Lineare Algebra II

Woche 14

16.07.2024

Motivation: Rang-Normalform vs. Singulärwertzerlegung

$A \in K^{n \times m}$

Vektorräume K^n und K^m

Rang-Normalform

$$S\,A\,T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

mit S, T invertierbar (Äquivalenztransformation)

$A \in \mathbb{R}^{n \times m}$

Innenprodukträume $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$

Singulärwertzerlegung

$$U^{-1} A\,V = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & \sigma_r & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

mit U, V orthonormale Spalten (orthogonale Äquivalenztransf.)

Singulärwertzerlegung

Satz 36.1

Es seien $(\mathbb{R}^m, \gamma_{M_1})$ und $(\mathbb{R}^n, \gamma_{M_2})$ zwei Euklidische Räume.
Weiter sei $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mit $\operatorname{Rang}(A) = r$.

1. Dann existieren
   - eine Matrix $V \in \mathbb{R}^{m \times m}$ mit M_1-orthonormalen Spalten
   - eine Matrix $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit M_2-orthonormalen Spalten
   - eine Diagonalmatrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mit nicht-negativen Einträgen

$$\Sigma = \left[\begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \sigma_n & \end{array}\right] \quad \text{bzw.} \quad \Sigma = \left[\begin{array}{ccc} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_m \\ \hline & 0 & \end{array}\right]$$

mit $\sigma_1 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r > 0$ und $\sigma_{r+1} = \cdots = \sigma_{\min\{m,n\}} = 0$ und

$$A = U \Sigma V^{-1}$$

Singulärwertzerlegung

Satz 36.1

Es seien $(\mathbb{R}^m, \gamma_{M_1})$ und $(\mathbb{R}^n, \gamma_{M_2})$ zwei Euklidische Räume.
Weiter sei $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mit $\operatorname{Rang}(A) = r$.

1. $A = U \Sigma V^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad A V = U \Sigma \quad \Leftrightarrow \quad U^{-1} A V = \Sigma$
2. Die Zahlen $\sigma_1, \ldots, \sigma_{\min\{m,n\}}$ sind die Wurzeln der größten Eigenwerte des M_1-selbstadjungierten Endomorphismus $A^\circ A$.
3. Die Spalten von V bilden eine M_1-orthonormale Basis aus Eigenvektoren des M_1-selbstadjungierten Endomorphismus $A^\circ A$.
4.

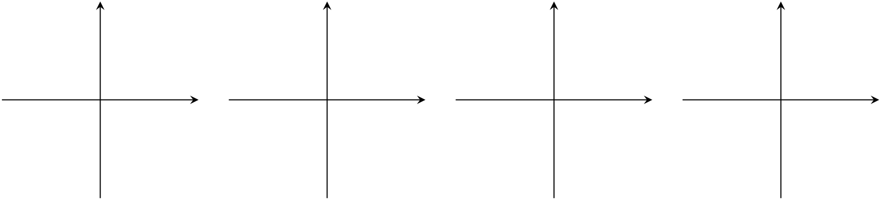
Singulärwertzerlegung

Definition 36.2

Es seien $(\mathbb{R}^m, \gamma_{M_1})$ und $(\mathbb{R}^n, \gamma_{M_2})$ zwei Euklidische Räume.
Weiter sei $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

1. Eine Zerlegung $A = U \Sigma V^{-1}$ wie angegeben heißt eine (M_1, M_2)-**Singulärwertzerlegung** von A.
2. Die Diagonaleinträge $\sigma_1, \ldots, \sigma_{\min\{m,n\}} \geqslant 0$ der Matrix Σ heißen die (M_1, M_2)-**Singulärwerte** von A.
3. Die Eigenvektoren von $A^\circ A$ zum Eigenwert σ_j^2 heißen die (M_1, M_2)-**Rechts-Singulärvektoren** zum (M_1, M_2)-Singulärwert σ_j.
4. Die Eigenvektoren von $A\,A^\circ$ zum Eigenwert σ_j^2 heißen die (M_1, M_2)-**Links-Singulärvektoren** zum (M_1, M_2)-Singulärwert σ_j.
5. Jedes Tripel (σ_j, u, v) heißt ein (M_1, M_2)-**singuläres Tripel**.

