# Lineare Algebra II

## Woche 13

09.07.2024 und 11.07.2024

# Selbstadjungierte und normale Endomorphismus

## Definition 34.45

Es sei $(V, \gamma)$ ein Euklidischer Raum.

1. $f \in \operatorname{End}(V)$ heißt $\gamma$-**selbstadjungiert**, wenn $f = f^\circ$ gilt.
2. $f \in \operatorname{End}(V)$ heißt $\gamma$-**normal**, wenn $f \circ f^\circ = f^\circ \circ f$ gilt.

# Selbstadjungiertheit in Darstellungsmatrizen

## Lemma 34.46

Es sei $(V, \gamma)$ ein Euklidischer Raum mit Basis $B_V$.
Weiter seien $f \in \operatorname{End}(V)$ und

- $M := \mathcal{M}_{B_V^*}^{B_V}(\gamma)$
- $A = \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f)$

Dann sind äquivalent:

1. $f$ ist $\gamma$-selbstadjungiert.
2. Die Darstellungsmatrix $A$ erfüllt $M^{-1} A^\mathsf{T} M = A$.

# Normalität in Darstellungsmatrizen

## Lemma 34.47

Es sei $(V, \gamma)$ ein Euklidischer Raum mit Basis $B_V$.
Weiter seien $f \in \operatorname{End}(V)$ und

- $M := \mathcal{M}_{B_V^*}^{B_V}(\gamma)$
- $A = \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f)$

Dann sind äquivalent:

1. $f$ ist $\gamma$-normal.
2. Die Darstellungsmatrix $A$ erfüllt $A\,M^{-1}A^\mathsf{T}M = M^{-1}A^\mathsf{T}M\,A$.

# Orthogonalität, Selbstadjungiertheit, Normalität

**Lemma 34.48**

Es sei $(V, \gamma)$ ein endlich-dimensionaler Euklidischer Raum.
Weiter sei $f \in \operatorname{End}(V)$. Dann gilt:

$$\begin{tikzcd} f \text{ ist } \gamma\text{-selbstadjungiert} \arrow[dr, Rightarrow] & & f \text{ ist } \gamma\text{-orthogonal} \arrow[dl, Rightarrow] \\ & f \text{ ist } \gamma\text{-normal} & \end{tikzcd}$$

## Beispiel 34.49

1. Die Drehabbildung, dargestellt durch

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

bzgl. der Standardbasis, ist $I$-orthogonal (Beispiel 34.33).

Also ist $A$ auch $I$-normal.

Im Allgemeinen ist $A$ aber nicht $I$-selbstadjungiert, denn

## Beispiel 34.49

2. Die Spiegelungsabbildung, dargestellt durch

$$A = \begin{bmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

bzgl. der Standardbasis, ist $I$-orthogonal (Beispiel 34.33).

Also ist $A$ auch $I$-normal.

Darüber hinaus ist $A$ auch $I$-selbstadjungiert, denn

# Normale Endomorphismen induzieren Zerlegungen

## Folgerung 34.50

Es sei $(V, \gamma)$ ein endlich-dimensionaler Euklidischer Raum.
Weiter sei $f \in \operatorname{End}(V)$ $\gamma$-normal.

Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Kern}(f^\circ) &= \operatorname{Kern}(f) \\
\operatorname{Bild}(f^\circ) &= \operatorname{Bild}(f)
\end{aligned}
$$

und daher

$$
\begin{aligned}
V &= \operatorname{Kern}(f) \obot \operatorname{Bild}(f) \\
V &= \operatorname{Kern}(f^\circ) \obot \operatorname{Bild}(f^\circ)
\end{aligned}
$$

# Eigenvektoren selbstadjungierter Endomorphismen

## Lemma 34.51

Es sei $(V, \gamma)$ ein Euklidischer Raum und $f \in \operatorname{End}(V)$ $\gamma$-selbstadjungiert.

Sind $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ verschiedene Eigenwerte von $f$ mit Eigenvektoren $v_1$ bzw. $v_2$, dann sind $(v_1, v_2)$ $\gamma$-orthogonal.

Beweis.

# Invariante Unterräume selbstadjungierter Endomorphismen

**Lemma 34.52**

Es sei $(V, \gamma)$ ein Euklidischer Raum und $f \in \operatorname{End}(V)$ $\gamma$-selbstadjungiert.

Ist $U \subseteq V$ ein $f$-invarianter Unterraum, dann ist auch $U^\perp$ ein $f$-invarianter Unterraum.

