarianter Unterraum mit der Basis

$$B_x = (x_1, \dots, x_d) \text{ mit } x_j := A^{j-1}x \text{ für } j = 1, \dots, d. \quad (29.4b)$$

Beweis. Die Familie der Vektoren $B_x := (x, Ax, A^2x, \dots, A^{d-1}x)$ ist linear unabhängig, jedoch $(x, Ax, A^2x, \dots, A^{d-1}x, A^d x)$ ist linear abhängig, vgl. Beispiel 29.4, denn es gilt

$$\widetilde{\mu_{A,x}}(A)x = \sum_{j=0}^{d-1} \alpha_j A^j x + A^d x = 0.$$

Um zu zeigen, dass der Unterraum $U_x := \langle x, Ax, A^2x, \dots, A^{d-1}x \rangle$ A -invariant ist, betrachten wir

eine Linearkombination $u = \sum_{j=0}^{d-1} \beta_j A^j x \in U$. Es folgt

$$Au = \sum_{j=0}^{d-1} \beta_j A^{j+1} x = \sum_{j=1}^d \beta_{j-1} A^j x = \beta_{d-1} A^d x + \underbrace{\sum_{j=1}^{d-1} \beta_{j-1} A^j x}_{\in U}$$

und wir können das lokale Minimalpolynom verwenden, um $A^d y = -\sum_{j=0}^{d-1} \alpha_j A^j y \in U$ zu ersetzen.
 Das zeigt $Au \in U$. □

Ende der Vorlesung 17

Wir zeigen nun, dass diejenigen Vektoren, deren lokale Minimalpolynom $\mu_{A,x}$ **maximal möglichen Grad** haben, besondere Bedeutung besitzen.¹⁰ Mit ihrer Hilfe können wir nämlich den Vektorraum K^n in zwei komplementäre, A -invariante Unterräume zerlegen:

Lemma 29.7 (Zerlegung in komplementäre, A -invariante Unterräume).

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ eine Matrix. Weiter sei $x \in K^n$ so gewählt, dass das lokale Minimalpolynom bzgl. x

$$\mu_{A,x} = \sum_{j=0}^{d-1} \alpha_j \lambda^j + \lambda^d$$

den **maximal möglichen Grad** über alle lokalen Minimalpolynome von A besitzt¹¹, also

$$d = \max\{\deg(\mu_{A,y}) \mid y \in K^n\}.$$

Dann gilt: Ergänzen wir die Basis B_x des Unterraumes U_x aus (29.4) zu irgendeiner Basis

$$B = (x_1, \dots, x_d, x_{d+1}, \dots, x_n)$$

von K^n und definieren die Linearform ξ durch die Bilder auf der Basis B wie folgt: **Im Folgenden wurde ξ^T korrigiert zur dualen Paarung $\langle \xi, \cdot \rangle$.**

$$\langle \xi, x_j \rangle = \delta_{jd} = \begin{cases} 1 & \text{im Fall } j = d, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

dann ist der Unterraum

$$W := \{w \in K^n \mid \langle \xi, A^j w \rangle = 0 \text{ für alle } j = 0, \dots, d-1\} \tag{29.5a}$$

A -invariant, besitzt Dimension $\dim(W) = n - d$ und erfüllt

$$K^n = U \oplus W. \tag{29.5b}$$

Beachte: Der Unterraum W ist gerade der Prä-Annihilator von $\{\xi, A^T \xi, (A^T)^2 \xi, \dots, (A^T)^{d-1} \xi\}$.

Beweis. Wir ergänzen B_x zu irgendeiner Basis $B = (x_1, \dots, x_d, x_{d+1}, \dots, x_n)$ von K^n und definieren die Linearform $\xi \in (K^n)^*$ wie angegeben.

¹⁰Ein solcher Vektor heißt ein **maximaler Vektor** (englisch: maximal vector) **bzgl. A bzw. f** .

¹¹Es ist natürlich immer möglich, ein solches $x \in K^n$ zu wählen, da die Menge der möglichen Grade der lokalen Minimalpolynome nach oben durch den $\deg(\mu_A)$ beschränkt ist.

Schritt 1: Wir zeigen: W ist A -invariant.

Es sei dazu $w \in W$ beliebig. Nach Definition gehört $A w$ genau dann zu W , wenn die Bedingungen

$$\langle \xi, A^j A w \rangle = \langle \xi, A^{j+1} w \rangle = 0 \quad \text{für } j = 0, \dots, d-1$$

gelten. Für die Indizes $j = 0, \dots, d-2$ ist das wegen $w \in W$ klar nach (29.5b).

Für die Aussage im Fall $j = d-1$ betrachten wir $d' := \deg(\mu_{A,w})$. Wegen der Maximalgradeigenschaft des lokalen Minimalpolynoms zu x gilt $d' \leq d$. Der Vektor $A^d w$ liegt daher in $U_w := \langle w, A w, A^2 w, \dots, A^{d'-1} w \rangle$. Es ist also möglich, $A^d w$ als Linearkombination der Vektoren $A^j w$ für $j = 0, \dots, d'-1 \leq d-1$ darzustellen. Daher gilt auch $\langle \xi, A^d w \rangle = 0$ und damit $A w \in W$.

Schritt 2: Wir zeigen: $\dim(W) \geq n - d$.

Per Definition (29.5b) gilt mit $Y := \langle \xi, A^T \xi, (A^T)^2 \xi, \dots, (A^T)^{d-1} \xi \rangle$ die Beziehung

$$W = {}^0Y = \{w \in K^n \mid \langle \xi, w \rangle = 0 \text{ für alle } \xi \in Y\}.$$

Da $\dim(Y) \leq d$ gilt, haben wir nach Satz 21.23 $\dim(W) = n - \dim(Y) \geq n - d$.

Schritt 3: Wir zeigen: $U_x \cap W = \{0\}$.

Es sei dazu $w \in U_x \cap W$, also $w = \sum_{i=1}^d \beta_i x_i$ mit Koeffizienten $\beta_i \in K$. Wegen $w \in W$ gilt weiter wegen (29.5b) $\langle \xi, A^j w \rangle = 0$ für $j = 0, \dots, d-1$. Für $j = 0$ heißt das zunächst

$$0 = \left\langle \xi, \sum_{i=1}^d \beta_i x_i \right\rangle = \sum_{i=1}^d \beta_i \langle \xi, x_i \rangle = \beta_d,$$

wobei die letzte Gleichheit aus der Definition von ξ folgt. Nun ist also $w = \sum_{i=1}^{d-1} \beta_i x_i$, und wir werten die Bedingung (29.5b) für $j = 1$ aus:

$$0 = \left\langle \xi, \sum_{i=1}^{d-1} \beta_i A x_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{d-1} \beta_i \langle \xi, A x_i \rangle = \sum_{i=1}^{d-1} \beta_i \langle \xi, x_{i+1} \rangle = \beta_{d-1}.$$

So verfahren wir weiter, bis sich schließlich für alle Koeffizienten $\beta_d = \beta_{d-1} = \dots = \beta_1 = 0$ ergeben hat, also $x = 0$.

Schritt 4: Wir zeigen: $\dim(W) = n - d$ und $K^n = U \oplus W$.

Nach Satz 14.3 und – wie gerade gezeigt – $\dim(U \cap W) = 0$ gilt

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W) \geq d + (n - d) = n.$$

Die Dimension kann aber nicht größer sein als n , also haben wir in der Tat $\dim(U + W) = n$ und damit $U + W = K^n$. Außerdem folgt $\dim(W) = n - d$, und wegen $U \cap W = \{0\}$ ist die Summe direkt. \square

Noch ist nicht klar, ob lokale Minimalpolynome maximalen Grades mit dem Minimalpolynom übereinstimmen. In Beispiel 29.4 hatten wir zumindest ein Beispiel gesehen, bei dem ein lokales Minimalpolynom $\mu_{A,x}$ mit dem globalen Minimalpolynom μ_A übereinstimmte. Tatsächlich ist das immer möglich:

Lemma 29.8 (unter den lokalen Minimalpolynomen ist das Minimalpolynom).

Es sei K ein Körper.

- (i) Es sei $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Für jedes $x \in K^n$, für das $\mu_{A,x}$ maximalen Grad besitzt, gilt $\mu_{A,x} = \mu_A$.
- (ii) Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K , $f \in \text{End}(V)$. Für jedes $v \in V$, für das $\mu_{f,v}$ maximalen Grad besitzt, gilt $\mu_{f,v} = \mu_f$.

Beweis. **Aussage (i):** Es sei $x \in K^n$ ein maximaler Vektor bzgl. A . Wir zeigen: $\widetilde{\mu_{A,x}}(A) y = 0$ für alle $y \in K^n$.

Es sei dazu $y \in K^n$ beliebig. Nach (29.5) können wir $y = u + w$ schreiben für (eindeutig bestimmte) $u \in U_x$ und $w \in W$.

Die Eigenschaft $\widetilde{\mu_{A,x}}(A) u = 0$ ist klar. Um $\widetilde{\mu_{A,x}}(A) w = 0$ zu zeigen, betrachten wir $p := \mu_{A,x+w}$. Dann gilt

$$0 = \widetilde{p}(A) (x + w) = \widetilde{p}(A) x + \widetilde{p}(A) w,$$

also $\widetilde{p}(A) w = -\widetilde{p}(A) x$. Nach Aussage von Lemma 29.7 ist W A -invariant, also gilt auch $\widetilde{p}(A) w \in W$. Damit liegt $\widetilde{p}(A) w = -\widetilde{p}(A) x$ sowohl in W als auch in U_x , also muss $\widetilde{p}(A) w = 0$ und auch $\widetilde{p}(A) x = 0$ gelten. Daraus folgt $\mu_{A,x} \mid p$.

Da x ein maximaler Vektor war, gilt aber auch

$$\deg(\mu_{A,x}) \geq \deg(\mu_{A,x+w}) = \deg(p)$$

und somit $p = \mu_{A,x}$. Damit folgt $\widetilde{\mu_{A,x}}(A) w = \widetilde{p}(A) w = 0$.

Wir haben also

$$\widetilde{\mu_{A,x}}(A) y = \widetilde{\mu_{A,x}}(A) u + \widetilde{\mu_{A,x}}(A) w = 0 + 0 = 0$$

gezeigt, wobei $y \in K^n$ beliebig war. Das heißt aber $\widetilde{\mu_{A,x}}(A) = 0$ und damit $\mu_A \mid \mu_{A,x}$. Weil aber auch $\mu_{A,x} \mid \mu_A$ gilt, schließen wir wie behauptet $\mu_{A,x} = \mu_A$.

Aussage (ii) kann analog gezeigt werden. □

Wir können nun die Existenz der Frobenius-Normalform einer Matrix bzw. eines Endomorphismus beweisen:

Satz 29.9 (Frobenius-Normalform).

Es sei K ein Körper.

- (i) Es sei $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Dann existieren normierte, für $n \geq 1$ nicht-konstante Polynome p_1, \dots, p_k , $k \in \mathbb{N}$, die folgende Eigenschaften haben:
 - (a) $p_1 = \mu_A$ und $p_{j+1} \mid p_j$ für $j = 1, \dots, k - 1$.
 - (b) A ist ähnlich zu der Blockdiagonalmatrix

$$\begin{bmatrix} C_{p_1} & & & \\ & C_{p_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_{p_k} \end{bmatrix} \tag{29.6}$$

mit den Begleitmatrizen C_{p_j} , $j = 1, \dots, k$.

- (c) Sowohl die Polynome p_j also auch die Matrix in (29.6) sind eindeutig.
- (ii) Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K und $f \in \text{End}(V)$. Dann existieren normierte, nicht-konstante Polynome $p_1, \dots, p_k, k \in \mathbb{N}$, die folgende Eigenschaften haben:
 - (a) $p_1 = \mu_f$ und $p_{j+1} \mid p_j$ für $j = 1, \dots, k - 1$.
 - (b) Es gibt eine Basis B_V von V , sodass die Darstellungsmatrix von f die Blockdiagonalgestalt

$$M_{B_V}^{B_V}(f) = \begin{bmatrix} C_{p_1} & & & \\ & C_{p_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_{p_k} \end{bmatrix} \tag{29.7}$$

mit den Begleitmatrizen $C_{p_j}, j = 1, \dots, k$ besitzt.

- (c) Sowohl die Polynome p_j also auch die Matrix in (29.7) sind eindeutig.

Die durch A bzw. durch f eindeutig bestimmte Matrix in (29.6) bzw. (29.7) heißt die **Frobenius-Normalform** (englisch: Frobenius normal form) oder die **rationale Normalform** (englisch: rational normal form) von A bzw. von f .

Beweis. Aussage (i): Im Fall $n = 0$ gilt $\mu_A = 1$ und $k = 1$, d. h., und es ist nichts zu zeigen.

Schritt 1: Wir spalten einen A -invarianten Unterraum U_1 der Bauart $\langle x_1, Ax_1, A^2x_1, \dots, A^{m-1}x_1 \rangle$ maximaler Dimension ab.

Es sei dazu x_1 ein maximaler Vektor bzgl. A . Es gilt also $\mu_{A, x_1} = \mu_A$ nach Lemma 29.8. Der Unterraum

$$U_1 := \langle x_1, Ax_1, A^2x_1, \dots, A^{m-1}x_1 \rangle$$

hat Dimension m und ist A -invariant. Aufgrund der A -Invarianz von U_1 können wir f_A auf U_1 einschränken. Für die Darstellungsmatrix bzgl. der Basis

$$B_1 := (x_1, Ax_1, A^2x_1, \dots, A^{m-1}x_1)$$

erhalten wir die zu A ähnliche Matrix

$$M_{B_1}^{B_1}(f_A|_{U_1}) = C_{p_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ & 1 & & & -\alpha_2 \\ & & \ddots & & 0 \\ & & & 1 & -\alpha_{m-1} \end{bmatrix} \in K^{m \times m}$$

für $p_1 := \mu_A$.

Falls $m = n$ gilt, also $U_1 = K^n$, so ist der Beweis hier erbracht.

Schritt 2: Wir konstruieren einen zu U_1 komplementären, ebenfalls A -invarianten Unterraum W_1 , also $K^n = U_1 \oplus W_1$ mit $A \cdot W_1 \subseteq W_1$.

Einen solchen Unterraum erhalten wir [Lemma 29.7](#). Es gilt $\dim(U_1) = m = \deg(\mu_A)$ und damit $\dim(W_1) = n - m \leq n - 1$.

Ergänzen wir die Basis B_1 von U_1 durch eine Basis \tilde{B}_1 von W_1 zur Basis B , dann besitzt die zu A ähnliche Darstellungsmatrix bzgl. der Basis B die Blockdiagonalstruktur

$$M_B^B(f_A) = \begin{bmatrix} C_{p_1} & & & \\ & \mathcal{M}_{\tilde{B}_1}^{\tilde{B}_1}(f_A|_{W_1}) & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_{p_k} \end{bmatrix}.$$

Für das Minimalpolynom gilt $\mu_A = \mu_{M_B^B(f_A)}$ ([Folgerung 28.4](#)), also auch

$$0 = \widetilde{\mu}_A(M_B^B(f_A)) = \begin{bmatrix} \widetilde{\mu}_A(C_{p_1}) & & & \\ & \widetilde{\mu}_A(\mathcal{M}_{\tilde{B}_1}^{\tilde{B}_1}(f_A|_{W_1})) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \widetilde{\mu}_A(C_{p_k}) \end{bmatrix}.$$

Insbesondere ist also $\widetilde{\mu}_A(\mathcal{M}_{\tilde{B}_1}^{\tilde{B}_1}(f_A|_{W_1})) = 0$. Das heißt, das Minimalpolynom p_2 des eingeschränkten Endomorphismus $f_A|_{W_1}$ ist ein Teiler des Minimalpolynoms $p_1 = \mu_A$ von A .