Illustration der Singulärwertzerlegung



Singulärwertzerlegung der transponierten Matrix

$$A = U \Sigma V^{-1}$$

- Spalten von V sind M_1-orthonormal
- Spalten von U sind M_2-orthonormal

$$A^\mathsf{T} = V^{-\mathsf{T}} \Sigma^\mathsf{T} U^\mathsf{T}$$

- Spalten von $U^{-\mathsf{T}}$ sind M_2^{-1}-orthonormal
- Spalten von $V^{-\mathsf{T}}$ sind M_1^{-1}-orthonormal

Singulärwertzerlegung der inversen Matrix

$$A = U \Sigma V^{-1}$$

- Spalten von V sind M_1-orthonormal
- Spalten von U sind M_2-orthonormal

$$A^{-1} = V \Sigma^{-1} U^{-1}$$

- Spalten von U sind M_2-orthonormal
- Spalten von V sind M_1-orthonormal

Zusammenhang Singulärwert- und Spektralzerlegung

Satz 36.7

Es sei $(\mathbb{R}^n, \gamma_M)$ ein Euklidischer Raum.
Weiter sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine M-selbstadjungierte Matrix.

Dann gilt folgender Zusammenhang:

M-Singulärwertzerlegung

$$A\,V = U\,\Sigma$$

M-Spektralzerlegung

$$A\,V = V\Lambda$$

(M_1, M_2)-Spektralnorm eines Homomorphismus

Definition 36.8 (Version für Matrizen)

Es seien $(\mathbb{R}^m, \gamma_{M_1})$ und $(\mathbb{R}^n, \gamma_{M_2})$ zwei Euklidische Räume.
Weiter sei $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Dann heißt

$$\|A\|_{(\mathbb{R}^m, M_1) \to (\mathbb{R}^n, M_2)} := \max\big\{ \|A\,x\|_{M_2} \,\big|\, x \in S(\mathbb{R}^m, M_1) \big\}$$

die (M_1, M_2)-**Spektralnorm von** A.

(M_1, M_2)-Spektralnorm eines Homomorphismus

Satz 36.9

Es seien $(\mathbb{R}^m, \gamma_{M_1})$ und $(\mathbb{R}^n, \gamma_{M_2})$ zwei Euklidische Räume.
Weiter sei $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Ist $A = U \Sigma V^{-1}$ eine (M_1, M_2)-Singulärwertzerlegung von A, dann gilt

$$\|A\|_{(\mathbb{R}^m, M_1) \to (\mathbb{R}^n, M_2)} = \sigma_1.$$

Singulärwertzerlegung in unitären Räumen

Satz 36.11

Es seien $(\mathbb{C}^m, \gamma_{M_1})$ und $(\mathbb{C}^n, \gamma_{M_2})$ zwei unitäre Räume.
Weiter sei $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ mit $\operatorname{Rang}(A) = r$.

Dann existieren

- eine Matrix $V \in \mathbb{R}^{m \times m}$ mit M_1-orthonormalen Spalten
- eine Matrix $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit M_2-orthonormalen Spalten
- eine Diagonalmatrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mit nicht-negativen Einträgen mit $\sigma_1 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r > 0$ und $\sigma_{r+1} = \cdots = \sigma_{\min\{m,n\}} = 0$ und

$$A = U \Sigma V^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad A V = U \Sigma \quad \Leftrightarrow \quad U^{-1} A V = \Sigma$$

The Road Ahead

Unendlich-dimensionale Optimierung

Grundlagen der Optimierung

Nichtlineare Optimierung