*Beweis.* Übung

# Einheitssphäre, Rayleigh-Quotient

## Definition 34.53

Es sei $(V, \gamma)$ ein endlich-dimensionaler Euklidischer Raum.

1. Die Menge
$$S(V, \gamma) := \left\{ v \in V \,\middle|\, \|v\|_\gamma = 1 \right\}$$
heißt die **Einheitssphäre** des Raumes $(V, \gamma)$.

2. Für $f \in \operatorname{End}(V)$ $\gamma$-selbstadjungiert heißt die Funktion

   der **Rayleigh-Quotient** von $f$.

# Maximum des Rayleigh-Quotienten

## Satz 34.54

Es sei $(V, \gamma)$ ein Euklidischer Raum mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}$.
Weiter sei $f \in \operatorname{End}(V)$ $\gamma$-selbstadjungiert. Dann gilt:

1. Der Rayleigh-Quotient ist auf $V \setminus \{0\}$ nach oben beschränkt und nimmt sein Supremum als Maximum an.

Beweis.

# Maximum des Rayleigh-Quotienten

## Satz 34.54

Es sei $(V, \gamma)$ ein Euklidischer Raum mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}$.
Weiter sei $f \in \operatorname{End}(V)$ $\gamma$-selbstadjungiert. Dann gilt:

2. Das Maximum $m := \max\big\{R_{f,\gamma}(v) \,\big|\, v \in V \setminus \{0\}\big\}$ ist der größte Eigenwert von $f$. Die Maximierer sind genau die Eigenvektoren:
$$\{v \in V \setminus \{0\} \,|\, R_{f,\gamma} = m\} = \operatorname{Eig}(f, m) \setminus \{0\}.$$

Beweis.

# Spektralsatz für $\gamma$-selbstadjungierte Endomorphismen

**Satz 34.55**

Es sei $(V, \gamma)$ ein endlich-dimensionaler Euklidischer Raum.
Für $f \in \mathrm{End}(V)$ sind äquivalent:

1. $f$ ist $\gamma$-selbstadjungiert.
2. $f$ ist diagonalisierbar, und es gibt es Basis aus Eigenvektoren von $f$, die $\gamma$-orthonormal ist.

Beweis.

# Spektralsatz für $\gamma$-selbstadjungierte Endomorphismen

**Satz 34.55**

Es sei $(V, \gamma)$ ein endlich-dimensionaler Euklidischer Raum.
Für $f \in \mathrm{End}(V)$ sind äquivalent:

1. $f$ ist $\gamma$-selbstadjungiert.
2. $f$ ist diagonalisierbar, und es gibt es Basis aus Eigenvektoren von $f$, die $\gamma$-orthonormal ist.

Beweis.

# Orthogonale Diagonalisierbarkeit

## Bemerkung 34.56

1. Besonderheit der $\gamma$-orthogonalen Diagonalisierbarkeit eines Endomorphismus auf $V$:

   Es existiert eine Basis aus Eigenvektoren, die alle auch über die Eigenräume hinweg paarweise orthogonal gewählt werden können.

2. Zu einem diagonalisierbaren Endomorphismus mit Eigenvektorbasis $B_V = (v_1, \ldots, v_n)$ können wir ein Innenprodukt $\gamma$ auf $V$ so wählen, dass $f$ $\gamma$-orthogonal diagonalisierbar ist:

# Spektralsatz für $M$-selbstadjungierte Matrizen

## Folgerung 34.57

Es sei $(\mathbb{R}^n, \gamma_M)$ ein Euklidischer Raum, also $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit. Weiter sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann sind äquivalent:

1. $A$ ist $M$-selbstadjungiert, erfüllt also $M^{-1} A^\mathsf{T} M = A$.
2. $A$ ist diagonalisierbar, und es gibt eine Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ aus Eigenvektoren von $A$, die $M$-orthonormal ist.

# Innenprodukte in komplexen Vektorräumen?

1. $\mathbb{C}$ ist kein geordneter Körper.

2. Es ist aber

$$\gamma(i\,x, i\,x)$$

3. Fazit: Innenprodukte in komplexen Vektorräumen können nicht mit Hilfe von Bilinearformen definiert werden!

# Antilineare Abbildungen

## Definition 35.1

Es seien $V, W$ komplexe Vektorräume.