Schritt 3: Wir wiederholen die Konstruktion:

Wir können nun die Konstruktion von [Schritt 1](#) an für den eingeschränkten Endomorphismus $f_A|_{W_1}$ wiederholen. Dadurch erhalten induktiv wir weitere Polynome p_2, \dots, p_k (die Minimalpolynome der jeweiligen „Restabbildungen“) mit der behaupteten Eigenschaft $p_{j+1} \mid p_j$ sowie die Darstellung (29.6). Das Verfahren stoppt, sobald $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$ und somit $W_k = \{0\}$ ist.

Noch zu zeigen ist die Eindeutigkeit. Es seien dazu

$$A_1 = \begin{bmatrix} C_{p_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_{p_k} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad A_2 = \begin{bmatrix} C_{q_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_{q_\ell} \end{bmatrix}$$

zwei zu A ähnliche Matrizen in Frobenius-Normalform mit normierten, nicht-konstanten Polynomen p_1, \dots, p_k und q_1, \dots, q_ℓ und $k, \ell \in \mathbb{N}$, die die Eigenschaften $p_1 = q_1 = \mu_A = \mu_{A_1} = \mu_{A_2}$ sowie $p_{j+1} \mid p_j$ und $q_{j+1} \mid q_j$ erfüllen für $j = 1, \dots, k - 1$ bzw. $j = 1, \dots, \ell - 1$.

Im Fall $k = 1$ sind wegen $p_1 = q_1$ die Dimensionen der führenden Blöcke C_{p_1} und C_{q_1} beide gleich n , also ist auch $\ell = 1$ und $A_1 = A_2$.

Wir betrachten nun den Fall $k > 1$, also auch $\ell > 1$. Da die Matrizen A_1 und A_2 beide zu A ähnlich sind, sie auch zueinander ähnlich, d. h., es gibt eine reguläre Matrix $T \in K^{n \times n}$ mit $A_1 = T A_2 T^{-1}$. Da Polynome beim Einsetzen von Blockdiagonalmatrizen blockweise wirken, haben wir

$$p_2(A_1) = \begin{bmatrix} p_2(C_{p_1}) & & & \\ & p_2(C_{p_2}) & & \\ & & \ddots & \\ & & & p_2(C_{p_k}) \end{bmatrix}.$$

Dabei ist $p_j(C_{p_j}) = 0$ für alle $j = 1, \dots, k$, denn nach [Lemma 28.15](#) ist p_j das Minimalpolynom von C_{p_j} . Nach Voraussetzung ist p_2 ein Vielfaches von p_2, \dots, p_k , also sind auch $p_2(C_{p_3})$ usw. bis $p_2(C_{p_k})$ Nullmatrizen. Also haben wir

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} p_2(C_{p_1}) & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix} &= p_2(A_1) = p_2(T A_2 T^{-1}) = T p_2(A_2) T^{-1} \\ &= T \begin{bmatrix} p_2(C_{q_1}) & & & \\ & p_2(C_{q_2}) & & \\ & & \ddots & \\ & & & p_2(C_{q_\ell}) \end{bmatrix} T^{-1} \\ &= T \begin{bmatrix} p_2(C_{p_1}) & & & \\ & p_2(C_{q_2}) & & \\ & & \ddots & \\ & & & p_2(C_{q_\ell}) \end{bmatrix} T^{-1}. \end{aligned}$$

Insbesondere sind $p_2(A_1)$ und $p_2(A_2)$ ähnliche Matrizen und haben als solche nach [Folgerung 15.41](#) denselben Rang. Da die Ränge der beiden Matrizen links und rechts durch die Summe der Ränge der Diagonalblöcke gegeben sind, muss insbesondere $p_2(C_{q_2}) = 0$ gelten. Also folgt $q_2 \mid p_2$. Durch Vertauschen der Rollen haben wir ebenfalls $p_2 \mid q_2$, und weil beide Polynome normiert sind, muss $p_2 = q_2$ gelten. Also haben auch die zweiten Diagonalblöcke identische Größe. Induktiv zeigt man dasselbe weiter, bis sich schließlich $k = \ell$ und $p_k = q_k$ ergibt. Damit ist die Eindeutigkeit der Frobenius-Normalform gezeigt.

[Aussage \(ii\)](#) kann analog gezeigt werden. □

Bemerkung 29.10 (zur Frobenius-Normalform).

- (i) Die in der Frobenius-Normalform auftretenden normierten, nicht-konstanten Polynome p_1, \dots, p_k heißen die **Invariantenteiler** der Matrix A bzw. des Endomorphismus f .
- (ii) Jede Begleitmatrix der Dimension $m \in \mathbb{N}$ besitzt maximal $2m - 1$ Einträge ungleich Null. Damit hat die Frobenius-Normalform mit $k \in \mathbb{N}$ Blöcken maximal $2n - k$ Einträge ungleich Null. △

Beispiel 29.11 (Frobenius-Normalform).

- (i) Die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -4 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$$

besitzt das Minimalpolynom $\mu_A = (\lambda - 2)^3 = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8$. A ist daher ähnlich zu seiner Frobenius-Normalform, die nur aus einem Block C_{p_1} zu $p_1 = \mu_A$ besteht:

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & -12 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

(ii) Die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$$

besitzt das Minimalpolynom $\mu_A = (\lambda - 2)^2 = \lambda^2 - 4\lambda + 4$. Die Frobenius-Normalform beginnt mit dem 2×2 -Block C_{p_1} zu $p_1 = \mu_A$. Da nur noch Dimension 1 fehlt, muss das normierte, nicht-konstante Folgepolynom p_2 vom Grad 1 sein und außerdem $p_2 \mid p_1$ erfüllen. Es muss also $p_2 = \lambda - 2$ gelten. A ist daher ähnlich zu seiner Frobenius-Normalform, die aus zwei Blöcken C_{p_1} und C_{p_2} besteht:

$$\widehat{A} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -4 & \\ \hline 1 & 4 & \\ \hline & & 2 \end{array} \right].$$

(iii) Die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & 3 \\ -1 & 5 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{4 \times 4}$$

besitzt das Minimalpolynom $\mu_A = (\lambda - 3)^2(\lambda - 2) = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 21\lambda - 18$. Die Frobenius-Normalform beginnt mit dem 3×3 -Block C_{p_1} zu $p_1 = \mu_A$. Da nur noch Dimension 1 fehlt, kommen als normiertes, nicht-konstantes Folgepolynom p_2 vom Grad 1 wegen $p_2 \mid p_1$ beide Möglichkeiten $p_2 = \lambda - 3$ oder $p_2 = \lambda - 2$ in Frage.

Hier ist $p_2 = \lambda - 3$ die richtige Wahl, denn ähnliche Matrizen besitzen das gleiche charakteristische Polynom, was in diesem Fall gerade $\chi_A = (\lambda - 3)\mu_A$ ist. Die Frobenius-Normalform von A , zu der A ja ähnlich ist, muss also gerade dieses Polynom als charakteristisches Polynom haben. Da das charakteristische Polynom der Frobeniusnormalform von A blockweise berechnet werden kann ergibt sich gerade $\lambda - 3$ als der verbleibende Faktor. A ist daher ähnlich zu seiner Frobenius-Normalform, die aus zwei Blöcken C_{p_1} und C_{p_2} besteht:

$$\widehat{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 18 & \\ 1 & 0 & -21 & \\ 0 & 1 & 8 & \\ \hline & & & 3 \end{array} \right].$$

(iv) **Das folgende Beispiel wurde nachträglich eingefügt.** Die Matrix

$$A = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$$

besitzt das Minimalpolynom $\mu_A = \lambda - 1$. Die weiteren Polynome sind wegen der Eigenschaft $p_2 \mid p_1$ und $p_3 \mid p_2$ gleich $p_3 = p_2 = p_1 = \lambda - 1$. A ist daher ähnlich zu seiner Frobenius-Normalform, die aus drei Blöcken der Dimension 1 besteht:

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad \Delta$$

Die folgende Bemerkung wurde nachträglich hinzugefügt.

Bemerkung 29.12 (Feststellen der Ähnlichkeit zweier Matrizen).

- (i) Die Frobenius-Normalform ist ein ausgezeichneter Repräsentant der Äquivalenzklasse ähnlicher Matrizen in $K^{n \times n}$.

Da die Frobenius-Normalform eindeutig ist, gilt: Zwei Matrizen sind genau dann ähnlich, wenn sie dieselbe Frobenius-Normalform haben. Das kann man zum Test auf Ähnlichkeit verwenden.

- (ii) Die Äquivalenzklassen der Ähnlichkeits-Relation sind nicht alle gleich groß. Beispielsweise ist die Einheitsmatrix I_n der einzig mögliche Repräsentant ihrer Äquivalenzklasse. (**Quizfrage 29.1:** Klar?) Außerdem ist jede Begleitmatrix der einzig mögliche Repräsentant ihrer Äquivalenzklasse. (**Quizfrage 29.2:** Klar?) △

Ende der Vorlesung 18

Ende der Woche 9

§ 30 DIE JORDAN-NORMALFORM

Literatur: Liesen, Mehrmann, 2024, Kapitel 16

Die Frobenius-Normalform aus § 29 verwendete als Grundlage der Zerlegung des Raumes in eine direkte Summe von Unterräumen die A -invarianten Unterräume $\langle x_1, Ax_1, A^2x_1, \dots, A^{m-1}x_1 \rangle$. Die Jordan-Normalform hingegen benutzt eine andere Zerlegung, wobei die Betonung auf Eigenpaaren liegt.

Da im Allgemeinen die geometrische Vielfachheit eines Eigenvektors unterhalb der algebraischen Vielfachheit liegen kann, reichen Eigenvektoren möglicherweise nicht aus, um eine Basis des gesamten Raumes zusammenzustellen, selbst wenn wir annehmen, dass das charakteristische Polynom vollständig in Linearfaktoren zerfällt (Beispiel 24.29). Es gibt aber eine Möglichkeit, den Begriff des Eigenvektors zu verallgemeinern, um Zugriff auf weitere Basisvektoren zu bekommen.

Definition 30.1 (verallgemeinerter Eigenvektor, verallgemeinerter Eigenraum).

Es sei K ein Körper.

- (i) Es sei $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Ein Vektor $x \in K^n \setminus \{0\}$ heißt ein **verallgemeinerter Eigenvektor** oder **Hauptvektor** (englisch: **generalized eigenvector**) zum **Eigenwert** $\lambda \in K$ der Matrix A , wenn

$$(\lambda I - A)^k x = 0, \quad \text{also } x \in \text{Kern}((\lambda I - A)^k) \quad (30.1)$$

für ein $k \in \mathbb{N}$ gilt. Wir sprechen genauer von einem verallgemeinerten Eigenvektor der **Stufe** (englisch: **rank**) $k \in \mathbb{N}$, wenn $x \in \text{Kern}((\lambda I - A)^k) \setminus \text{Kern}((\lambda I - A)^{k-1})$ gilt.

- (ii) Die Menge

$$\begin{aligned} \text{GEig}(A, \lambda) &:= \{x \in K^n \mid (\lambda I - A)^k x = 0 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}\} \\ &= \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \text{Kern}((\lambda I - A)^k) \end{aligned} \quad (30.2)$$

heißt der **verallgemeinerte Eigenraum** (englisch: **generalized eigenspace**) zu $\lambda \in K$.¹²

¹²Wie bereits in Definition 24.6 ist es auch hier praktisch, für den Begriff des verallgemeinerten Eigenraumes auch Parameter $\lambda \in K$ zuzulassen, die keine Eigenwerte sind.

(iii) Es sei V ein Vektorraum über K und $f \in \text{End}(V)$. Ein Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ heißt ein **verallgemeinerter Eigenvektor** oder **Hauptvektor** zum **Eigenwert** $\lambda \in K$ **des Endomorphismus** f , wenn

$$(\lambda \text{id}_V - f)^k(v) = 0, \quad \text{also } v \in \text{Kern}((\lambda \text{id}_V - f)^k) \quad (30.3)$$

für ein $k \in \mathbb{N}$ gilt. Wir sprechen genauer von einem verallgemeinerten Eigenvektor der **Stufe** $k \in \mathbb{N}$, wenn $x \in \text{Kern}((\lambda \text{id}_V - f)^k) \setminus \text{Kern}((\lambda \text{id}_V - f)^{k-1})$ gilt.

(iv) Die Menge

$$\begin{aligned} \text{GEig}(f, \lambda) &:= \{v \in V \mid (\lambda \text{id}_V - f)^k(v) = 0 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}\} \\ &= \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \text{Kern}((\lambda \text{id}_V - f)^k) \end{aligned} \quad (30.4)$$

heißt der **verallgemeinerte Eigenraum** zu $\lambda \in K$. △

Die verallgemeinerten Eigenräume sind A - bzw. f -invariant, denn es gilt

$$(\lambda I - A)A = \lambda A - A^2 = A(\lambda I - A)$$

und analog $(\lambda \text{id}_V - f) \circ f = f \circ (\lambda \text{id}_V - f)$.

Für jede quadratische Matrix A (bzw. analog für jeden Endomorphismus $f \in \text{End}(V)$) gilt

$$\{0\} = \text{Kern}(A^0) \subseteq \text{Kern}(A^1) \subseteq \dots \subseteq \text{Kern}(A^k) \subseteq \text{Kern}(A^{k+1}) \subseteq \dots$$

Durch das Potenzieren werden die Kerne größer, und wir können neben den Eigenvektoren aus $\text{Kern}((\lambda I - A)^k)$ für $k = 1$ im Allgemeinen noch zusätzliche verallgemeinerte Eigenvektoren hinzugewinnen für $k \geq 2$. Es ist dabei ausreichend, den Exponenten gleich der Dimension des betrachteten Vektorraumes zu wählen, denn für höhere Potenzen werden die Kerne nicht mehr größer:

Lemma 30.2 (Kerne von Potenzen von Endomorphismen).

Es sei K ein Körper.

(i) Es sei $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$\text{Kern}(A^n) = \text{Kern}(A^{n+j}) \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N}_0. \quad (30.5)$$

(ii) Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$ und $f \in \text{End}(V)$. Dann gilt

$$\text{Kern}(f^n) = \text{Kern}(f^{n+j}) \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N}_0. \quad (30.6)$$

Wegen **Lemma 30.2** können wir also in der Darstellung des verallgemeinerten Eigenraumes den Exponenten auch einfach auf die Raumdimension festlegen:

$$\text{GEig}(A, \lambda) = \text{Kern}((\lambda I - A)^n) \quad \text{bzw.} \quad \text{GEig}(f, \lambda) = \text{Kern}((\lambda \text{id}_V - f)^n),$$

wenn $n \in \mathbb{N}_0$ die Dimension der Matrix A bzw. des Raumes V ist.

Der folgende Satz besagt, dass wir mit Hilfe verallgemeinerter Eigenvektoren tatsächlich eine Basis des zugrundeliegenden Vektorraumes finden, sofern das Minimalpolynom vollständig in Linearfaktoren zerfällt, also

$$\chi_A = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \dots (\lambda - \lambda_s)^{n_s} \quad (30.7a)$$

$$\chi_f = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \dots (\lambda - \lambda_s)^{n_s} \quad (30.7b)$$

mit den paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in K$ und deren algebraischen Vielfachheiten $n_1, \dots, n_s \in \mathbb{N}$ gilt.

Satz 30.3 (Zerlegung in verallgemeinerte Eigenräume).

Es sei K ein Körper.

