Lineare Algebra II

Woche 14

16.07.2024

$A \in K^{n \times m}$

Vektorräume K^n und K^m

Rang-Normalform

$$S\,A\,T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Rang(A)

mit S, T invertierbar (Äquivalenztransformation)

später auch $\mathbb{C}^{n \times m}$

$A \in \mathbb{R}^{n \times m}$

Innenproduktränme $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$

Singulärwertzerlegung

$$U^{-1} A\,V = \begin{bmatrix} \sigma_1 {>0} & & & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & \sigma_r {>0} & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \Sigma$$

Rang(A)

mit U, V orthonormale Spalten (orthogonale Äquivalenztransf.)

Normalformen unter der jeweiligen Trafo-Klasse

Singulärwertzerlegung (SVD)

symmetrisch und positiv definit

Satz 36.1

Es seien $(\mathbb{R}^m, \gamma_{M_1})$ und $(\mathbb{R}^n, \gamma_{M_2})$ zwei Euklidische Räume.
Weiter sei $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mit $\operatorname{Rang}(A) = r$.

1. Dann existieren
   - eine Matrix $V \in \mathbb{R}^{m \times m}$ mit M_1-orthonormalen Spalten
   - eine Matrix $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit M_2-orthonormalen Spalten
   - eine Diagonalmatrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mit nicht-negativen Einträgen

$$\underset{m \geq n}{\Sigma} = \Bigg[\underbrace{\begin{matrix}\sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n\end{matrix}}_{n} \Bigg| \underbrace{\;0\;}_{m-n}\Bigg] \quad \text{bzw.} \quad \underset{n \geq m}{\Sigma} = \left[\begin{array}{ccc}\sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_m \\ \hline & 0 & \end{array}\right]\begin{matrix} \}\, m \\ \}\, n-m\end{matrix}$$

mit $\sigma_1 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r > 0$ und $\sigma_{r+1} = \cdots = \sigma_{\min\{m,n\}} = 0$ und

$$A = U \Sigma V^{-1} \iff AV = U\Sigma \iff U^{-1}AV = \Sigma$$

Satz 36.1

Es seien $(\mathbb{R}^m, \gamma_{M_1})$ und $(\mathbb{R}^n, \gamma_{M_2})$ zwei Euklidische Räume.
Weiter sei $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mit $\operatorname{Rang}(A) = r$.

1. $A = U \Sigma V^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad A V = U \Sigma \quad \Leftrightarrow \quad U^{-1} A V = \Sigma$

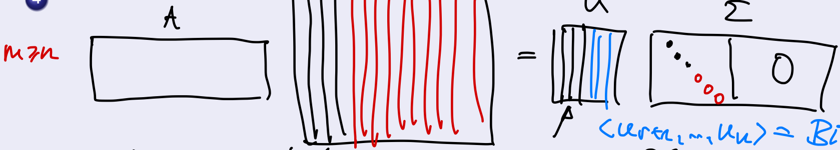
   alle EW sind ≥ 0

2. Die Zahlen $\sigma_1, \ldots, \sigma_{\min\{m,n\}}$ sind die Wurzeln der größten Eigenwerte des M_1-selbstadjungierten Endomorphismus $A^\circ A$.

3. Die Spalten von V bilden eine M_1-orthonormale Basis aus Eigenvektoren des M_1-selbstadjungierten Endomorphismus $A^\circ A$.

   $AV = U\Sigma \Leftrightarrow A v_j = \sigma_j u_j$

4.



$\langle u_{r+1}, \ldots, u_n \rangle = \operatorname{Bild}(A)^\perp$

$\langle v_1, \ldots, v_r \rangle = \operatorname{Kern}(A)^\perp$ $\quad \langle v_{r+1}, \ldots, v_m \rangle = \operatorname{Kern}(A)$ $\quad \langle u_1, \ldots, u_r \rangle = \operatorname{Bild}(A)$

Definition 36.2

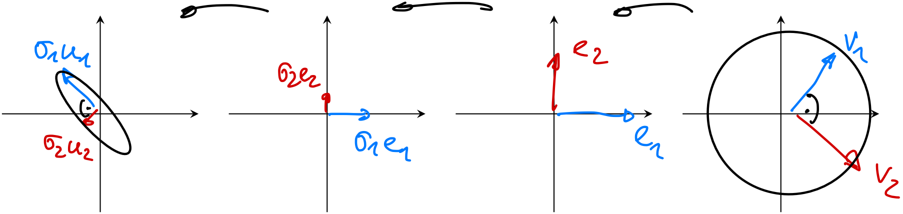
Es seien $(\mathbb{R}^m, \gamma_{M_1})$ und $(\mathbb{R}^n, \gamma_{M_2})$ zwei Euklidische Räume. Weiter sei $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

1. Eine Zerlegung $A = U \Sigma V^{-1}$ wie angegeben heißt eine (M_1, M_2)-**Singulärwertzerlegung** von A.
2. Die Diagonaleinträge $\sigma_1, \ldots, \sigma_{\min\{m,n\}} \geqslant 0$ der Matrix Σ heißen die (M_1, M_2)-**Singulärwerte** von A.
   $j = 1, \ldots, m$
3. Die Eigenvektoren von $A^\circ A$ zum Eigenwert σ_j^2 heißen die (M_1, M_2)-**Rechts-Singulärvektoren** zum (M_1, M_2)-Singulärwert σ_j.
   $j = 1, \ldots, n$
4. Die Eigenvektoren von $A\,A^\circ$ zum Eigenwert σ_j^2 heißen die (M_1, M_2)-**Links-Singulärvektoren** zum (M_1, M_2)-Singulärwert σ_j.
5. Jedes Tripel (σ_j, u, v) heißt ein (M_1, M_2)-**singuläres Tripel**.