1. Eine Abbildung $f\colon V \to W$ heißt **antilinear** oder **konjugiert linear**, wenn gilt:

$$\begin{aligned} f(u+v) &= f(u) + f(v) && \text{für alle } u, v \in V, \\ f(\alpha\, u) &= \overline{\alpha}\, f(u) && \text{für alle } u \in V \text{ und alle } \alpha \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

2. Antilineare Abbildungen werden auch als **antilineare Homomorphismen** bezeichnet.

# Antilineare Abbildungen

## Beispiel 35.2

1. Die komponentenweise komplexe Konjugation in $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}_0$, also

$$\mathbb{C}^n \ni \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \overline{v_1} \\ \vdots \\ \overline{v_n} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n,$$

   ist eine antilineare Abbildung.

2. Für $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ ist die Matrix-Vektor-Multiplikation mit dem komplex konjugierten Vektor

$$\mathbb{C}^m \ni z \mapsto A\,\overline{z} \in \mathbb{C}^n$$

   eine antilineare Abbildung.

# Darstellungssatz für antilineare Abbildungen

## Satz 35.3

Es seien $V, W$ zwei endlich-dimensionale komplexe Vektorräume mit Basen $B_V = (v_1, \ldots, v_m)$ und $B_W = (w_1, \ldots, w_n)$.

Dann gibt es zu jeder antilinearen Abbildung $f\colon V \to W$ eine eindeutig definierte **Darstellungsmatrix** $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ mit der Eigenschaft

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, w_i \quad \text{für alle } j = 1, \ldots, m.$$

$$v = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j\, v_j \quad \Rightarrow \quad f(v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, \alpha_j\, w_i, \quad \text{wenn } f \text{ linear ist}$$

$$v = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j\, v_j \quad \Rightarrow \quad f(v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, \overline{\alpha_j}\, w_i, \quad \text{wenn } f \text{ antilinear ist}$$

## Definition 35.4

Es sei $V$ ein komplexer Vektorraum.

1. Eine Abbildung $\theta\colon V \times V \to \mathbb{C}$ heißt eine **Sesquilinearform auf $V$**, wenn $\theta$ im ersten Argument antilinear und im zweiten Argument linear ist:

$$\theta(\alpha\, u + \beta\, v, w) = \overline{\alpha}\,\theta(u, w) + \overline{\beta}\,\theta(v, w)$$
$$\theta(u, \alpha\, v + \beta\, w) = \alpha\,\theta(u, v) + \beta\,\theta(u, w)$$

2. Die Menge aller Sesquilinearformen $V \times V \to \mathbb{C}$ bezeichnen wir mit $\operatorname{Sesq}(V, V)$.

## Definition 35.4

Es sei $V$ ein komplexer Vektorraum.

3. Eine Sesquilinearform heißt

$$\textbf{hermitesch} \text{ im Fall } \quad \theta(u, v) = \overline{\theta(v, u)} \quad \text{für alle } u, v \in V$$
$$\textbf{schiefhermitesch} \text{ im Fall } \quad \theta(u, v) = -\overline{\theta(v, u)} \quad \text{für alle } u, v \in V$$

4. Die Menge aller hermiteschen Sesquilinearformen $V \times V \to \mathbb{C}$ bezeichnen wir mit $\mathrm{Sesq}_{\mathrm{herm}}(V, V)$ und die der schiefhermiteschen Sesquilinearformen mit $\mathrm{Sesq}_{\mathrm{skew}}(V, V)$.

5. Zwei Vektoren $u, v \in V$ heißen **orthogonal bzgl. der hermiteschen Sesquilinearform** $\theta$, wenn $\theta(u, v) = 0$ gilt.

# Hermitesche Sesquilinearformen sind auf der Diagonale reell

**Lemma 35.5**

Es sei $V$ ein komplexer Vektorraum.

Für $\theta \in \operatorname{Sesq}(V, V)$ sind äquivalent:

1. $\theta$ ist hermitesch.
2. $\theta(v, v) \in \mathbb{R}$ für alle $v \in V$.

## Definition 35.6

Es sei $V$ ein komplexer Vektorraum. Eine (notwendigerweise hermitesche) Sesquilinearform $\theta$ auf $V$ heißt

1. **positiv definit**, wenn $\theta(v, v) > 0$ gilt für alle $v \in V \setminus \{0\}$
2. **positiv semidefinit**, wenn $\theta(v, v) \geqslant 0$ gilt für alle $v \in V$
3. **negativ definit**, wenn $\theta(v, v) < 0$ gilt für alle $v \in V \setminus \{0\}$
4. **negativ semidefinit**, wenn $\theta(v, v) \leqslant 0$ gilt für alle $v \in V$
5. **indefinit**, wenn $\theta$ weder positiv semidefinit noch negativ semidefinit ist, wenn es also Vektoren $v_1, v_2 \in V$ gibt mit $\theta(v_1, v_1) > 0$ und $\theta(v_2, v_2) < 0$

# Innenprodukt, unitärer Raum

## Definition 35.7

Es sei $V$ ein komplexer Vektorraum.