- (i) Es sei $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Wenn das charakteristische Polynom χ_A wie in (30.7a) vollständig in Linearfaktoren zerfällt, dann gilt:

$$K^n = \bigoplus_{j=1}^s \text{GEig}(A, \lambda_j). \quad (30.8)$$

- (ii) Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$. Wenn das charakteristische Polynom χ_f wie in (30.7b) vollständig in Linearfaktoren zerfällt, dann gilt:

$$V = \bigoplus_{j=1}^s \text{GEig}(f, \lambda_j). \quad (30.9)$$

Bemerkung 30.4 (zerfallendes charakteristische Polynom).

Körper K , in denen jedes Polynom in $K[t]$ vom Grad ≥ 1 mindestens eine Nullstelle in K besitzt, heißen **algebraisch abgeschlossen** (englisch: **algebraically closed**). Dazu äquivalent ist, dass jedes Polynom vom Grad ≥ 1 vollständig in Linearfaktoren zerfällt. Nach dem **Fundamentalsatz 11.24** ist \mathbb{C} ein solcher Körper. \triangle

Wir gehen nun auf die innere Struktur der verallgemeinerten Eigenräume einer Matrix A ein. Jeder verallgemeinerte Eigenraum $\text{Kern}((\lambda I - A)^n)$ ist A -invariant, zerfällt aber i. A. nochmal in kleinere A -invariante Unterräume. Deren Anzahl ist gleich $\mu^{\text{geo}}(A, \lambda)$. Jeder dieser Unterräume besitzt eine Basis (x_1, \dots, x_k) , $k \in \mathbb{N}$, die mit einem Eigenvektor x_1 beginnt, also einem Hauptvektor der Stufe 1. Dieser wird ggf. ergänzt durch einen Hauptvektor der jeweils folgenden Stufe. Diese können wir aus den Beziehungen

$$(\lambda I - A) x_j = -x_{j-1} \text{ für } j = 2, \dots, r \quad (30.10)$$

bestimmen. Wegen $x_1 \in \text{Kern}(\lambda I - A)$ und dieser Konstruktion gilt in der Tat $x_j \in \text{Kern}((\lambda I - A)^j)$. Der finale Index $r \in \mathbb{N}$ ist der erste, für den (30.10) nicht lösbar ist.

Auf dem Unterraum $\langle x_1, \dots, x_r \rangle$ hat die durch A induzierte Abbildung bezüglich der Basis (x_1, \dots, x_r) wegen der Beziehungen

$$\begin{aligned} A x_1 &= \lambda x_1 \\ A x_2 &= \lambda x_2 + x_1 \\ &\vdots \\ A x_r &= \lambda x_r + x_{r-1} \end{aligned}$$

eine Darstellungsmatrix wie in der folgenden Definition:

Definition 30.5 (Jordan-Block, Jordan-Matrix).

Es sei K ein Körper.

(i) Es sei $\lambda \in K$ und $r \in \mathbb{N}$. Dann heißt die Matrix

$$J_r(\lambda) := \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ & & \lambda & \dots & 0 \\ & & & \dots & 1 \\ & & & & \lambda \end{bmatrix} \in K^{r \times r} \tag{30.11}$$

der **Jordan-Block** (englisch: **Jordan block**) der Größe $r \times r$ mit Diagonaleintrag λ .¹³

(ii) Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$, $n \in \mathbb{N}_0$, heißt eine **Jordan-Matrix** (englisch: **Jordan matrix**), wenn sie eine Blockdiagonalmatrix aus lauter Jordan-Blöcken ist.

△

Bemerkung 30.6 (Eigenschaften von Jordan-Blöcken).

(i) Für $r = 1$ ergibt sich $J_1(\lambda) = (\lambda) \in K^{1 \times 1}$.

(ii) Der Jordan-Block $J_r(\lambda)$ ist ähnlich zur Begleitmatrix C_p des Polynoms $p = (t - \lambda)^r \in K[t]$. Daher gilt (**Lemma 28.15**)

$$\chi_{J_r(\lambda)} = \mu_{J_r(\lambda)} = (t - \lambda)^r \in K[t].$$

(iii) $\lambda \in K$ ist der einzige Eigenwert von $J_r(\lambda)$. Dieser weist die größtmögliche Differenz zwischen seiner algebraischen und geometrischen Vielfachheit auf, denn es gilt

$$\mu^{\text{alg}}(A, \lambda) = r \quad \text{und} \quad \mu^{\text{geo}}(A, \lambda) = 1. \tag{30.11}$$

△

Wir können nun das Hauptresultat dieses Abschnitts angeben:

Satz 30.7 (Jordan-Normalform).

Es sei K ein Körper.

(i) Es sei $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Wenn das charakteristische Polynom χ_A wie in (30.7a) vollständig in Linearfaktoren zerfällt, dann gilt:

(a) A ist ähnlich zu einer Jordan-Matrix

$$\begin{bmatrix} J_{r_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{r_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{r_k}(\lambda_k) \end{bmatrix}. \tag{30.12}$$

Dabei sind $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die Eigenwerte von A entsprechend ihrer geometrischen Vielfachheit, also nicht notwendig alle verschieden. Wir bezeichnen (30.12) als eine **Jordan-Normalform** (englisch: **Jordan normal form**) von A .

(b) Die Jordan-Normalformen von A unterscheiden sich nur in der Reihenfolge ihrer Jordan-Blöcke.

¹³Manche Autoren benutzen auch den Begriff **Jordan-Kästchen**. Manchmal stehen die Einsen auch unterhalb der Hauptdiagonalen, was einer umgekehrten Nummerierung der Vektoren x_1, \dots, x_k entspricht.

- (ii) Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K und $f \in \text{End}(V)$. Wenn das charakteristische Polynom χ_f wie in (30.7b) vollständig in Linearfaktoren zerfällt, dann gilt:
- (a) f besitzt eine Darstellungsmatrix der Gestalt (30.12). Dabei sind $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die Eigenwerte von f entsprechend ihrer geometrischen Vielfachheit, also nicht notwendig alle verschieden. Wir bezeichnen (30.12) als eine **Jordan-Normalform** von f .
 - (b) Die Jordan-Normalformen von f unterscheiden sich nur in der Reihenfolge ihrer Jordan-Blöcke.

Bemerkung 30.8 (Eigenschaften der Jordan-Normalform).

Eine Jordan-Normalform (30.12) gibt Aufschluss über die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte von A sowie über das charakteristische und das Minimalpolynom. Es gilt

$$\chi_A = \prod_{j=1}^k (t - \lambda_j)^{r_j} \quad \text{charakteristisches Polynom} \quad (30.13a)$$

$$\text{und } \mu_A = \prod_{\lambda \in \Lambda(A)} (t - \lambda)^{\max\{r_j \mid \lambda_j = \lambda\}} \quad \text{Minimalpolynom.} \quad (30.13b)$$

Das bedeutet, für die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten eines Eigenwertes $\lambda \in \Lambda(A)$ gilt

$$\mu^{\text{alg}}(A, \lambda) = \sum_{\lambda_j = \lambda} r_j \quad \text{algebraische Vielfachheit} \quad (30.13c)$$

$$\mu^{\text{geo}}(A, \lambda) = \sum_{\lambda_j = \lambda} 1 \quad \text{geometrische Vielfachheit.} \quad (30.13d)$$

Die **algebraische Vielfachheit** eines Eigenwertes λ entspricht also der **Summe der Dimensionen aller Jordan-Blöcke** mit dem Diagonaleintrag λ , und die **geometrische Vielfachheit** entspricht der **Anzahl der Jordan-Blöcke** mit diesem Diagonaleintrag. Die **Vielfachheit der Nullstelle λ** im **Minimalpolynom** entspricht der **Größe des größten Jordan-Blocks** mit dem Diagonaleintrag λ .

Zu jedem Jordan-Block mit Diagonaleintrag (Eigenwert) λ gehört genau ein Eigenvektor. Diese Eigenvektoren spannen gemeinsam den Eigenraum $\text{Eig}(A, \lambda)$ auf. \triangle

Beispiel 30.9 (Jordan-Normalform, vgl. Beispiel 29.11).

- (i) Die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -4 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$$

besitzt das charakteristische Polynom und Minimalpolynom $\chi_A = \mu_A = (\lambda - 2)^3$, also den einzigen Eigenwert 2 mit algebraischer Vielfachheit $\mu^{\text{alg}}(A, 2) = 3$. Aus (30.13) erfahren wir, dass wir nur Jordan-Blöcke zum Eigenwert 2 bekommen werden und dass der größte Jordan-Block die Größe 3×3 haben wird. Daher kann es nur einen einzigen Jordan-Block geben, also gilt $\mu^{\text{geo}}(A, 2) = 3$. Wir können also an dieser Stelle bereits eine Jordan-Normalform von A angeben:¹⁴

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix}.$$

¹⁴Der besseren Lesbarkeit wegen lassen wir die strukturellen Nullen in diesem Beispiel weg.

Wollen wir auch eine Transformationsmatrix, also eine zugehörige Basis von \mathbb{Q}^3 bestimmen, so können wir wie folgt vorgehen: Aus dem linearen Gleichungssystem $(2 \cdot I - A) x_1 = 0$ erhalten wir einen ersten Eigenvektor:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix} x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

etwa $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Aus dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix} x_2 = -x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

erhalten wir den verallgemeinerten Eigenvektor 2. Stufe $x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und anschließend aus

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix} x_3 = -x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

den verallgemeinerten Eigenvektor 3. Stufe $x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Wir können jetzt mit Hilfe der verallgemeinerten Eigenvektoren die Spalten der Transformationsmatrix angeben, um die **neue Basis** \widehat{B}_V in der **alten Basis** (e_1, e_2, e_3) darzustellen:

$$T^{-1} := \mathcal{T}_{\widehat{B}_V}^{(e_1, e_2, e_3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Es gilt also

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\widehat{A}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_T \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -4 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{T^{-1}}.$$

(ii) Die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$$

besitzt das charakteristische Polynom $\chi_A = (\lambda - 2)^3$ und das Minimalpolynom $\mu_A = (\lambda - 2)^2$, also den einzigen Eigenwert 2 mit algebraischer Vielfachheit $\mu^{\text{alg}}(A, 2) = 3$. Aus (30.13) erfahren wir, dass wir nur Jordan-Blöcke zum Eigenwert 2 bekommen und dass der größte Jordan-Block die Größe 2×2 haben wird. Daher muss es genau einen weiteren Jordan-Block geben, mit der Größe 1×1 , also gilt $\mu^{\text{geo}}(A, 2) = 2$. Wir können also an dieser Stelle bereits eine Jordan-Normalform von A angeben:

$$\widehat{A} = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & \\ & 2 & \\ \hline & & 2 \end{array} \right].$$

Wollen wir auch eine Transformationsmatrix, also eine zugehörige Basis von \mathbb{Q}^3 bestimmen, so können wir wie folgt vorgehen: Aus dem linearen Gleichungssystem $(2 \cdot I - A) x_1 = 0$ erhalten wir wie erwartet zwei linear unabhängige Eigenvektoren:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

nämlich $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Wir wissen, dass es einen Vektor x_1 in diesem Eigenraum geben muss, zu dem ein verallgemeinerter Eigenvektor der 2. Stufe existiert, also eine Lösung von

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} x_2 = -x_1 = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Die Transformation auf Zeilenstufenform zeigt, dass das mit $\alpha = 1$ und $\beta = -1$ möglich ist und wir dann $x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und beispielsweise $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ erhalten. Ein verallgemeinerter Eigenvektor 3. Stufe wird nicht existieren, da wir dann einen Jordan-Block der Größe 3×3 bekämen. In der Tat ist

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} x_3 = -x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nicht lösbar.¹⁵

Nachdem wir nun den zwei-dimensionalen A -invarianten Unterraum $\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ von $\text{GEig}(A, 2)$ gefunden haben, benötigen wir noch einen weiteren Eigenvektor, der in einem komplementären Unterraum liegt. Dazu wählen wir beispielsweise den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ aus $\text{Eig}(A, 2)$.

Wie in Teil (i) erhalten wir mit Hilfe der verallgemeinerten Eigenvektoren die Transformationsmatrix

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

und es gilt

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & | & \\ & 2 & & \\ \hline & & & 2 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_T \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{T^{-1}}.$$

(iii) Die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & 3 \\ -1 & 5 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{4 \times 4}$$

besitzt das charakteristische Polynom $\chi_A = (\lambda - 3)^3(\lambda - 2)$ und das Minimalpolynom $\mu_A = (\lambda - 3)^2(\lambda - 2)$. Aus (30.13) erfahren wir, dass wir Jordan-Blöcke zu den Eigenwerten 3 und 2

¹⁵Eine alternative Vorgehensweise wäre gewesen, zuerst einen Vektor in $x_2 \in \text{Kern}((2 \cdot I - A)^2) \setminus \text{Kern}((2 \cdot I - A)^1)$ zu berechnen und dann $x_1 = (2 \cdot I - A) x_2$ zu verwenden.

bekommen werden. Der größte Jordan-Block zum Eigenwert 3 wird die Größe 3×3 haben und der größte Jordan-Block zum Eigenwert 2 die Größe 1×1 . Also gibt es nur jeweils diesen einen Jordan-Block, und es gilt $\mu^{\text{geo}}(A, 3) = 1$ und $\mu^{\text{geo}}(A, 2) = 1$. Wir können also an dieser Stelle bereits eine Jordan-Normalform von A angeben:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & & & \\ & 3 & & & \\ & & 3 & & \\ & & & 2 & \\ & & & & 2 \end{bmatrix}.$$

Die Bestimmung einer Transformationsmatrix kann wie in Teil (i) erfolgen. Da hier zu jedem Eigenwert nur ein Jordan-Block vorliegt, können wir mit irgendeinem Eigenvektor starten und im Fall des Eigenwertes 3 dazu einen verallgemeinerten Eigenvektor 2. und 3. Stufe bestimmen.

(iv) Die Matrix

$$A = I = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$$

besitzt das charakteristische Polynom $\chi_A = (\lambda - 1)^3$ und das Minimalpolynom $\mu_A = \lambda - 1$. Sie liegt bereits in Jordan-Normalform vor.

Unabhängig davon erfahren wir aus (30.13), dass wir nur Jordan-Blöcke zum Eigenwert 1 bekommen und dass der größte Jordan-Block die Größe 1×1 haben wird. Daher muss es genau drei solcher Jordan-Blöcke geben, also gilt $\mu^{\text{geo}}(A, 1) = 3$. In diesem Beispiel ist jeder Vektor (außer dem Nullvektor) ein Eigenvektor von A , sodass wir jede reguläre Matrix T als Transformationsmatrix wählen können, was durch

$$I = T I T^{-1}$$

auch bestätigt wird.

(v) Die Ableitungsabbildung $f: K_n[t] \rightarrow K_n[t]$ auf dem Unterraum der Polynome vom Höchstgrad $n \in \mathbb{N}_0$ über einem Körper K ist durch die

$$f(t^n) := \begin{cases} n t^{n-1} & \text{für } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{für } n = 0 \end{cases}$$

gegeben, siehe Beispiel 17.8. Ihre Darstellungsmatrix bzgl. der Monombasis (t^0, t^1, \dots, t^n) ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & 0 & 2 & \dots & 0 \\ & & 0 & \dots & 0 \\ & & & \dots & 0 \\ 0 & & & & 0 & n \end{pmatrix} \in K^{n \times n}$$

Diese liegt schon beinahe in Jordan-Normalform vor. Durch Verwendung der Basis

$$\left(t^0, t^1, \frac{1}{2}t^2, \frac{1}{3}t^3, \dots, \frac{1}{n}t^n \right)$$

können wir sie leicht in Jordan-Normalform bringen. Es ergibt sich ein einzelner großer Jordan-Block $J_{n+1}(0)$ zum einzigen Eigenwert 0. △

Kapitel 6 Innenprodukte

In diesem Kapitel kommen wir zum Begriff des Innenprodukts in Vektorräumen. Mit diesem werden wir den Vektorraum mit zusätzlichen Möglichkeiten ausstatten, u. a., den Konzepten „Länge eines Vektors“, „Winkel zwischen Vektoren“ und „Winkel zwischen Unterräumen“.