mit $Av = \sigma_j u$

Illustration der Singulärwertzerlegung $m = n = 2$

$$A \quad = \quad U \quad \Sigma \quad V^{-1}$$



Singulärwertzerlegung der transponierten Matrix

$$\overset{M_2}{\mathbb{R}^n} \longleftarrow \overset{M_1}{\mathbb{R}^m} \qquad\qquad \overset{M_1^{-1}}{(\mathbb{R}^m)^*} \longleftarrow \overset{M_2^{-1}}{(\mathbb{R}^n)^*}$$

$$A = U \Sigma V^{-1}$$

- Spalten von V sind M_1-orthonormal
- Spalten von U sind M_2-orthonormal

$$A^T = V^{-T} \Sigma^T U^T$$

- Spalten von U^{-T} sind M_2^{-1}-orthonormal
  $U^{-1} M_2^{-1} U^{-T} = (U^T M_2 U)^{-1} = I$
- Spalten von V^{-T} sind M_1^{-1}-orthonormal

Singulärwertzerlegung der inversen Matrix

$$\overset{M_2}{\mathbb{R}^n} \to \overset{M_1}{\mathbb{R}^n}$$

$$A = U \Sigma V^{-1}$$

- Spalten von V sind M_1-orthonormal
- Spalten von U sind M_2-orthonormal

$$\overset{M_1}{\mathbb{R}^n} \leftarrow \overset{M_2}{\mathbb{R}^n}$$

$$A^{-1} = \underbrace{V \Sigma^{-1} U}_{\text{bis auf Sortierung}}{}^{-1}$$

- Spalten von U sind M_2-orthonormal
- Spalten von V sind M_1-orthonormal

Zusammenhang Singulärwert- und Spektralzerlegung

Satz 36.7

Es sei $(\mathbb{R}^n, \gamma_M)$ ein Euklidischer Raum.
Weiter sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine M-selbstadjungierte Matrix.

Dann gilt folgender Zusammenhang:

M-Singulärwertzerlegung

$U\Pi \leadsto U$

$V\Pi \leadsto V$

$\Pi^T \Sigma \Pi \leadsto \Sigma$

$\Sigma := S\Lambda$

$U := VS$

$$A\,V = U\,\Sigma$$

≥ 0

M-Spektralzerlegung

$$A\,V = V\Lambda$$

Eintrage

$U\Sigma = (US)(S\Sigma) =: V\Lambda$

$S = \begin{pmatrix} \pm 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \pm 1 \end{pmatrix}$

Definition 36.8 (Version für Matrizen)

Es seien $(\mathbb{R}^m, \gamma_{M_1})$ und $(\mathbb{R}^n, \gamma_{M_2})$ zwei Euklidische Räume.
Weiter sei $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Dann heißt

$$\|A\|_{(\mathbb{R}^m, M_1) \to (\mathbb{R}^n, M_2)} := \max\Big\{ \|A\,x\|_{M_2} \;\Big|\; x \in \overbrace{S(\mathbb{R}^m, M_1)}^{\text{Einheitssphäre}} \Big\}$$

$$= \max \left\{ \frac{\|Ax\|_{M_2}}{\|x\|_{M_1}} : x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \right\}$$

die (M_1, M_2)-**Spektralnorm von** A.

(M_1, M_2)-Spektralnorm eines Homomorphismus

Satz 36.9

Es seien $(\mathbb{R}^m, \gamma_{M_1})$ und $(\mathbb{R}^n, \gamma_{M_2})$ zwei Euklidische Räume.
Weiter sei $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Ist $A = U \Sigma V^{-1}$ eine (M_1, M_2)-Singulärwertzerlegung von A, dann gilt

$$\|A\|_{(\mathbb{R}^m, M_1) \to (\mathbb{R}^n, M_2)} = \sigma_1.$$

Singulärwertzerlegung in unitären Räumen

hermitesche und pos. def. Matrizen

Satz 36.11

Es seien $(\mathbb{C}^m, \gamma_{M_1})$ und $(\mathbb{C}^n, \gamma_{M_2})$ zwei unitäre Räume.
Weiter sei $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ mit $\operatorname{Rang}(A) = r$.

Dann existieren

$V^H M_1 V = I$

- eine Matrix $V \in \cancel{\mathbb{R}}\,\mathbb{C}^{m \times m}$ mit M_1-orthonormalen Spalten
- eine Matrix $U \in \cancel{\mathbb{R}}\,\mathbb{C}^{n \times n}$ mit M_2-orthonormalen Spalten
- eine Diagonalmatrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mit nicht-negativen Einträgen mit $\sigma_1 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r > 0$ und $\sigma_{r+1} = \cdots = \sigma_{\min\{m,n\}} = 0$ und

$$A = U \Sigma V^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad A V = U \Sigma \quad \Leftrightarrow \quad U^{-1} A V = \Sigma$$

The Road Ahead

jedes 2. WS

Unendlich-dimensionale Optimierung

jedes WS

Grundlagen der Optimierung

jedes SS

Nichtlineare Optimierung

Einführung in Netzwerk