Die hermitesche Sesquilinearform $\theta \in \operatorname{Sesq}(V, V)$ heißt ein **Innenprodukt auf $V$**, wenn $\theta$ positiv definit ist.

In diesem Fall heißt $(V, \theta)$ auch ein **komplexer Innenproduktraum** oder ein **unitärer Raum**.

## Beispiel 35.8

1. Die durch die Einheitsmatrix $I \in \mathbb{C}^{n \times n}$ induzierte Sesquilinearform

$$\theta_I : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \ni (x, y) \mapsto x^{\mathsf{H}} y = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i}\, y_i \in \mathbb{C}$$

   heißt das **Standardinnenprodukt** auf $\mathbb{C}^n$.

2. Im Vektorraum $\mathbb{C}^{n \times m}$ ist

$$\theta(A, B) := \operatorname{trace}(A^{\mathsf{H}} B)$$

   ein Innenprodukt, genannt das **Frobenius-Innenprodukt**.

# Darstellungsmatrix einer Sesquilinearform

## Definition 35.9

Es sei $V$ ein endlich-dimensionaler komplexer Vektorraum mit Basis $B_V = (v_1, \ldots, v_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei $\theta \in \operatorname{Sesq}(V, V)$.

Die Matrix

$$\mathcal{M}_{B_V^*}^{B_V}(\theta) = \big(\theta(v_i, v_j)\big)_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

heißt die **Darstellungsmatrix** der Sesquilinearform $\theta$ bzgl. der Basis $B_V$.

# Konjugiert transponierte Matrix

## Definition 35.10

Es sei $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$, $n, m \in \mathbb{N}_0$.

Die **konjugiert transponierte Matrix** oder **hermitesch transponierte Matrix zu** $A = (a_{ij})$ ist die Matrix mit den Einträgen $\overline{a_{ji}}$.

Wir bezeichnen sie mit $\overline{A}^{\mathsf{T}}$ oder kurz: $A^{\mathsf{H}} \in \mathbb{C}^{m \times n}$.

# Rechenregeln für die konjugierte Transposition

## Lemma 35.11

Für $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ und $C \in \mathbb{C}^{m \times \ell}$, $n, m, \ell \in \mathbb{N}_0$, und $\alpha \in \mathbb{C}$ gelten die folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned}
(A^{\mathsf{H}})^{\mathsf{H}} &= A \\
(A + B)^{\mathsf{H}} &= A^{\mathsf{H}} + B^{\mathsf{H}} \\
(\alpha\, A)^{\mathsf{H}} &= \overline{\alpha}\, A^{\mathsf{H}} \\
(A\, C)^{\mathsf{H}} &= C^{\mathsf{H}} A^{\mathsf{H}}
\end{aligned}$$

# Hermitesche und schiefhermitesche Matrizen

## Definition 35.12

Es $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

1. $A$ heißt **hermitesch**, wenn $A = A^\mathsf{H}$ gilt.
2. $A$ heißt **antihermitesch** oder **schiefhermitesch**, wenn $A = -A^\mathsf{H}$ gilt.

Die Menge der hermiteschen bzw. schiefhermiteschen $n \times n$-Matrizen bezeichnen wir mit $\mathbb{C}^{n \times n}_{\text{herm}}$ bzw. $\mathbb{C}^{n \times n}_{\text{skew}}$.

# Sesquilinearform

## Beispiel 35.13

Für jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist die Abbildung

$$\theta_A \colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \ni (x, y) \mapsto x^{\mathsf{H}} A\, y \in \mathbb{C}$$

eine Sesquilinearform auf $\mathbb{C}^n$.

$A$ ist die Darstellungsmatrix von $\theta_A$ bzgl. der Standardbasis $(e_1, \ldots, e_n)$ von $\mathbb{C}^n$.

# Transform. der Darstellungsmatrix einer Sesquilinearform

## Satz 35.14

Es sei $V$ ein endlich-dimensionaler komplexer Vektorraum. Weiter seien $B_V$ und $\widehat{B}_V$ Basen von $V$.