§ 31 BILINEARFORMEN

Literatur: Fischer, Springborn, 2020, Kapitel 6

Wir beginnen mit einer Rekapitulation von Bilinearformen. Dazu sei V ein Vektorraum über dem Körper K . Eine Abbildung $\gamma: V \times V \rightarrow K$ heißt eine **Bilinearform** auf $V \times V$ (oder einfach: auf V), wenn für jedes feste $\bar{u} \in V$ und jedes feste $\bar{v} \in V$ die Abbildungen

$$\begin{aligned}\gamma(\bar{u}, \cdot): V \ni v &\mapsto \gamma(\bar{u}, v) \in K \\ \gamma(\cdot, \bar{v}): V \ni u &\mapsto \gamma(u, \bar{v}) \in K\end{aligned}$$

beide linear sind. Die Menge $\text{Bil}(V, V)$ aller Bilinearformen $V \times V \rightarrow K$ ist ein K -Vektorraum ([Lemma 22.3](#)).

Wir nennen eine Bilinearform wie in [Definition 22.29](#)

$$\text{symmetrisch, wenn } \gamma(u, v) = \gamma(v, u) \quad \text{für alle } u, v \in V \quad (31.1a)$$

$$\text{schiefsymmetrisch, wenn } \gamma(u, v) = -\gamma(v, u) \quad \text{für alle } u, v \in V \quad (31.1b)$$

$$\text{alternierend, wenn } u = v \implies \gamma(u, v) = 0 \quad (31.1c)$$

gilt. Wie in [Lemma 22.30](#) gezeigt, ist jede alternierende Bilinearform schiefsymmetrisch. Im Fall $\text{char}(K) \neq 2$ ist auch jede schiefsymmetrische Bilinearform alternierend.

Symmetrische Bilinearformen sind genau diejenigen mit symmetrischen Darstellungsmatrizen. Ebenso sind schiefsymmetrische Bilinearformen genau diejenigen mit schiefsymmetrischen (antisymmetrischen) Darstellungsmatrizen.

Beispiel 31.1 (Bilinearformen auf einem Vektorraum, vgl. [Beispiel 22.2](#)).

(i) Für jede Matrix $A \in K^{n \times n}$ ist die Abbildung

$$K^n \times K^n \ni (x, y) \mapsto y^T A x \in K$$

eine Bilinearform auf K^n . Wir nennen sie die **von A induzierte Bilinearform** auf K^n und bezeichnen sie auch mit γ_A . Die Symmetrieeigenschaften von γ_A sind genau dieselben wie die von A .

(ii) Insbesondere ist $(A = I)$ die Abbildung

$$K^n \times K^n \ni (x, y) \mapsto y^T x = \sum_{i=1}^n x_i y_i \in K$$

eine symmetrische Bilinearform auf K^n .

(iii) Die Multiplikation zweier Polynome

$$K[t] \times K[t] \ni (p, q) \mapsto p \cdot q \in K[t]$$

ist eine symmetrische Bilinearform auf $K[t]$. △

Definition 31.2 (Darstellungsmatrix einer Bilinearform).

Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem Körper K und $\gamma \in \text{Bil}(V, V)$. Weiter sei $B_V = (v_1, \dots, v_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$, eine Basis von V . Die Matrix

$$\mathcal{M}_{B_V^*}^{B_V}(\gamma) = (\gamma(v_i, v_j))_{i,j=1}^n \in K^{n \times n} \quad (31.2)$$

heißt die **Darstellungsmatrix** der Bilinearform γ bzgl. der Basis B_V . △

Sind $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ und $v = \sum_{j=1}^n \beta_j v_j$ zwei beliebige Vektoren in V , so gilt

$$\gamma(u, v) = \gamma\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^n \beta_j v_j\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^n \beta_j \gamma(v_i, v_j) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}^T \mathcal{M}_{B_V^*}^{B_V}(\gamma) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}. \quad (31.3)$$

Der Wert einer Bilinearform beim Einsetzen von zwei Vektoren ergibt sich also dadurch, dass wir deren Koeffizientenvektoren von links bzw. von rechts an die Darstellungsmatrix heranmultiplizieren. Insbesondere gilt

$$\mathcal{M}_{(e_1^*, \dots, e_n^*)}^{(e_1, \dots, e_n)}(\gamma_A) = A.$$

Bemerkung 31.3 (zur Darstellungsmatrix von Bilinearformen).

(i) Nach [Lemma 22.28](#) kann eine Bilinearform auf V identifiziert werden mit einem Element $\widehat{\gamma}$ von $\text{Hom}(V, V^*)$, indem man das **zweite** Argument von $\gamma(\cdot, \cdot)$ einsetzt und das erste freilässt, also $\widehat{\gamma}(v) = \gamma(\cdot, v)$. Die Gleichheit in [\(31.2\)](#) lautet eigentlich

$$\mathcal{M}_{B_V^*}^{B_V}(\widehat{\gamma}) = (\gamma(v_i, v_j))_{i,j=1}^n.$$

(ii) Nach [Lemma 22.28](#) kann eine Bilinearform auf V außerdem mit einem Tensor vom Typ $(0, 2)$ über V , also einem Element von $\mathcal{T}_2^0(V)$, identifiziert werden. Wählen wir die zu $B_V = (v_1, \dots, v_n)$ duale Basis $B_V^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$ und als Basis von $\mathcal{T}_2^0(V)$ die elementaren Tensoren $v_i^* \otimes v_j^*$ (vgl. [Bemerkung 22.26](#)), so stimmt die Darstellungsmatrix $\mathcal{M}_{B_V^*}^{B_V}(\gamma)$ gerade mit der Matrix der Komponenten des Tensors überein. △

In einem endlich-dimensionalen Vektorraum V ist die zu $\gamma \in \text{Hom}(V, V^*)$ **duale Bilinearform** (englisch: **dual bilinear form**) $\gamma^*: V^{**} \cong V \rightarrow V^*$ nach der allgemeinen **Definition 21.26** für duale Homomorphismen definiert durch

$$\gamma^*(u, v) = \gamma(v, u) \tag{31.4}$$

für $u, v \in V$. Insofern könnten wir symmetrische Bilinearformen auch als **selbstduale Bilinearformen** (englisch: **self-dual bilinear form**) bezeichnen. (**Quizfrage 31.1:** In welcher Beziehung stehen die Darstellungsmatrizen von γ und γ^* zueinander?)

Für jede Basis B_V eines endlich-dimensionalen Vektorraumes V ist die Zuordnung

$$\mathcal{M}_{B_V^*}^{B_V} : \underbrace{\text{Hom}(V, V^*)}_{\cong \text{Bil}(V, V)} \ni \gamma \mapsto \mathcal{M}_{B_V^*}^{B_V}(\gamma) \in K^{n \times n} \tag{31.5}$$

einer Bilinearform zu ihrer Darstellungsmatrix ein Isomorphismus von Vektorräumen.

Aus dem **Transformationssatz für Homomorphismen 20.6** folgt sofort:

Satz 31.4 (Transformation der Darstellungsmatrix einer Bilinearform beim Wechsel der Basis).

Es seien K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K . Weiter seien B_V und \widehat{B}_V Basen von V . Dann gilt für die Darstellungsmatrix einer Bilinearform $\gamma: V \times V \rightarrow K$:

$$\mathcal{M}_{\widehat{B}_V^*}^{\widehat{B}_V}(\gamma) = \mathcal{T}_{\widehat{B}_V}^{B_V} \mathcal{M}_{B_V^*}^{B_V}(\gamma) \mathcal{T}_{B_V}^{\widehat{B}_V}. \tag{31.6}$$

Bezeichnen wir dabei wie üblich mit $T := \mathcal{T}_{\widehat{B}_V}^{B_V}$ die Transformationsmatrix und mit $A := \mathcal{M}_{B_V^*}^{B_V}(\gamma)$ und $\widehat{A} := \mathcal{M}_{\widehat{B}_V^*}^{\widehat{B}_V}(\gamma)$ die Darstellungsmatrizen, so können wir (31.6) schreiben als

$$\widehat{A} = T^{-T} A T^{-1}.$$

Definition 31.5 (Kongruenztransformation, kongruente Matrizen).

Es seien K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_0$. Zwei Matrizen $A, \widehat{A} \in K^{n \times n}$ heißen **kongruent** (englisch: **congruent**), wenn es eine invertierbare Matrix $T \in K^{n \times n}$ gibt, sodass gilt:

$$\widehat{A} = T^{-T} A T^{-1}. \tag{31.7}$$

Der Übergang von A zu $T^{-T} A T^{-1}$ heißt auch eine **Kongruenztransformation** (englisch: **congruence transformation**) von A . △

Beachte: Die Kongruenz von Matrizen ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge $K^{n \times n}$. A ist genau dann symmetrisch, wenn \widehat{A} symmetrisch ist. **Quizfrage 31.2:** Klar?

Analog zu **Satz 20.9** (Äquivalenztransformationen) und **Satz 20.14** (Ähnlichkeitstransformationen) können wir zeigen:

Satz 31.6 (über kongruente Matrizen, vgl. **Satz 20.9** und **Satz 20.14**).

Es seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}_0$ und $A, \widehat{A} \in K^{n \times n}$. Weiter sei V ein Vektorraum über K mit $\dim(V) = n$ und B_V eine Basis von V mit dualer Basis B_V^* , $\gamma: V \times V \rightarrow K$ eine Bilinearform und $A = \mathcal{M}_{B_V^*}^{B_V}(\gamma)$.¹ Dann sind äquivalent:

¹Diese Voraussetzung ist nicht einschränkend. Zu einer gegebenen Matrix A können wir immer $V = K^n$, B_V als die Standardbasis und $\gamma = \gamma_A$ wählen.

- (i) A und \widehat{A} sind kongruente Matrizen.
- (ii) \widehat{A} ist die Darstellungsmatrix von γ bzgl. einer geeigneten Basis \widehat{B}_V und zugehöriger dualer Basis \widehat{B}_V^* .

Beweis. Aussage (i) \Rightarrow Aussage (ii): Wie im Beweis von Satz 20.9 können wir T^{-1} als Transformationsmatrix eines Basiswechsels $T^{-1} = \mathcal{T}_{B_V}^{\widehat{B}_V}$ auffassen. Nach (21.13) gilt dann

$$T^{-\top} = \mathcal{T}_{\widehat{B}_V^*}^{B_V^*}.$$

Gemäß dem Transformationssatz 20.6 für Darstellungsmatrizen haben wir

$$\mathcal{M}_{\widehat{B}_V^*}^{\widehat{B}_V}(\gamma) = \mathcal{T}_{\widehat{B}_V^*}^{B_V^*} \mathcal{M}_{B_V^*}^{B_V}(\gamma) \mathcal{T}_{B_V}^{\widehat{B}_V} = T^{-\top} A T^{-1} = \widehat{A}.$$

Aussage (ii) \Rightarrow Aussage (i): Definieren wir $T^{-1} = \mathcal{T}_{B_V}^{\widehat{B}_V}$, so folgt die Behauptung sofort aus dem Transformationssatz 20.6. \square

Bemerkung 31.7 (zum Transformationsverhalten von Darstellungsmatrizen).

Wir haben jetzt bereits drei verschiedene Transformationsverhalten für Darstellungsmatrizen bei einem Basiswechsel kennengelernt:

Name	Transformation	Darstellungsmatrizen von
Äquivalenztransformation	$S A T^{-1}$	$\text{Hom}(V, W)$
Ähnlichkeitstransformation	$T A T^{-1}$	$\text{End}(V)$
Kongruenztransformation	$T^{-\top} A T^{-1}$	$\text{Bil}(V, V) \cong \text{Hom}(V, V^*)$

Ähnlichkeits- und Kongruenztransformationen sind dabei Spezialfälle von Äquivalenztransformationen.

Einer Matrix kann man nicht ansehen, welche Art von Abbildung sie repräsentiert! Für die Auswahl der richtigen Transformation ist das aber wesentlich, aber auch für viele andere Konzepte. Beispielsweise ist die Frage nach Eigenwerten einer Matrix oder nach ihrer Jordan-Normalform nur dann sinnvoll, wenn diese einen Endomorphismus repräsentiert!

Die Tatsache, dass eine Eigenschaft einer Matrix unter einer Klasse von Transformationen erhalten bleibt, zeigt uns ebenfalls, welche Art von Abbildung die Matrix repräsentiert. Beispielsweise bleibt die Symmetrie einer Matrix nur durch Kongruenztransformationen erhalten, nicht aber unter Äquivalenz- und Ähnlichkeitstransformationen. Insofern ist die Symmetrie einer Matrix eine strukturelle Eigenschaft der dahinterliegenden linearen Abbildung genau dann, wenn diese Abbildung ein Element von $\text{Hom}(V, V^*)$ ist, also eine Bilinearform! \triangle

Der Rang einer Matrix bleibt unter einer Äquivalenztransformation erhalten (Folgerung 15.41), also auch unter einer Kongruenztransformation. Alle Darstellungsmatrizen einer Bilinearform besitzen daher denselben Rang. Der Rang wird damit zu einer Eigenschaft der Bilinearform selbst:

Definition 31.8 (Rang einer Bilinearform).

Es seien K ein Körper und V ein Vektorraum über K mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei $\gamma: V \times V \rightarrow K$ eine Bilinearform und $A = \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(\gamma) \in K^{n \times n}$ ihre Darstellungsmatrix bzgl. einer beliebigen Basis B_V von V . Wir definieren den **Rang** (englisch: **rank**) der Bilinearform γ durch

$$\text{Rang}(\gamma) := \text{Rang}(A). \quad (31.8)$$

△

Beachte: Da die duale Bilinearform durch die Abbildungsmatrix A^T dargestellt wird, gilt $\text{Rang}(\gamma) = \text{Rang}(\gamma^*)$.

Definition 31.9 (nicht-ausgeartete und perfekte Bilinearformen).

Es seien K ein Körper und V ein Vektorraum über K . Weiter sei $\gamma: V \times V \rightarrow K$ eine Bilinearform.

(i) γ heißt **nicht ausgeartet** (englisch: **non-degenerate**), wenn die linearen Abbildungen

$$V \ni u \mapsto \gamma(u, \cdot) \in V^* \quad (31.9a)$$

$$V \ni v \mapsto \gamma(\cdot, v) \in V^* \quad (31.9b)$$

beide injektiv sind. Andernfalls heißt γ **ausgeartet** (englisch: **degenerate**).

(ii) γ heißt **perfekt**, wenn die linearen Abbildungen

$$V \ni u \mapsto \gamma(u, \cdot) \in V^* \quad (31.10a)$$

$$V \ni v \mapsto \gamma(\cdot, v) \in V^* \quad (31.10b)$$

beide bijektiv sind.

△

Das folgende Lemma stellt klar, wie wir prüfen können, ob eine Bilinearform ausgeartet ist oder nicht:

Lemma 31.10 (nicht-ausgeartete Bilinearformen).

Es seien K ein Körper und V ein Vektorraum über K . Weiter sei $\gamma: V \times V \rightarrow K$ eine Bilinearform. Dann sind äquivalent:

(i) γ ist nicht entartet.