Dann gilt für die Darstellungsmatrix einer Sesquilinearform $\theta \colon V \times V \to K$:

$$\mathcal{M}^{\widehat{B}_V}_{\widehat{B}_V^*}(\theta) = \overline{\mathcal{T}^{B_V^*}_{\widehat{B}_V^*}}\, \mathcal{M}^{B_V}_{B_V^*}(\theta)\, \mathcal{T}^{\widehat{B}_V}_{B_V}.$$

# Hermitesche Kongruenztransformation

## Definition 35.15

Zwei Matrizen $A, \widehat{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \in \mathbb{N}_0$, heißen **hermitesch kongruent**, wenn es eine invertierbare Matrix $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gibt, sodass gilt:

$$\widehat{A} = T^{-\mathsf{H}} A \, T^{-1}.$$

Der Übergang von $A$ zu $T^{-\mathsf{H}} A \, T^{-1}$ heißt auch eine **hermitesche Kongruenztransformation** von $A$.

# Cauchy-Schwarz-Ungleichung

## Satz 35.17

Es sei $(V, \theta)$ ein unitärer Raum. Dann gilt:

$$\theta(u, v)\,\overline{\theta(u, v)} = |\theta(u, v)|^2 \leqslant \theta(u, u)\,\theta(v, v)$$

für alle $u, v \in V$.

Gleichheit gilt genau dann, wenn $(u, v)$ linear abhängig ist.

# Norm auf einem komplexen Vektorraum

## Definition 35.18

Es sei $V$ ein Vektorraum über $\mathbb{C}$.

1. Eine Abbildung $\|\cdot\| \colon V \to \mathbb{R}$ heißt eine **Norm auf $V$**, wenn gilt:

   $$\begin{aligned} &\|u\| \geqslant 0 \quad \text{und} \quad \|u\| = 0 \;\Rightarrow\; u = 0 && \textbf{positive Definitheit} \\ &\|\alpha\, u\| = |\alpha|\, \|u\| && \textbf{absolute Homogenität} \\ &\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\| && \textbf{Dreiecksungleichung} \end{aligned}$$

   für alle $u, v \in V$ und alle $\alpha \in \mathbb{C}$.

2. Das Paar $(V, \|\cdot\|)$ heißt ein **normierter komplexer Vektorraum**.

# Jedes Innenprodukt induziert eine Norm

## Satz 35.19

Es sei $(V, \theta)$ ein unitärer Raum. Dann definiert

$$\|\cdot\|_\theta \colon V \ni u \mapsto \|u\|_\theta := \sqrt{\theta(u, u)} \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$$

eine Norm auf $V$.

# Jedes Innenprodukt induziert eine Norm

## Beispiel 35.20

1. Das Standardinnenprodukt auf $\mathbb{C}^n$

$$\theta_I \colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \ni (x, y) \mapsto x^{\mathsf{H}} y = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i}\, y_i \in \mathbb{C}$$

induziert die Norm (hier quadradiert)

$$\|x\|^2 := \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i}\, x_i = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2,$$

die manchmal die **Standardnorm** auf $\mathbb{C}^n$ genannt wird.

# Jedes Innenprodukt induziert eine Norm

## Beispiel 35.20

2. Die vom Frobenius-Innenprodukt auf $\mathbb{C}^{n \times m}$

$$\theta(A, B) := \operatorname{trace}(A^H B)$$

induzierte Norm ist (hier quadradiert)

$$\|A\|_F^2 := \operatorname{trace}(A^H A) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \overline{a_{ij}}\, a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|^2,$$

genannt die **Frobenius-Norm** auf $\mathbb{C}^{n \times m}$.

# Homomorphismen unitärer Räume

## Definition 35.29

Es seien $(V, \theta_1)$ und $(W, \theta_2)$ zwei unitäre Räume.

Eine Abbildung $f\colon V \to W$ heißt **unitär** oder eine **(lineare) Isometrie bzgl.** $(\theta_1, \theta_2)$, wenn $f$ ein Homormophismus der unitären Räume $(V, \theta_1) \to (W, \theta_2)$ ist, wenn also gilt:

$$\begin{aligned} &f \text{ ist linear} \\ &\theta_2(f(u), f(v)) = \theta_1(u, v) \quad \text{für alle } u, v \in V. \end{aligned}$$

Statt **unitär bzgl.** $(\theta_1, \theta_2)$ sagen wir auch kurz $(\theta_1, \theta_2)$-**unitär**.

# Charakterisierung unitärer Abbildungen

### Satz 35.30

Es seien $(V, \theta_1)$ und $(W, \theta_2)$ zwei unitäre Räume und $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$. Dann sind äquivalent:

1. $f$ ist $(\theta_1, \theta_2)$-unitär.
2. $\|f(v)\|_{\theta_2} = \|v\|_{\theta_1}$ für alle $v \in V$, d. h., $f$ ist **längentreu**.
3. $\|f(v_1) - f(v_2)\|_{\theta_2} = \|v_1 - v_2\|_{\theta_1}$ für alle $v_1, v_2 \in V$, d. h., $f$ ist **abstandstreu**.
4. Ist $(v_i)_{i \in I}$ eine orthonormale Familie in $(V, \theta_1)$, dann ist auch $(f(v_i))_{i \in I}$ eine orthonormale Familie in $(W, \theta_2)$.
5. Ist $v$ ein Einheitsvektor in $(V, \theta_1)$, dann ist $f(v)$ ein Einheitsvektor in $(W, \theta_2)$.

## Lemma 35.34

Es seien $(V, \theta_1)$ und $(W, \theta_2)$ zwei endlich-dimensionale unitäre Räume mit Basen $B_V$ bzw. $B_W$. Weiter seien $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ und

- $M_1 := \mathcal{M}_{B_V^*}^{B_V}(\theta_1)$
- $M_2 := \mathcal{M}_{B_W^*}^{B_W}(\theta_2)$
- $A = \mathcal{M}_{B_W}^{B_V}(f)$

Dann sind äquivalent:

1. $f$ ist $(\theta_1, \theta_2)$-unitär.
2. Die Darstellungsmatrix $A$ erfüllt $A^{\mathsf{H}} M_2 \, A = M_1$.

# Unitarität in Darstellungsmatrizen: Endomorphismen

## Folgerung 35.35

Es sei $(V, \theta)$ ein endlich-dimensionaler unitärer Raum mit Basis $B_V$. Weiter seien $f \in \mathrm{End}(V)$ und

- $M := \mathcal{M}_{B_V^*}^{B_V}(\theta)$
- $A = \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f)$

Dann sind äquivalent:

1. $f$ ist $\theta$-unitär.
2. Die Darstellungsmatrix $A$ erfüllt $A^\mathsf{H} M A = M$.

# Unitäre Matrizen

## Definition 35.36

1. Es seien $m, n \in \mathbb{N}_0$, $M_1 \in \mathbb{C}^{m \times m}$ und $M_2 \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitesch und positiv definit.

   Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ heißt **$(M_1, M_2)$-unitär** im Fall

   $$A^{\mathsf{H}} M_2 \, A = M_1.$$

2. Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitesch und positiv definit.

   Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^n$ heißt **$M$-unitär** im Fall

   $$A^{\mathsf{H}} M \, A = M.$$

# Eigenwerte unitärer Endomorphismen

## Lemma 35.38

Es sei $(V, \theta)$ ein unitärer Raum.

Ist $f \in \operatorname{End}(V)$ $\theta$-unitär, dann gilt $|\lambda| = 1$ für alle $\lambda \in \Lambda(f)$.

# Unitäre Endomorphismen bilden eine Gruppe

**Lemma 35.39**

Es sei $(V, \theta)$ ein endlich-dimensionaler unitärer Raum. Dann gilt:

1. Die $\theta$-unitären Endomorphismen von $(V, \theta)$ bilden eine Gruppe bzgl. der Komposition, genannt die **unitäre Gruppe** des unitären Raumes $(V, \theta)$:
$$\mathrm{U}(V, \theta) := \{f \in \mathrm{End}(V) \,|\, f \text{ ist } \theta\text{-unitär}\}.$$
2. Die $\theta$-unitären Endomorphismen $f \in \mathrm{U}(V, \theta)$ mit $\det(f) = 1$ bilden einen Normalteiler von $\mathrm{U}(V, \theta)$, genannt die **spezielle unitäre Gruppe** des unitären Raumes $(V, \theta)$:
$$\mathrm{SU}(V, \theta) := \{f \in \mathrm{U}(V, \theta) \,|\, \det(f) = 1\}.$$

# Unitäre (Darstellungs)matrizen bilden eine Gruppe

## Folgerung 35.40

Es sei $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitesch und positiv definit. Dann gilt