(ii) Es gelten

$$\gamma(u, v) = 0 \text{ für alle } v \in V \quad \Rightarrow \quad u = 0 \quad (31.11a)$$

$$\gamma(u, v) = 0 \text{ für alle } u \in V \quad \Rightarrow \quad v = 0 \quad (31.11b)$$

(iii) Es gelten

$$\text{für alle } u \neq 0 \text{ existiert } v \in V \text{ mit } \gamma(u, v) \neq 0 \quad (31.12a)$$

$$\text{für alle } v \neq 0 \text{ existiert } u \in V \text{ mit } \gamma(u, v) \neq 0 \quad (31.12b)$$

Beweis. Aussage (i) \Leftrightarrow Aussage (ii): Es gilt:

$$\begin{aligned} & u \mapsto \gamma(u, \cdot) \text{ ist injektiv} \\ \Leftrightarrow & \text{Kern}(u \mapsto \gamma(u, \cdot)) = \{0\} \quad \text{nach Lemma 17.6} \\ \Leftrightarrow & \text{Wenn } \gamma(u, \cdot) \text{ die Nullabbildung in } V^* \text{ ist, dann muss } u = 0 \text{ gelten.} \\ \Leftrightarrow & (31.11a) \end{aligned}$$

Analog folgt auch die Äquivalenz der Injektivität von $v \mapsto \gamma(\cdot, v)$ und (31.11b).

Aussage (ii) \Leftrightarrow Aussage (iii): (31.11a) ist äquivalent zu (31.12a), und (31.11b) ist äquivalent zu (31.12b). \square

Im Fall endlich-dimensionaler Vektorräume fallen die Eigenschaften „nicht entartet“ und „perfekt“ zusammen und lassen sich zudem anhand einer Darstellungsmatrix prüfen:

Lemma 31.11 (nicht-ausgeartete Bilinearformen in endlicher Dimension).

Es seien K ein Körper und V ein Vektorraum über K mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei $\gamma: V \times V \rightarrow K$ eine Bilinearform und $A = \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(\gamma) \in K^{n \times n}$ ihre Darstellungsmatrix bzgl. einer beliebigen Basis B_V von V . Dann sind äquivalent:

- (i) $u \mapsto \gamma(u, \cdot)$ ist injektiv.
- (ii) $v \mapsto \gamma(\cdot, v)$ ist injektiv.
- (iii) γ ist nicht-entartet.
- (iv) γ ist perfekt.
- (v) A ist regulär.

Beweis. Aussage (i) \Rightarrow Aussage (v): Es gilt $\dim(V) = \dim(V^*)$. Die Injektivität der Abbildung $u \mapsto \gamma(u, \cdot) \in \text{Hom}(V, V^*)$ impliziert also bereits die Bijektivität (Folgerung 18.9). Das heißt wiederum (Satz 19.12), dass die Darstellungsmatrix A^T regulär ist, also auch A .

Aussage (ii) \Rightarrow Aussage (v) folgt analog.

Aussage (iii) \Rightarrow Aussage (i): klar nach Definition.

Aussage (iii) \Rightarrow Aussage (ii): klar nach Definition.

Aussage (iii) \Rightarrow Aussage (iv): Es gilt $\dim(V) = \dim(V^*)$. Die Injektivität der Abbildung $u \mapsto \gamma(u, \cdot) \in \text{Hom}(V, V^*)$ impliziert also bereits die Bijektivität (Folgerung 18.9). Weiter impliziert die Injektivität der Abbildung $v \mapsto \gamma(\cdot, v) \in \text{Hom}(V, V^*)$ bereits die Bijektivität. Also ist γ perfekt.

Aussage (iv) \Rightarrow Aussage (iii): klar nach Definition.

Aussage (v) \Rightarrow Aussage (iii): Die Darstellungsmatrix A ist regulär, also ist die Abbildung $v \mapsto \gamma(\cdot, v)$ bijektiv (Satz 19.12). Da auch A^T regulär ist, ist auch die Abbildung $u \mapsto \gamma(u, \cdot)$ bijektiv. \square

§ 32 QUADRATISCHE FORMEN

Literatur: Fischer, Springborn, 2020, Kapitel 6

Kapitel A Die komplexen Zahlen

Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ oder $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ sind ausreichend, um Objekte zu zählen. Gleichungen wie $x + 2 = 1$ sind jedoch in \mathbb{N}_0 nicht lösbar. Dafür benötigen wir die Menge der ganzen Zahlen \mathbb{Z} . Gleichungen wie $2x = 1$ sind aber auch in \mathbb{Z} nicht lösbar. Dafür benötigen wir die Menge der rationalen Zahlen \mathbb{Q} . Gleichungen wie $x^2 = 2$ sind aber auch in \mathbb{Q} nicht lösbar. Dafür benötigen wir die Menge der reellen Zahlen \mathbb{R} . Gleichungen wie $x^2 = -1$ sind aber auch in \mathbb{R} nicht lösbar. Dafür benötigen wir die Menge der komplexen Zahlen \mathbb{C} .

Die **komplexen Zahlen** lassen sich aus den reellen Zahlen \mathbb{R} aufbauen. Die Menge \mathbb{C} der komplexen Zahlen besteht aus allen Ausdrücken der Form

$$a + bi,$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$ sind und i ein Symbol ist, das nicht in \mathbb{R} enthalten ist.

Die **Addition** (englisch: **addition**) mit dem Symbol $+$ ist definiert durch

$$(a + bi) + (c + di) := (a + c) + (b + d)i.$$

Aufgrund der Kommutativität von $+$ in \mathbb{R} bildet $(\mathbb{C}, +)$ eine kommutative Halbgruppe. Wir prüfen leicht nach, dass $0 + 0i$ neutrales Element in $(\mathbb{C}, +)$ ist und dass $a + bi$ und $-a - bi := (-a) + (-b)i$ additive Inverse zueinander sind. Wir schreiben daher auch $-(a + bi)$ für $(-a) + (-b)i$. Wir haben damit gezeigt: $(\mathbb{C}, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

Wir definieren weiter die **Multiplikation** (englisch: **multiplication**) mit dem Symbol \cdot durch¹

$$(a + bi) \cdot (c + di) := (a \cdot c - b \cdot d) + (a \cdot d + b \cdot c)i.$$

Motiviert ist diese Definition durch das formale Distributivgesetz $(a + bi) \cdot (c + di) = a \cdot c + (bi) \cdot c + a \cdot (di) + (bi) \cdot (di)$, wobei die Kommutativitäts-Regeln $(bi) \cdot c = (b \cdot c)i$ und $a \cdot (di) = (a \cdot d)i$ und $(bi) \cdot (di) = (b \cdot d)i^2$ gelten sollen sowie $i^2 = -1$. Aufgrund der Kommutativität von \cdot in \mathbb{R} bildet (\mathbb{C}, \cdot) eine kommutative Halbgruppe. Wir prüfen leicht nach, dass $1 + 0i$ neutrales Element in (\mathbb{C}, \cdot) ist und dass $a + bi$ und $a/(a^2 + b^2) - b/(a^2 + b^2)i$ multiplikative Inverse zueinander sind, sofern $a + bi \neq 0 + 0i$ gilt. Wir schreiben daher auch $(a + bi)^{-1}$ für $a/(a^2 + b^2) - b/(a^2 + b^2)i$. Wir haben damit gezeigt: $(\mathbb{C} \setminus \{0 + 0i\}, \cdot)$ eine abelsche Gruppe.

Weiterhin können wir die (wegen der Kommutativität von \cdot zusammenfallenden) Distributivgesetze

$$\begin{aligned}(a + bi) \cdot ((c + di) + (e + fi)) &= (a + bi) \cdot (c + di) + (a + bi) \cdot (e + fi) \\ ((a + bi) + (c + di)) \cdot (e + fi) &= (a + bi) \cdot (e + fi) + (c + di) \cdot (e + fi)\end{aligned}$$

nachprüfen. Nach **Definition 10.1** ist damit $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ein Körper.

¹Die Einführung von \mathbb{C} als formale Ausdrücke der Form $a + bi$ ist der Einführung von Polynomen in **Definition 11.1** nicht unähnlich. Die Besonderheit hier ist aber die Festlegung $i^2 = -1$, die es ermöglicht, jede komplexe Zahl als „Polynom maximal ersten Grades“ in i zu schreiben.

Die Abbildung

$$\mathbb{C} \ni z = a + b i \mapsto \bar{z} = a - b i \in \mathbb{C}$$

ist ein Körperautomorphismus $(\mathbb{C}, +, \cdot) \rightarrow (\mathbb{C}, +, \cdot)$. Es gilt also insbesondere

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w} \quad \text{und} \quad \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$$

für alle $z, w \in \mathbb{C}$. Dabei heißt \bar{z} die zu z **konjugiert komplexe Zahl** (englisch: **complex conjugate**).

Das Produkt $z \cdot \bar{z}$ einer komplexen Zahl $z = a + b i$ mit ihrer konjugiert komplexen Zahl ergibt

$$z \cdot \bar{z} = (a + b i) \cdot (a - b i) = a^2 + b^2.$$

Mit Hilfe der komplexen Konjugation können wir die oben eingeführte Darstellung der multiplikativen Inversen motivieren, denn es gilt

$$\frac{1}{a + b i} = \frac{1}{a + b i} \cdot \frac{a - b i}{a - b i} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2} i.$$

In der Darstellung einer komplexen Zahl $z = a + b i$ heißt $a =: \operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R}$ der **Realteil** (englisch: **real part**) und $b =: \operatorname{Im}(z) \in \mathbb{R}$ der **Imaginärteil** (englisch: **imaginary part**). Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{z + \bar{z}}{2} &= \frac{a + b i + a - b i}{2} = a = \operatorname{Re}(z) \\ \frac{z - \bar{z}}{2 i} &= \frac{a + b i - a + b i}{2 i} = b = \operatorname{Im}(z). \end{aligned}$$

Beachte: $\operatorname{Re}: (\mathbb{C}, +, \cdot) \rightarrow (\mathbb{C}, +, \cdot)$ und $\operatorname{Im}: (\mathbb{C}, +, \cdot) \rightarrow (\mathbb{C}, +, \cdot)$ sind keine Körperhomomorphismen! (**Beachte:** Warum nicht?)

Schließlich halten wir fest, dass \mathbb{R} mittels der Identifikation $a = a + 0 i$ zu einem Teilkörper von \mathbb{C} wird.

Kapitel B Liste algebraischer Strukturen

In der folgenden Tabelle ist X irgendeine Menge. Die Abkürzungen „komm.“ und „neut. E.“ stehen für „kommutativ“ und „neutrales Element“. Bei Ringen bezieht sich die Kommutativität und die Angabe des neutralen Elements auf die zweite Verknüpfung. Die angegebenen Eigenschaften können in Einzelfällen abweichen, vor allem im Fall $m = 1$ oder wenn X die leere Menge oder eine einelementige Menge ist.

Symbol	Beschreibung	komm. neut. E.		Referenz
Halbgruppen und Monoide ($m \in \mathbb{N}$)				
$(\mathbb{N}, +)$		✓	—	Beispiele 7.2, 7.4, 7.8 und 7.20
$(\mathbb{N}_0, +)$		✓	0	Beispiele 7.2, 7.4, 7.8 und 7.20
(\mathbb{N}, \cdot)		✓	1	Beispiele 7.2, 7.4, 7.8, 7.14 und 7.20
(\mathbb{N}_0, \cdot)		✓	1	Beispiele 7.2, 7.4, 7.8 und 7.20
(\mathbb{Z}, \cdot)		✓	1	Beispiele 7.2, 7.4, 7.8 und 7.14 Beispiele 7.16 und 7.20
(\mathbb{Q}, \cdot)		✓	1	Beispiele 7.2, 7.4, 7.8 und 7.20
(\mathbb{R}, \cdot)		✓	1	Beispiele 7.2, 7.4, 7.8, 7.14 und 7.20
(\mathbb{C}, \cdot)		✓	1	Beispiele 7.2, 7.4, 7.8 und 7.20
(\mathbb{Z}_m, \cdot_m)	multiplikatives Monoid \mathbb{Z} modulo m	✓	1	Beispiele 7.2, 7.8, 7.14 und 7.16
$(H^X, +)$	Funktionen $X \rightarrow H$ in die Halbgruppe $(H, +)$		wie in $(H, +)$	Beispiel 10.2
$(\mathbb{N}^X, +)$		✓	—	
$(\mathbb{N}_0^X, +)$		✓	$x \mapsto 0$	
(H^X, \cdot)	Funktionen $X \rightarrow H$ in die Halbgruppe (H, \cdot)		wie in (H, \cdot)	Beispiel 10.2
(\mathbb{N}^X, \cdot)		✓	$x \mapsto 1$	
(\mathbb{N}_0^X, \cdot)		✓	$x \mapsto 1$	
(\mathbb{Z}^X, \cdot)		✓	$x \mapsto 1$	
(\mathbb{Q}^X, \cdot)		✓	$x \mapsto 1$	
(\mathbb{R}^X, \cdot)		✓	$x \mapsto 1$	Beispiele 7.2, 7.4 und 7.16
(\mathbb{C}^X, \cdot)		✓	$x \mapsto 1$	
(X^X, \circ)		—	id_X	Beispiele 7.2, 7.4, 7.14 und 7.16
$(\mathcal{P}(X), \cap)$		✓	X	Beispiele 7.4 und 7.8
$(\mathcal{P}(X), \cup)$		✓	\emptyset	Beispiele 7.4 und 7.8
$(\mathcal{P}(X), \Delta)$		✓	\emptyset	Beispiele 7.4 und 7.8
(Σ^*, \circ)		—	$()$	Beispiele 7.4 und 7.8

Symbol	Beschreibung	komm. neut. E.	Referenz
Gruppen ($m \in \mathbb{N}$)			
$(\mathbb{Z}, +)$		✓ 0	Beispiele 7.2, 7.4, 7.8 und 7.14 Beispiele 7.16, 7.20 und 7.38
$(\mathbb{Q}, +)$		✓ 0	Beispiele 7.2, 7.4, 7.8 und 7.14 Beispiele 7.16 und 7.20
$(\mathbb{R}, +)$		✓ 0	Beispiele 7.2, 7.4, 7.8 und 7.14 Beispiele 7.16 und 7.20
$(\mathbb{C}, +)$		✓ 0	Beispiele 7.2, 7.4, 7.8 und 7.14 Beispiele 7.16 und 7.20
$(\mathbb{Q}_{\neq 0}, \cdot)$		✓ 1	Beispiele 7.14 und 7.16
$(\mathbb{R}_{\neq 0}, \cdot)$		✓ 1	Beispiele 7.14 und 7.16
$(\mathbb{C}_{\neq 0}, \cdot)$		✓ 1	Beispiele 7.14 und 7.16
$(m\mathbb{Z}, +)$	ganzzahlige Vielfache von m	✓ 1	Beispiele 7.34 und 7.38
$(\mathbb{Z}_m, +_m)$	additive Gruppe \mathbb{Z} modulo m	✓ 0	Beispiele 7.2, 7.8, 7.14 und 7.16
$(\mathbb{Z} / m\mathbb{Z}, \check{+})$	Faktorgruppe, isomorph zu $(\mathbb{Z}_m, +_m)$	✓ [1]	Beispiel 8.15
$(G^X, +)$	Funktionen $X \rightarrow G$ in die Gruppe $(G, +)$	wie in $(G, +)$	Beispiel 10.2
$(\mathbb{Z}^X, +)$		✓ $x \mapsto 0$	
$(\mathbb{Q}^X, +)$		✓ $x \mapsto 0$	
$(\mathbb{R}^X, +)$		✓ $x \mapsto 0$	Beispiele 7.2, 7.4 und 7.16
$(\mathbb{C}^X, +)$		✓ $x \mapsto 0$	
(G^X, \cdot)	Funktionen $X \rightarrow G$ in die Gruppe (G, \cdot)	wie in (G, \cdot)	Beispiel 10.2
$(\mathbb{Q}_{\neq 0}^X, \cdot)$		✓ $x \mapsto 1$	
$(\mathbb{R}_{\neq 0}^X, \cdot)$		✓ $x \mapsto 1$	Beispiel 7.16
$(\mathbb{C}_{\neq 0}^X, \cdot)$		✓ $x \mapsto 1$	
(S_n, \circ)	symmetrische Gruppe auf $\llbracket 1, n \rrbracket$	– $\text{id}_{\llbracket 1, n \rrbracket}$	Definition 7.21
(A_n, \circ)	alternierende Gruppe auf $\llbracket 1, n \rrbracket$	– $\text{id}_{\llbracket 1, n \rrbracket}$	Beispiel 7.34