1. Die $M$-unitären Matrizen in $\mathbb{C}^{n \times n}$ bilden eine Gruppe bzgl. der Matrix-Multiplikation, genannt die **unitäre Gruppe** des Euklidischen Raumes $(\mathbb{C}^n, \gamma_M)$:
$$\mathrm{U}(\mathbb{C}^n, \gamma_M) \coloneqq \{A \in \mathbb{C}^{n \times n} \,|\, A \text{ ist } M\text{-unitär}\}.$$
2. Die $M$-unitären Matrizen $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit $\det(A) = 1$ bilden einen Normalteiler von $\mathrm{U}(\mathbb{C}^n, \gamma_M)$, genannt die **spezielle unitäre Gruppe** des Euklidischen Raumes $(\mathbb{C}^n, \gamma_M)$:
$$\mathrm{SU}(\mathbb{C}^n, \gamma_M) \coloneqq \{A \in \mathrm{U}(\mathbb{C}^n, \gamma_M) \,|\, \det(A) = 1\}.$$

# Darstellungssatz von Riesz

## Satz 35.42

Es sei $(V, \theta)$ ein endlich-dimensionaler Euklidischer Raum.

Dann ist **Riesz-Isomorphismus von $V$ nach $V^*$**

$$\Theta \colon V \ni u \mapsto \theta(u, \cdot) \in V^*$$

ein antilinearer Isomorphismus.

Wird $V^*$ mit dem Innenprodukt $\theta^{-1}$ ausgestattet, dann ist $\Theta \colon (V, \theta) \to (V^*, \theta^{-1})$ eine bijektive Isometrie. Es gilt

$$\theta(u, v) = \langle \Theta(u) \, , v \rangle = \overline{\langle \Theta(v) \, , u \rangle} = \theta^{-1}\big(\Theta(u), \Theta(v)\big)$$

für alle $u, v \in V$.

# Rieszscher Darstellungssatz für $(\mathbb{C}^n, \theta_M)$

## Folgerung 35.44

Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitesch und positiv definit.

Dann ist die Abbildung

$$\Theta\colon \mathbb{C}^n \ni x \mapsto (M\,x^\mathsf{H})^\mathsf{T} = M^\mathsf{T}\,\overline{x} \in (\mathbb{C}^n)^*$$

eine bijektive antilineare Isometrie der Euklidischen Räume $(\mathbb{C}^n, \theta_M)$ und $\big((\mathbb{C}^n)^*, \theta_{M^{-1}}\big)$.

Es gilt

$$x^\mathsf{H} M\,y = (x^\mathsf{H} M)\,y = \overline{(y^\mathsf{H} M)\,x} = (x^\mathsf{H} M)\,M^{-1}(M\,y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{C}^n$.

## Definition 35.47

Es seien $(V, \theta_1)$ und $(W, \theta_2)$ zwei endlich-dimensionale unitäre Räume. Weiter sei $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ eine lineare Abbildung. Dann heißt

$$f^\circ := \Theta_{V \to V^*}^{-1} \circ f^* \circ \Theta_{W \to W^*} \colon W \to V$$

der zu $f$ $(\theta_1, \theta_2)$-**adjungierte Homomorphismus**.

Die Definition lautet ausgeschrieben:

$$\theta_2\big(w, f(v)\big) = \theta_1\big(f^\circ(w), v\big)$$

$$\begin{tikzcd}
(V, \theta_1) \arrow[d, "\Theta_{V \to V^*}"'] & (W, \theta_2) \arrow[l, "f^\circ"'] \arrow[d, "\Theta_{W \to W^*}"] \\
(V^*, \theta_1^{-1}) & (W^*, \theta_2^{-1}) \arrow[l, "f^*"']
\end{tikzcd}$$

# Darstellungsmatrizen adjungierter Homomorphismen

## Satz 35.49

Es seien $(V, \theta_1)$ und $(W, \theta_2)$ zwei endlich-dimensionale unitäre Räume mit Basen $B_V$ und $B_W$. Weiter seien $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ und

- $M_1 := \mathcal{M}_{B_V^*}^{B_V}(\theta_1)$
- $M_2 := \mathcal{M}_{B_W^*}^{B_W}(\theta_2)$
- $A = \mathcal{M}_{B_W}^{B_V}(f)$

Dann gilt für die Darstellungsmatrix von $f^\circ \in \operatorname{Hom}(W, V)$

$$A^\circ := \mathcal{M}_{B_V}^{B_W}(f^\circ) = M_1^{-1} A^{\mathsf{H}} M_2$$

# Selbstadjungierte und normale Endomorphismen

## Definition 35.53

Es sei $(V, \gamma)$ ein unitärer Raum.

1. $f \in \operatorname{End}(V)$ heißt $\gamma$-**selbstadjungiert**, wenn $f = f^\circ$ gilt.
2. $f \in \operatorname{End}(V)$ heißt $\gamma$-**normal**, wenn $f \circ f^\circ = f^\circ \circ f$ gilt.