Symbol	Beschreibung	komm.	neut. E.	Referenz
Ringe	$(m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_0)$			
$(\{0_R\}, +, \cdot)$	Nullring	✓	0_R	Beispiel 9.2
$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$		✓	1	Beispiel 9.2
$(m\mathbb{Z}, +, \cdot)$	ganzzahlige Vielfache von m	✓	–	Beispiel 9.2
$(\mathbb{Z}_m, +_m, \cdot_m)$	\mathbb{Z} modulo m	✓	1	Beispiel 9.2
$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \tilde{+}, \tilde{\cdot})$	Restklassenring modulo m , isomorph zu $(\mathbb{Z}_m, +_m, \cdot_m)$	✓	[1]	Beispiel 9.2
$(R^X, +, \cdot)$	Funktionen $X \rightarrow R$ in den Ring $(R, +, \cdot)$		wie in $(R, +, \cdot)$	Beispiele 9.8 und 10.2
$(\mathbb{Z}^X, +, \cdot)$		✓	1	
$(\mathbb{Q}^X, +, \cdot)$		✓	1	
$(\mathbb{R}^X, +, \cdot)$		✓	1	
$(\mathbb{C}^X, +, \cdot)$		✓	1	
$(R[t], +, \cdot)$	Polynomring über dem kommutativen Ring $(R, +, \cdot)$	✓	1	Definition 11.4
$(R^R, +, \cdot)$	Funktionen $R \rightarrow R$ in den Ring $(R, +, \cdot)$		wie in $(R, +, \cdot)$	Bemerkung 11.17
$(\text{End}(G), +, \circ)$	Endomorphismenring der abelschen Gruppe G	–	id_G	Beispiel 9.2
$(K^{n \times n}, +, \cdot)$	quadratische $n \times n$ -Matrizen über einem Körper K	–	I_n	Lemma 15.30
$(\text{End}(V), +, \circ)$	Endomorphismen eines Vektorraumes $(V, +, \cdot)$ über einem Körper $(K, +, \cdot)$	–	id_V	Satz 17.12
Körper	$(m \in \mathbb{N})$			
$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$		✓	1	Beispiele 9.2 und 10.2
$(\mathbb{R}, +, \cdot)$		✓	1	Beispiele 9.2 und 10.2
$(\mathbb{C}, +, \cdot)$		✓	1	Beispiele 9.2 und 10.2
$(\mathbb{Z}_m, +_m, \cdot_m)$	Körper von \mathbb{Z} modulo m für Primzahlen m	✓	1	Beispiel 9.2
$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \tilde{+}, \tilde{\cdot})$	Restklassenkörper mod. m für Primz. m , isomorph zu $(\mathbb{Z}_m, +_m, \cdot_m)$	✓	[1]	Beispiel 9.2
$(K(t), +, \cdot)$	rationaler Funktionenkörper	✓	1	Bemerkung 24.18

Symbol	Beschreibung	Referenz
Vektorräume	$(n, m \in \mathbb{N}_0)$	
$(K_n, +, \cdot)$	Zeilenvektoren über einem Körper $(K, +, \cdot)$	Beispiel 12.3
$(K^n, +, \cdot)$	Spaltenvektoren über einem Körper $(K, +, \cdot)$	Beispiel 12.3
$(K^X, +, \cdot)$	Funktionen $X \rightarrow K$ in den Körper $(K, +, \cdot)$	Beispiel 12.3
$(V^X, +, \cdot)$	Funktionen $X \rightarrow V$ in den Vektorraum $(V, +, \cdot)$ über dem Körper $(K, +, \cdot)$	
$(K[t], +, \cdot)$	Polynome über dem Körper $(K, +, \cdot)$	Beispiel 12.3
$(K_n[t], +, \cdot)$	Polynome vom Höchstgrad $n \in \mathbb{N}_0$ über dem Körper $(K, +, \cdot)$	Beispiel 12.9
$(K^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$	Folgen mit Werten im Körper $(K, +, \cdot)$	Beispiel 12.9
$(K^{\mathbb{N}}, +, \cdot)_{00}$	Folgen mit endlichem Träger und Werten im Körper $(K, +, \cdot)$	Beispiel 12.9
$(\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$	Folgen mit Werten im Körper $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$	
$(\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)_b$	beschränkte Folgen mit Werten im Körper $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$	
$(\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)_c$	konvergente Folgen mit Werten im Körper $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$	
$(\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)_0$	Nullfolgen mit Werten im Körper $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$	
$(\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)_{00}$	Folgen mit endlichem Träger mit Werten im Körper $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$	
$(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$		Beispiel 12.9
$(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)_b$		Beispiel 12.9
$(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)_c$		Beispiel 12.9
$(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)_0$		Beispiel 12.9
$(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)_{00}$		Beispiel 12.9
$(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$		
$(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)_b$		
$(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)_c$		
$(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)_0$		
$(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)_{00}$		
$(K^{n \times m}, +, \cdot)$	$n \times m$ -Matrizen über einem Körper $(K, +, \cdot)$	Definition 15.2
$(\text{Hom}(V, W), +, \cdot)$	Homomorphismen $V \rightarrow W$ mit VR $(V, +, \cdot)$ und $(W, +, \cdot)$ über demselben Körper $(K, +, \cdot)$	Satz 17.11

Symbol	Beschreibung	assoz.	komm.	neut.	E.Referenz
Algebren	$(n \in \mathbb{N}_0)$				
$(A^X, +, \cdot, \star)$	Funktionen $X \rightarrow A$ in die Algebra $(A, +, \cdot, \star)$ über dem Körper $(K, +, \cdot)$				Beispiel 25.3
$(K[t], +, \cdot, \cdot)$	Polynome über einem Körper $(K, +, \cdot)$	✓	✓	1	Beispiel 25.3
$(K^{n \times n}, +, \cdot, \cdot)$	$n \times n$ -Matrizen über einem Körper $(K, +, \cdot)$	✓		I_n	Beispiel 25.3
$(\text{End}(V), +, \cdot, \circ)$	Endomorphismen eines Vektorraumes V über einem Körper $(K, +, \cdot)$	✓		id_V	Beispiel 25.3

Kapitel C Transformationen und Normalformen

Im Folgenden seien V und W endlich-dimensionale Vektorräume über demselben Körper K . Es seien

- B_V und \widehat{B}_V Basen von V mit Transformationsmatrix $T = \mathcal{T}_{\widehat{B}_V}^{B_V}$, siehe (20.1),
- B_V^* und \widehat{B}_V^* die zugehörigen dualen Basen von V^* mit Transformationsmatrix $T^{-\top} = \mathcal{T}_{\widehat{B}_V^*}^{B_V^*}$, siehe (21.13),
- B_W und \widehat{B}_W Basen von W mit Basiswechsellmatrix $S = \mathcal{T}_{\widehat{B}_W}^{B_W}$.

Name der Transformation	Voraussetzung	Darstellungen	Transformation	Referenz
Äquivalenztransformation	$f \in \text{Hom}(V, W)$	$A = \mathcal{M}_{B_W}^{B_V}(f)$ $\widehat{A} = \mathcal{M}_{\widehat{B}_W}^{\widehat{B}_V}(f)$	$\widehat{A} = S A T^{-1}$	Satz 20.9
Ähnlichkeitstransformation	$f \in \text{End}(V)$	$A = \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f)$ $\widehat{A} = \mathcal{M}_{\widehat{B}_V}^{\widehat{B}_V}(f)$	$\widehat{A} = T A T^{-1}$	Satz 20.14
Kongruenztransformation	$f \in \text{Hom}(V, V^*)$	$A = \mathcal{M}_{B_V^*}^{B_V}(f)$ $\widehat{A} = \mathcal{M}_{\widehat{B}_V^*}^{\widehat{B}_V}(f)$	$\widehat{A} = T^{-\top} A T^{-1}$	Satz 31.4

Kapitel D Exkurs: Lie-Algebren

In der obigen [Definition 25.1](#) und in [Beispiel 25.3](#) sind alle Algebren assoziativ. Eine wichtige Klasse i. A. nicht assoziativer Algebren sind die **Lie-Algebren**.

Definition 0.1 (Lie-Algebra über einem Körper).

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Eine **Lie-Algebra** (englisch: **Lie algebra**) $(A, +, \cdot, [\cdot, \cdot])$ **über** K (kurz: eine K -Lie-Algebra) ist eine Menge A mit zwei inneren Verknüpfungen $+: A \times A \rightarrow A$ und $[\cdot, \cdot]: A \times A \rightarrow A$ sowie einer äußeren Verknüpfung $\cdot: K \times A \rightarrow A$, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

(i) $(A, +, \cdot)$ ist ein K -Vektorraum.

(ii) Die Verknüpfung $[\cdot, \cdot]$, genannt die **Lie-Klammer** (englisch: **Lie bracket**), ist bilinear, erfüllt also

$$[\alpha a + \beta b, c] = \alpha [a, c] + \beta [b, c] \quad (0.1a)$$

$$[a, \beta b + \gamma c] = \beta [a, b] + \gamma [a, c] \quad (0.1b)$$

für alle $a, b, c \in A$ und alle $\alpha, \beta, \gamma \in K$.

(iii) Die Lie-Klammer ist alternierend, erfüllt also

$$[a, a] = 0 \quad \text{für alle } a \in A. \quad (0.2)$$

(iv) Die Lie-Klammer erfüllt außerdem die **Jacobi-Identität** (englisch: **Jacobi identity**)

$$[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0 \quad \text{für alle } a, b, c \in A. \quad (0.3)$$

△

Bemerkung 0.2 (zu Lie-Algebren).

Im Gegensatz zu [Definition 25.1](#) wird also die Assoziativität der Multiplikation (hier $[\cdot, \cdot]$ genannt) bei einer Lie-Algebra nicht vorausgesetzt. Daher ist die Bilinearität keine Folge der Definition ([Lemma 25.2](#)), sondern wird gefordert. Die Bilinearität (0.1) beinhaltet dabei die Distributivgesetze

$$[a, b + c] = [a, b] + [a, c] \quad (0.4a)$$

$$[a + b, c] = [a, c] + [b, c] \quad (0.4b)$$

sowie die Verträglichkeit mit der S -Multiplikation

$$[\alpha a, b] = \alpha [a, b] = [a, \alpha b] \quad (0.5)$$

als Spezialfälle, die Bestandteile der [Definition 25.1](#) sind. △

Beispiel 0.3 (Lie-Algebra über einem Körper).

(i) $(\mathbb{R}^3, +, \cdot, \times)$ mit dem Kreuzprodukt

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix} \quad (0.6)$$

ist eine Lie-Algebra über \mathbb{R} .

(ii) Ist $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(A, +, \cdot, \star)$ eine assoziative Algebra über K , dann bildet $(A, +, \cdot, [\cdot, \cdot])$ mit dem **Kommutator**

$$[a, b] := a \star b - b \star a \quad (0.7)$$

als „Multiplikation“ eine Lie-Algebra über K .

(iii) Ist $(K, +, \cdot)$ ein Körper, dann bildet $(K^{n \times n}, +, \cdot, [\cdot, \cdot])$ mit dem **Kommutator**

$$[A, B] := AB - BA \quad (0.8)$$

als „Multiplikation“ eine Lie-Algebra über K .

(iv) Ist $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über K , dann bildet $(\text{End}(V), +, \cdot, [\cdot, \cdot])$ mit dem **Kommutator**

$$[f, g] := f \circ g - g \circ f \quad (0.9)$$

als „Multiplikation“ eine Lie-Algebra über K . △

Kapitel E Das griechische Alphabet

Kleinbuchstabe	Großbuchstabe	Name
α	A	alpha
β	B	beta
γ	Γ	gamma
δ	Δ	delta
ϵ, ε	E	epsilon
ζ	Z	zeta
η	H	eta
θ, ϑ	Θ	theta
ι	I	iota
κ, κ	K	kappa
λ	Λ	lambda
μ	M	mu
ν	N	nu
ξ	Ξ	xi
\omicron	O	omikron
π, ϖ	Π	pi
ρ, ϱ	P	rho
σ, ς	Σ	sigma
τ	T	tau
υ	Υ	ypsilon
ϕ, φ	Φ	phi
χ	X	chi
ψ	Ψ	psi
ω	Ω	omega

Kapitel F Abkürzungen

Abkürzung	Bedeutung
bzgl.	bezüglich
d. h.	das heißt
etc.	et cetera
i. A.	im Allgemeinen
i. d. R.	in der Regel
i. W.	im Wesentlichen
o. B. d. A.	ohne Beschränkung der Allgemeinheit
o. ä.	oder ähnlich
usw.	und so weiter
vgl.	vergleiche

Index

- N*-lineare Abbildung, 244
- i*-te Koordinatenform, 212
- k*-te Diagonale, 127
- n*-Tupel, 24, 44

- Abbildung, 34
- abelsche Gruppe, 54
- abelsche Halbgruppe, 54
- abelsches Monoid, 54
- abgeschlossene Teilmenge bzgl. einer Verknüpfung, 59
- abgeschlossenes Intervall, 21
- abhängige Variable eines linearen Gleichungssystems, 153
- Ableitungsabbildung für Funktionen, 161
- Ableitungsabbildung für Polynome, 168
- Absorptionsgesetz für \wedge , 13
- Absorptionsgesetz für \vee , 13
- abzählbar unendliche Familie, 44
- abzählbar unendliche Menge, 42
- abzählbare Menge, 42
- Addition in den komplexen Zahlen, 339
- Addition modulo m , 52
- Addition von Matrizen, 128
- Addition von Polynomen, 88
- Additionstheoreme, 67
- additive Gruppe von \mathbb{Z} modulo m , 52
- Additivität einer Funktion, 159
- Adjunkte, 264
- affiner Unterraum, 170
- Algebra, 7, 290
- Algebra mit Eins, 290
- Algebraautomorphismus, 292
- Algebraendomorphismus, 292
- Algebrahomomorphismus, 292
- algebraisch abgeschlossener Körper, 326
- algebraische Vielfachheit, 281, 285
- Algebraisomorphismus, 292
- allgemeine lineare Gruppe, 145
- Allquantor, 14

- Alphabet, 48
- alternierende Bilinearform, 333
- alternierende Gruppe, 60
- alternierender Tensor, 250
- Annihilator, 216
- Antezedens, 9
- antisymmetrische Matrix, 142
- antisymmetrische Relation, 27
- Anwenden einer Linearform auf einen Vektor, 209
- assoziative Verknüpfung, 48
- Assoziativität der Matrix-Multiplikation, 132
- Assoziativität in einem Körper, 99
- Assoziativität in einer Algebra, 290
- Assoziativität von \cap , 23
- Assoziativität von \cup , 23
- Assoziativität von \wedge , 13
- Assoziativität von \vee , 13
- ausgeartete Bilinearform, 337
- Aussage, 7
- Aussageform, 14
- Austauschsatz von Steinitz, 117
- Auswahlaxiom, 45
- Auswahlfunktion, 45
- Auswertungshomomorphismus eines Algebraelements, 293
- Automorphismus einer Algebra, 292
- Automorphismus einer Algebra mit Eins, 292
- Automorphismus eines Ringes, 81
- Automorphismus eines Ringes mit Eins, 81
- Automorphismus eines Vektorraumes, 159

- Basis eines Vektorraumes, 113
- Basisergänzungssatz, 115
- Basiswechselmatrix, 192
- Begleitmatrix eines Polynoms, 313
- beidseitig unendliches Intervall, 21
- beschränktes Intervall, 21
- Beweis durch Fallunterscheidung, 17
- Beweis durch Kontraposition, 16

- Beweis durch Ringschluss, 18
 Beweis durch vollständige Induktion, 18
 biduale lineare Abbildung, 233
 bidualer Homomorphismus, 233
 Bidualraum, 232
 Bijektion, 37
 bijektive Abbildung, 37
 Bikonditional, 9
 Bild einer Funktion, 35
 Bild einer Matrix, 187
 Bild eines Algebromorphismus, 292
 Bild eines Gruppenhomomorphismus, 68
 Bild eines Ringhomomorphismus, 81
 Bild eines Vektorraumhomomorphismus, 160
 Bildmenge einer Funktion, 35
 bilineare Abbildung, 234
 Bilinearform, 234, 333
 Binomialkoeffizient, 253
 Blockdiagonalmatrix, 202
 Bra-Ket-Notation, 209

 Charakteristik eines Ringes, 78
 charakteristische Funktion, 110
 charakteristische Funktion e_A einer Menge, 110
 charakteristisches Polynom einer Matrix, 281
 charakteristisches Polynom eines Endomorphismus, 285
 Covektor, 208
 Cramersche Regel, 267

 Darstellungsmatrix einer Bilinearform, 334
 Darstellungsmatrix eines Homomorphismus, 181
 De Morgansches Gesetz, 13, 23
 Defekt einer Matrix, 187
 Defekt eines Vektorraumhomomorphismus, 178
 Definitionsbereich einer Funktion, 34
 Definitionsmenge einer Funktion, 34
 Determinante einer Matrix, 258
 Determinante eines Endomorphismus, 269
 Determinantenform, 254
 Diagonale, 26
 diagonalisierbare Matrix, 206
 diagonalisierbarer Endomorphismus, 206
 Diagonalmatrix, 127
 Differenzmenge, 23
 Dimension eines affinen Unterraumes, 170
 Dimension eines Vektorraumes, 116
 direkte Summe einer Familie von Unterräumen, 125
 direkte Summe von zwei Unterräumen, 122
 direkter Beweis, 16
 disjunkte Mengen, 22
 disjunkte Zerlegung, 32
 Disjunktion, 9
 Diskursuniversum eines Quantors, 14
 Distributivgesetz der Matrix-Multiplikation, 132
 Distributivgesetz für \cup und \cap , 23
 Distributivgesetz für \exists und \forall , 15
 Distributivgesetz für \forall und \wedge , 15
 Distributivgesetz für \vee und \wedge , 13
 Distributivgesetze in einem Körper, 83
 Distributivgesetze in einem Ring, 76
 Distributivgesetze in einem Vektorraum, 99
 Division mit Rest, 92
 Domäne eines Quantors, 14
 duale Basis, 212
 duale Bilinearform, 335
 duale Paarung, 209
 dualer Homomorphismus, 220
 Dualraum, 208
 Durchschnitt von Mengen, 22

 Ebene, 108
 echte Obermenge, 22
 echte Teilmenge, 22
 echte Unteralgebra, 292
 echte Untergruppe, 59
 echter Unterkörper, 86
 echter Unterraum, 104
 echter Unterring, 81
 echtes Ideal, 300
 Eigenpaar einer quadratischen Matrix, 204
 Eigenpaar eines Endomorphismus, 204
 Eigenraum, 277
 Eigenvektor einer quadratischen Matrix, 204
 Eigenvektor eines Endomorphismus, 204
 Eigenwert einer quadratischen Matrix, 204
 Eigenwert eines Endomorphismus, 204
 Eindeutigkeitsquantor, 14
 einfacher Eigenwert, 281
 einfacher Tensor, 238, 245
 Einheit, 50
 Einheitengruppe, 52
 Einheitsbasis von K^n , 113
 Einheitsbasis von $K^{n \times m}$, 129
 Einheitsmatrix, 128
 Einschränkung einer Funktion, 35
 Einselement eines multiplikativen Monoids, 51

- Einselement eines Ringes, 76
 Einsetzen eines Vektors in eine Linearform, 208
 Einsetzungshomomorphismus eines Algebraelements, 293
 Einsideal, 300
 Einspolynom, 88
 Einsteinsche Summenkonvention, 247
 elementaren Zeilenumformungen, 136
 Elementarmatrizen, 137
 Elementartensor, 238, 245
 Elemente einer Menge, 19
 endlich erzeugte Gruppe, 61
 endlich erzeugter Vektorraum, 107
 endliche Dimension, 116
 endliche Familie, 44
 endliche Folge, 44
 endliche Menge, 42
 endliches Intervall, 21
 Endomorphismenalgebra von V , 291
 Endomorphismenring, 77, 170
 Endomorphismus einer Algebra, 292
 Endomorphismus einer Algebra mit Eins, 292
 Endomorphismus eines Ringes, 81
 Endomorphismus eines Ringes mit Eins, 81
 Endomorphismus eines Vektorraumes, 159
 Endpunkte eines Intervalls, 21
 Entwicklung der Determinante nach einer Spalte, 266
 Entwicklung der Determinante nach einer Zeile, 266
 Entwicklungssatz von Laplace, 266
 erweiterte Koeffizientenmatrix, 149
 Erzeugendensystem einer Gruppe, 61
 Erzeugendensystem eines Vektorraumes, 107
 Erzeuger einer zyklischen Gruppe, 61
 erzeugte Ideal, 301
 erzeugte Untergruppe, 61
 erzeugter Unterraum, 106
 Existenzquantor, 14

 Faktorgruppe, 71
 Faktormenge, 33
 Faktorraum, 170
 Fallunterscheidung, 17
 Faltung zweier Folgen, 89
 Familie von Elementen, 44
 Fehlstand einer Permutation, 56
 Folge, 44
 Folge mit endlichem Träger, 89

 Fortsetzung einer Funktion, 35
 Frobenius-Normalform einer Matrix, 320
 Frobenius-Normalform eines Endomorphismus, 320
 fundamentale Unterräume zu einer linearen Abbildung, 227
 Fundamentalsatz der Algebra, 97
 Funktion, 34
 führender Koeffizient eines Polynoms, 91

 ganze Zahlen, 20
 ganzzahliges Intervall, 21
 Gaußsches Eliminationsverfahren, 154
 gebundene Variable, 15
 Genau-Dann-Wenn-Verknüpfung, 9
 geometrische Vielfachheit, 277
 geordnete Basis eines Vektorraumes, 163
 geordneter Körper, 270
 geordnetes Paar, 24
 Gerade, 108
 gerade Permutation, 57
 gewöhnliche Ordnungsrelation auf \mathbb{R} , 26
 gleich orientierte Basen, 272
 Gleichheit von Mengen, 19
 Gleichheitsrelation, 26
 gleichmächtige Mengen, 42
 Grad eines Polynoms, 91
 Graph einer Funktion, 34
 Graph einer Relation, 25
 Grundbereich eines Quantors, 14
 Gruppe, 52
 Gruppenautomorphismus, 66
 Gruppenendomorphismus, 66
 Gruppenhomomorphismus, 66
 Gruppenisomorphismus, 66
 größte untere Schranke, 29

 halbgeordnete Menge, 28
 Halbgruppe, 48
 Halbgruppenautomorphismus, 65
 Halbgruppenendomorphismus, 65
 Halbgruppenhomomorphismus, 65
 Halbgruppenisomorphismus, 65
 Halbordnung, 28
 Hauptdiagonale, 127
 Hauptideal, 301
 Hauptidealring, 302
 Hauptvektor einer Matrix, 324
 Hauptvektor eines Endomorphismus, 325

- hinreichende Bedingung, 9
 Hintereinanderausführung von Funktionen, 38
 Hintereinanderausführung von Relationen, 26
 homogene Relation, 25
 homogenes lineares Gleichungssystem, 149
 Homogenität einer Funktion, 159
 Homomorphiesatz für Gruppen, 74
 Homomorphiesatz für Vektorräume, 173
 Homomorphismus, 65
 Homomorphismus von Algebren, 292
 Homomorphismus von Algebren mit Eins, 292
 Homomorphismus von Ringen, 81
 Homomorphismus von Ringen mit Eins, 81
 Homomorphismus von Vektorräumen, 159
 höchstens gleichmächtige Mengen, 44
- Ideal, 300
 Idempotenzgesetz für \wedge , 13
 Idempotenzgesetz für \vee , 13
 identische Abbildung, 35
 Identität, 35, 51
 Identitätsrelation, 26
 Imaginärteil einer komplexen Zahl, 340
 Implikation, 9
 Indexmenge, 44
 indirekter Beweis, 16
 Individuenbereich eines Quantors, 14
 indizierte Basis eines Vektorraumes, 163
 Induktionsanfang, 18
 Induktionsannahme, 18
 Induktionsschritt, 18
 Induktionsvoraussetzung, 18
 induzierte Verknüpfung, 59
 Infimum, 29
 inhomogenes lineares Gleichungssystem, 149
 Injektion, 37
 injektive Abbildung, 37
 Inklusion, 22
 Inklusionsrelation, 26
 innere Verknüpfung, 47
 Integritätsbereich, 80
 Integritätsring, 80
 Interpolationsaufgabe, 150
 invariante Aussageform, 33
 Invariantenteiler einer Matrix, 322
 Invariantenteiler eines Endomorphismus, 322
 invarianter Unterraum einer Matrix, 201
 invarianter Unterraum eines Endomorphismus, 201
- inverse Abbildung, 40
 inverse Funktion, 40
 inverse Matrix, 145
 inverse Relation, 26
 inverses Element, 50
 invertierbare Funktion, 40
 invertierbare Matrix, 145
 invertierbares Element einer Halbgruppe, 50
 involutorisch, 23, 53
 isomorphe Algebren, 292
 isomorphe Algebren mit Eins, 292
 isomorphe Gruppen, 66
 isomorphe Halbgruppen, 65
 isomorphe Körper, 86
 isomorphe Monoide, 66
 isomorphe Ringe, 81
 isomorphe Ringe mit Eins, 81
 isomorphe Vektorräume, 159
 Isomorphismus von Algebren, 292
 Isomorphismus von Algebren mit Eins, 292
 Isomorphismus von Ringen, 81
 Isomorphismus von Ringen mit Eins, 81
 Isomorphismus von Vektorräumen, 159
- Jacobi-Identität, 349
 Jordan-Block, 327
 Jordan-Matrix, 327
 Jordan-Normalform, 327, 328
 Junktor, 8
- kanonische Basis von K^n , 113
 kanonische Basis von $K^{n \times m}$, 129
 kanonische duale Paarung, 209
 kanonische Einbettung, 35
 kanonische Injektion, 35
 kanonische Injektion in den Bidualraum, 232
 kanonische Surjektion auf eine Faktorgruppe, 72
 kanonische Surjektion auf einen Faktorraum, 171
 Kardinalität einer endlichen Menge, 42
 Kardinalzahlen, 42
 kartesisches Produkt, 24, 45
 Kern einer Matrix, 187
 Kern eines Algebrhomomorphismus, 292
 Kern eines Gruppenhomomorphismus, 68
 Kern eines Ringhomomorphismus, 81
 Kern eines Vektorraumhomomorphismus, 160
 Kettenschluss, 16

- Klasse aller Mengen, 21
 Kleenesche Hülle, 48
 kleinste obere Schranke, 29
 Kodimension, 124
 Koeffizienten einer Linearkombination, 103
 Koeffizienten eines Polynoms, 87
 Koeffizientenmatrix, 149
 Koeffizientenring, 89
 Kofaktor einer Matrix, 264
 Kofaktormatrix, 264
 kommutativ, 290
 kommutative Gruppe, 54
 kommutative Halbgruppe, 54
 kommutativer Ring, 76
 kommutatives Diagramm, 65
 kommutatives Monoid, 54
 Kommutativität gleicher Quantoren, 15
 Kommutativität von \cap , 23
 Kommutativität von \cup , 23
 Kommutativität von \wedge , 13
 Kommutativität von \vee , 13
 Kommutator in einer Algebra, 350
 Kommutator von Endomorphismen, 350
 Kommutator von Matrizen, 350
 Komplement, 23, 124
 Komplementarität von \wedge , 13
 Komplementarität von \vee , 13
 komplementäre Matrix, 264
 komplementärer Unterraum, 124
 komplexe Zahlen, 20, 339
 Komplexifizierung eines \mathbb{R} -Vektorraumes, 243
 Komponenten eines Tensors, 247
 Komponenten eines Vektors, 180
 komponentenweise Addition, 100, 101
 komponentenweise skalare Multiplikation, 100, 101
 Komposition von Funktionen, 38
 Komposition von Relationen, 26
 Konditional, 9
 kongruente Matrizen, 335
 Kongruenzrelation modulo m , 31
 Kongruenztransformation von Matrizen, 335
 konjugiert komplexe Zahl, 340
 Konjunktion, 8
 Konklusion, 12
 Konsequenz, 9
 konstante Funktion, 34
 konstantes Polynom, 88, 91
 kontravariante Transformation, 216
 Koordinate, 180
 Koordinatenabbildung, 180
 Koordinatenraum, 101
 Koordinatenvektor, 180
 kovariante Transformation, 216
 Kreuzprodukt, 24
 Kronecker-Delta, 110
 Körper, 82
 Körper von \mathbb{Z} modulo m , 86
 Körperautomorphismus, 86
 Körperendomorphismus, 86
 Körperhomomorphismus, 86
 Körperisomorphismus, 86
 Kürzungsregeln, 53, 83
 leere Menge, 22
 leeres Tupel, 49
 leeres Wort, 49
 Leibniz-Formel der Determinante, 259
 Leitkoeffizient eines Polynoms, 91
 Lemma von Zorn, 46
 Lie-Algebra, 349
 Lie-Klammer, 349
 linear abhängige Familie von Vektoren, 109
 linear abhängige Menge von Vektoren, 109
 linear unabhängige Familie von Vektoren, 109
 linear unabhängige Menge von Vektoren, 109
 lineare Abbildung, 159
 lineare Algebra, 7
 lineare Hülle, 106
 linearer Automorphismus, 159
 linearer Endomorphismus, 159
 linearer Isomorphismus, 159
 linearer Raum, 99
 linearer Unterraum, 104
 lineares Funktional, 208
 lineares Gleichungssystem, 149
 lineares Polynom, 88
 Linearfaktor eines Polynoms, 95
 Linearform, 208
 Linearkombination, 103
 links abgeschlossenes, rechts offenes Intervall, 21
 links offenes, rechts abgeschlossenes Intervall, 21
 linkseindeutige Relation, 37
 Linksinverse, 41
 Linksnebenklasse, 64
 Linksnullteiler, 79

- linksseitig unendliches abgeschlossenes Intervall, 21
- linksseitig unendliches offenes Intervall, 21
- linkstotale Relation, 34
- Linkstranslation, 49
- logische Implikation, 12
- logische Äquivalenz, 12
- logisches Gesetz, 12
- lokales Minimalpolynom einer Matrix, 314
- lokales Minimalpolynom eines Endomorphismus, 315
- lösbares lineares Gleichungssystem, 149
- Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems, 150