# Selbstadjungiertheit in Darstellungsmatrizen

## Lemma 35.54

Es sei $(V, \theta)$ ein unitärer Raum mit Basis $B_V$.
Weiter seien $f \in \operatorname{End}(V)$ und

- $M := \mathcal{M}_{B_V^*}^{B_V}(\theta)$
- $A = \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f)$

Dann sind äquivalent:

1. $f$ ist $\theta$-selbstadjungiert.
2. Die Darstellungsmatrix $A$ erfüllt $M^{-1} A^{\mathsf{H}} M = A$.

# Normalität in Darstellungsmatrizen

### Lemma 35.55

Es sei $(V, \theta)$ ein unitärer Raum mit Basis $B_V$.
Weiter seien $f \in \operatorname{End}(V)$ und

- $M := \mathcal{M}_{B_V^*}^{B_V}(\theta)$
- $A = \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f)$

Dann sind äquivalent:

1. $f$ ist $\theta$-normal.
2. Die Darstellungsmatrix $A$ erfüllt $A\,M^{-1}A^{\mathsf{H}}M = M^{-1}A^{\mathsf{H}}M\,A$.

# Unitarität, Selbstadjungiertheit, Normalität

## Lemma 35.56

Es sei $(V, \theta)$ ein endlich-dimensionaler unitärer Raum.
Weiter sei $f \in \mathrm{End}(V)$. Dann gilt:

$$\begin{tikzcd}
f \text{ ist } \theta\text{-selbstadjungiert} \arrow[dr, Rightarrow] & & f \text{ ist } \theta\text{-unitär} \arrow[dl, Rightarrow] \\
& f \text{ ist } \theta\text{-normal} &
\end{tikzcd}$$

# Normale Endomorphismen induzieren Zerlegungen

## Folgerung 35.57

Es sei $(V, \gamma)$ ein endlich-dimensionaler unitärer Raum.
Weiter sei $f \in \operatorname{End}(V)$ $\gamma$-normal.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{Kern}(f^\circ) &= \operatorname{Kern}(f) \\ \operatorname{Bild}(f^\circ) &= \operatorname{Bild}(f) \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} V &= \operatorname{Kern}(f) \ominus \operatorname{Bild}(f) \\ V &= \operatorname{Kern}(f^\circ) \ominus \operatorname{Bild}(f^\circ) \end{aligned}$$

# Eigenwerte normaler Endomorphismen

## Lemma 35.59

Es sei $(V, \theta)$ ein endlich-dimensionaler unitärer Raum.
Weiter sei $f \in \operatorname{End}(V)$ $\theta$-normal sowie $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

1. $\lambda \operatorname{id}_V - f$ ist ebenfalls $\theta$-normal.
2. $\operatorname{Eig}(f, \lambda) = \operatorname{Eig}(f^\circ, \overline{\lambda})$.

   Insbesondere ist $\lambda \in \mathbb{C}$ genau dann ein Eigenwert von $f$, wenn $\overline{f}$ ein Eigenwert von $f^\circ$ ist.

# Spektralsatz für $\gamma$-normale Endomorphismen

## Satz 35.60

Es sei $(V, \theta)$ ein endlich-dimensionaler unitärer Raum.
Für $f \in \operatorname{End}(V)$ sind äquivalent:

1. $f$ ist $\theta$-normal.
2. $f$ ist diagonalisierbar, und es gibt es Basis aus Eigenvektoren von $f$, die $\theta$-orthonormal ist.
(Wir nennen $f$ dann **$\theta$-orthogonal diagonalisierbar**.)

## Folgerung 35.62

Es sei $(\mathbb{C}^n, \theta_M)$ ein unitärer Raum, also $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitesch und positiv definit. Weiter sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Dann sind äquivalent:

1. $A$ ist $M$-normal, erfüllt also $M^{-1} A^\mathsf{H} M = A$.
2. $A$ ist diagonalisierbar, und es gibt eine Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ aus Eigenvektoren von $A$, die $M$-orthonormal ist.

   Es gibt also eine invertierbare Matrix $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$, sodass $V^\mathsf{H} M \, V = I$ gilt und
   $$AV = V \Lambda$$
   mit der Diagonalmatrix $\Lambda \in \mathbb{C}^{n \times n}$ der Eigenwerte von $A$ und zugehörigen $M$-orthonormalen Eigenvektoren $V = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$.