- materiale Implikation, 9
- materiale Äquivalenz, 9
- Matrix, 127
- Matrix-Matrix-Multiplikation, 130
- Matrix-Multiplikation, 130
- Matrix-Vektor-Multiplikation, 133
- Matrixalgebra, 291
- Matrixring, 142
- Matrizenring, 142
- maximaler Vektor, 317
- maximales Element, 29
- Maximum, 29
- mehrdimensionales Intervall, 25
- mehrfacher Eigenwert, 281
- Menge, 19
- Mengenkomprehension, 20
- minimales Element, 29
- Minimalpolynom einer Matrix, 304
- Minimalpolynom einer Matrix bzgl. eines Vektors, 314
- Minimalpolynom eines Endomorphismus, 304
- Minimalpolynom eines Endomorphismus bzgl. eines Vektors, 315
- Minimum, 29
- Minor einer Matrix, 264
- modus ponendo ponens, 16
- modus ponendo tollens, 16
- modus tollendo ponens, 16
- modus tollendo tollens, 16
- monisches Polynom, 91
- Monoid, 49
- Monoidautomorphismus, 66
- Monoidendomorphismus, 66
- Monoidhomomorphismus, 66
- Monoidisomorphismus, 66
- Monom, 88
- Monobasis, 113
- multilineare Abbildung, 244
- Multilinearform, 244
- Multiplikation, 290
- Multiplikation in den komplexen Zahlen, 339
- Multiplikation modulo m , 52
- Multiplikation von Polynomen, 89
- multiplikatives Monoid von \mathbb{Z} modulo m , 52
- Mächtigkeit einer endlichen Menge, 42

- nach oben beschränkt, 29
- nach oben unbeschränkt, 29
- nach unten beschränkt, 29
- nach unten unbeschränkt, 29
- natürliche Einbettung, 35
- natürliche Injektion, 35
- natürliche Zahlen, 20
- natürliche Zahlen mit Null, 20
- natürliches Repräsentantensystem der Kongruenzrelation modulo m , 31
- Nebendiagonalen, 127
- Nebenklasse, 64
- Negation, 8
- negative Orientierung, 272
- negatives Element eines geordneten Körpers, 270
- neutrales Element, 49
- Neutralitätsgesetz für \wedge , 13
- Neutralitätsgesetz für \vee , 13
- nicht invertierbare Matrix, 145
- nicht lösbares lineares Gleichungssystem, 149
- nicht-ausgeartete Bilinearform, 337
- nichthomogenes lineares Gleichungssystem, 149
- nichtnegatives Element eines geordneten Körpers, 270
- nichtpositives Element eines geordneten Körpers, 270
- nilpotent, 143
- normale Untergruppe, 70
- Normalteiler, 70
- normiertes Polynom, 91
- notwendige Bedingung, 9
- notwendige und hinreichende Bedingung, 9
- Nullabbildung, 169
- Nullalgebra, 291
- Nullelement eines additiven Monoids, 50
- Nullelement eines Ringes, 76

- Nullform, 208
 Nullideal, 300
 Nullmatrix, 129
 Nullpolynom, 88
 Nullraum, 100, 105
 Nullring, 76
 Nullstelle eines Polynoms, 94
 nullteilerfreier Ring, 79
 Nulltensor, 238, 245
 Nullvektor, 99
- obere Dreiecksmatrix, 143
 obere Schranke, 29
 Oberfamilie, 44
 Obermenge, 22
 Oder-Verknüpfung, 9
 offenes Intervall, 21
 Ordnung eines Gruppenelements, 61
 Ordnung eines Tensors, 245
 Ordnungsrelation, 28
 Orientierung eines Vektorraumes, 272
 orientierungserhaltender Automorphismus, 271
 orientierungstreuer Automorphismus, 271
 orientierungsumkehrender Automorphismus, 271
 orientierungsuntreuer Automorphismus, 271
- Paar, 24
 paarweise disjunkte Mengen, 32
 Parität eines Permutation, 57
 partielle Ordnung, 28
 partikuläre Lösung eines linearen Gleichungssystems, 150
 Partition, 32
 perfekte Bilinearform, 337
 Permutation, 54
 Permutation eines Tensors, 252
 Pivot-Elemente einer Zeilenstufenform, 138
 Polynom, 87
 Polynomdivision, 93
 Polynome vom Höchstgrad n , 106
 Polynomfunktion, 94, 293
 Polynomialgebra, 291
 Polynomraum, 101
 Polynomring, 89
 positive Orientierung, 272
 positives Element eines geordneten Körpers, 270
 Potenzmenge, 24
- Projektion, 252
 Projektion auf die i -te Koordinate, 160
 Projektor, 252
 Prä-Annihilator, 216
 Prädikat, 14
 Prädikatenlogik, 14
 Prämisse, 12
 Pullback einer Linearform, 221
- q.e.d., 18
 quadratische Matrix, 127
 Quantor, 14
 Quotient von Polynomen, 92
 Quotientengruppe, 71
 Quotientenmenge, 33
 Quotientenraum, 170
- Rang einer Bilinearform, 337
 Rang einer Matrix, 135
 Rang eines Tensors, 240, 245
 Rang eines Vektorraumhomomorphismus, 178
 Rang-Normalform einer Matrix, 199
 Rangfaktorisierung einer Matrix, 135
 rationale Normalform einer Matrix, 320
 rationale Normalform eines Endomorphismus, 320
 rationale Zahlen, 20, 33
 Realteil einer komplexen Zahl, 340
 rechte Seite eines linearen Gleichungssystems, 149
 rechtseindeutige Relation, 34
 Rechtsinverse, 46
 Rechtsnebenklasse, 64
 Rechtsnullteiler, 79
 rechtsseitig unendliches abgeschlossenes Intervall, 21
 rechtsseitig unendliches offenes Intervall, 21
 rechtstotale Relation, 37
 Rechtstranslation, 49
 reduzierte Zeilenstufenform einer Matrix, 154
 reelle Zahlen, 20
 reflexive Relation, 27
 Regel von Sarrus, 259
 reguläre Matrix, 145
 Relation, 25
 Repräsentant einer Äquivalenzklasse, 31
 Repräsentantensystem einer Äquivalenzrelation, 31
 Rest bei Polynomdivision, 92

- Restklassen modulo m , 31
- Restklassenkörper modulo m , 86
- Restklassenring modulo m , 79
- Restriktion einer Funktion, 35
- Ring, 76
- Ring mit Eins, 76
- Ring von \mathbb{Z} modulo m , 76
- Ringautomorphismus, 81
- Ringendomorphismus, 81
- Ringhomomorphismus, 81
- Ringisomorphismus, 81
- Russell-Antinomie, 21
- Russell-Paradoxon, 21

- S-Multiplikation, 99
- Satz von Cayley-Hamilton, 296
- Satz von Lagrange, 64
- schiefsymmetrische Bilinearform, 333
- schiefsymmetrische Matrix, 142
- schiefsymmetrischer Tensor, 250
- Schnitt von Mengen, 22
- Schnittmenge, 22
- selbstduale Bilinearform, 335
- Shift-Abbildung, 182
- Signum einer Permutation, 56
- singuläre Matrix, 145
- Skalar, 99
- skalare Multiplikation, 99
- skalare Multiplikation von Matrizen, 128
- Skalarkörper eines Vektorraumes, 99
- Spalte, 128
- Spaltenindex in einer Matrix, 128
- Spaltenrang einer Matrix, 133
- Spaltenraum, 133
- Spann, 106
- Spur einer Matrix, 283
- Spur eines Endomorphismus, 286
- Standardbasis von K^n , 113
- Standardbasis von $K^{n \times m}$, 129
- Standardvektorraum, 101
- Stelligkeit einer Aussageform, 14
- Streichungsmatrix, 263
- strikte obere Dreiecksmatrix, 143
- strikte untere Dreiecksmatrix, 143
- strukturerehaltende Abbildung von Algebren, 292
- strukturerehaltende Abbildung von Gruppen, 66
- strukturerehaltende Abbildung von Halbgruppen, 65
- strukturerehaltende Abbildung von Körpern, 86
- strukturerehaltende Abbildung von Monoiden, 66
- strukturerehaltende Abbildung von Ringen, 81
- strukturerehaltende Abbildung von Vektorräumen, 159
- strukturverträgliche Abbildung, 65
- strukturverträgliche Abbildung von Algebren, 292
- strukturverträgliche Abbildung von Gruppen, 66
- strukturverträgliche Abbildung von Halbgruppen, 65
- strukturverträgliche Abbildung von Körpern, 86
- strukturverträgliche Abbildung von Monoiden, 66
- strukturverträgliche Abbildung von Ringen, 81
- strukturverträgliche Abbildung von Vektorräumen, 159
- Stufe eines Tensors, 245
- Stufenbedingung, 138
- Sudoku-Kriterium, 54
- Summe einer Familie von Unterräumen, 125
- Summe von zwei Unterräumen, 120
- Supremum, 29
- Surjektion, 37
- surjektive Abbildung, 37
- symmetrische Bilinearform, 333
- symmetrische Differenz, 23
- symmetrische Gruppe, 54
- symmetrische Matrix, 141
- symmetrische Relation, 27
- symmetrischer Tensor, 250

- Tautologie, 12
- Teilbarkeit, 25
- Teilbarkeitsrelation, 25
- Teiler, 92
- Teilfamilie, 44
- Teilkörper, 86
- Teilmenge, 22
- Tensor, 238, 245
- Tensoren vom Typ (r, s) , 246
- Tensorprodukt, 238, 245
- Tensorprodukt von Vektoren, 238, 245
- Tensorproduktraum, 238, 245
- totale Relation, 27
- totalgeordnete Menge, 28

- Totalordnung, 28
 Transformationsmatrix des Basiswechsels, 192
 transitive Relation, 27
 transponierte Matrix, 140
 transponierter Homomorphismus, 220
 Transposition, 55
 Transpositionsmatrix, 137
 Tripel, 24
 triviale Ideale, 300
 triviale Linearkombination, 103
 triviale Untergruppe, 60
 trivialer Gruppenhomomorphismus, 66
 trivialer Unterraum, 105

 umgekehrt orientierte Basen, 272
 Umkehrabbildung, 40
 Umkehrfunktion, 40
 Umkehrrelation, 26
 unabhängige Variable eines linearen Gleichungssystems, 153
 Und-Verknüpfung, 8
 unendlich-dimensionaler Vektorraum, 116
 unendliche Menge, 42
 ungerade Permutation, 57
 unitäre Algebra, 290
 unitärer Ring, 76
 universelle bilineare Abbildung, 238
 universelle multilineare Abbildung, 245
 universelle Relation, 26
 unlösbar, 149
 Unteralgebra, 291
 Unteralgebra mit Eins, 292
 Unterdeterminante einer Matrix, 264
 untere Dreiecksmatrix, 143
 untere Schranke, 29
 Untergruppe, 59
 Unterkörper, 86
 Unterraum, 104
 Unterring, 81
 Unterring mit Eins, 81
 Untervektorraum, 104
 Urbild, 36
 Urbildmenge, 36

 Vektor, 99
 Vektor der rechten Seite, 149
 Vektor-Matrix-Multiplikation, 133
 Vektorisierung einer Matrix, 160
 Vektorraum, 99
 Vektorraum der beschränkten Folgen in \mathbb{R} , 105
 Vektorraum der Folgen mit endlichem Träger in \mathbb{R} , 105
 Vektorraum der konvergenten Folgen in \mathbb{R} , 105
 Vektorraum der Nullfolgen in \mathbb{R} , 105
 Vektorraum der Spaltenvektoren, 101
 Vektorraum der Zeilenvektoren, 100
 Vektorraumautomorphismus, 159
 Vektorraumendomorphismus, 159
 Vektorraumhomomorphismus, 159
 Vektorraumisomorphismus, 159
 verallgemeinerter Eigenraum einer Matrix, 324
 verallgemeinerter Eigenraum eines Endomorphismus, 325
 verallgemeinerter Eigenvektor einer Matrix, 324
 verallgemeinerter Eigenvektor eines Endomorphismus, 325
 Vereinigung von Mengen, 22
 Vereinigungsmenge, 22
 vergleichbare Elemente einer Halbordnung, 28
 Verkettung von Funktionen, 38
 Verkettung von Relationen, 26
 Verknüpfung, 47
 Verknüpfung von Funktionen, 38
 Verknüpfung von Relationen, 26
 Verknüpfungstafel, 47
 Verneinung, 8
 Verknüpfungstabelle, 47
 Vielfachheit der Nullstelle eines Polynoms, 95
 von Matrix induzierte Bilinearform, 333
 von Matrix induzierte lineare Abbildung, 161

 Wahrheitstafel, 8
 Wahrheitswert, 7
 Wahrheitswerttabelle, 8
 Wenn-Dann-Verknüpfung, 9
 Widerspruchsbeweis, 16
 wohldefinierte Aussageform, 33
 Wurzel eines Polynoms, 94

 Zahlbereiche, 20
 Zeile, 128
 Zeilenindex in einer Matrix, 128
 Zeilenrang einer Matrix, 133
 Zeilenraum, 133
 Zeilenstufenform einer Matrix, 138
 ZF-Mengenlehre, 21
 Zielmenge einer Funktion, 34
 zyklische Gruppe, 61

zyklische Shift-Abbildung, 182

zyklische Untergruppe, 61

Ähnlichkeitstransformation von Matrizen, 200

Äquivalenz, 9

Äquivalenzklasse, 31

Äquivalenzrelation, 30

Äquivalenztransformation von Matrizen, 197

Überdeckung einer Menge, 32

Übergangsmatrix, 192

ähnliche Matrizen, 200

äquivalente Elemente einer Äquivalenzrelation,
30

äquivalente Matrizen, 196

äußere Verknüpfung, 99

überabzählbare Menge, 42

Literatur

- Beutelspacher, A. (2014). *Lineare Algebra. Eine Einführung in die Wissenschaft der Vektoren, Abbildungen und Matrizen*. 8. Aufl. Springer Fachmedien Wiesbaden. DOI: [10.1007/978-3-658-02413-0](https://doi.org/10.1007/978-3-658-02413-0).
- Bosch, S. (2014). *Lineare Algebra*. 5. Aufl. Springer Berlin Heidelberg. DOI: [10.1007/978-3-642-55260-1](https://doi.org/10.1007/978-3-642-55260-1).
- Deiser, O. (2022a). *Einführung in die Mengenlehre*. URL: <https://www.aleph1.info/?call=Puc&permalink=mengenlehre1>.
- (2022b). *Grundbegriffe der Mathematik*. URL: <https://www.aleph1.info/?call=Puc&permalink=grundbegriffe>.
- Fischer, G.; B. Springborn (2020). *Lineare Algebra*. 19. Aufl. Springer Berlin Heidelberg. DOI: [10.1007/978-3-662-61645-1](https://doi.org/10.1007/978-3-662-61645-1).
- Hackbusch, W. (2019). *Tensor Spaces and Numerical Tensor Calculus*. Springer International Publishing. DOI: [10.1007/978-3-030-35554-8](https://doi.org/10.1007/978-3-030-35554-8).
- Jänich, K. (2008). *Lineare Algebra*. 11. Aufl. Springer Berlin Heidelberg. DOI: [10.1007/978-3-540-75502-9](https://doi.org/10.1007/978-3-540-75502-9).
- Liesen, J.; V. Mehrmann (2024). *Lineare Algebra. Ein Lehrbuch über die Theorie mit Blick auf die Praxis*. Springer Studium Mathematik. Springer Berlin Heidelberg. DOI: [10.1007/978-3-662-67944-9](https://doi.org/10.1007/978-3-662-67944-9).
- Magnus, P. D.; T. Button; J. R. Loftis; R. Trueman; A. Thomas-Bolduc; R. Zach; S. Wimmer (2023). *forall x: Dortmund. Eine Einführung in die formale Logik*. URL: <https://github.com/sbwimmer/forallx-do>.
- Thiele, R. (1979). *Mathematische Beweise*. Bd. 99. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. URL: https://mathematikalpha.de/?smd_process_download=1&download_id=26662.