

Lineare Algebra II

Woche 13

09.07.2024 und 11.07.2024

Selbstadjungierte und normale Endomorphismen

Definition 34.45

Es sei (V, γ) ein Euklidischer Raum.

$f \in \text{End}(V)$

① $f \in \text{End}(V)$ heißt **γ -selbstadjungiert**, wenn $f = f^\circ$ gilt.

\Downarrow

② $f \in \text{End}(V)$ heißt **γ -normal**, wenn $f \circ f^\circ = f^\circ \circ f$ gilt.

f kommutiert mit seiner Adjungierten f°

$$\begin{aligned} f \text{ ist } \gamma\text{-normal} &\iff \gamma(f(v), f(w)) \\ &= \gamma(f^\circ(v), f^\circ(w)) \quad \forall v, w \in V \end{aligned}$$

Selbstadjungiertheit in Darstellungsmatrizen

Lemma 34.46 *endlich-dimensionales*

Es sei (V, γ) ein Euklidischer Raum mit Basis B_V .

Weiter seien $f \in \text{End}(V)$ und

- $M := \mathcal{M}_{B_V^*}^{B_V}(\gamma)$
- $A = \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f)$

Dann sind äquivalent:

- 1 f ist γ -selbstadjungiert.
- 2 Die Darstellungsmatrix A erfüllt $\underbrace{M^{-1}A^T M}_{A^o} = \underbrace{A}_A$.

Sonderfall in der Literatur:

$M = I$, d.h. B_V ist eine ONB.

Normalität in Darstellungsmatrizen

Lemma 34.47

endlich dimensionales

Es sei (V, γ) ein Euklidischer Raum mit Basis B_V .

Weiter seien $f \in \text{End}(V)$ und

- $M := \mathcal{M}_{B_V^*}^{B_V}(\gamma)$

- $A = \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f)$

Dann sind äquivalent:

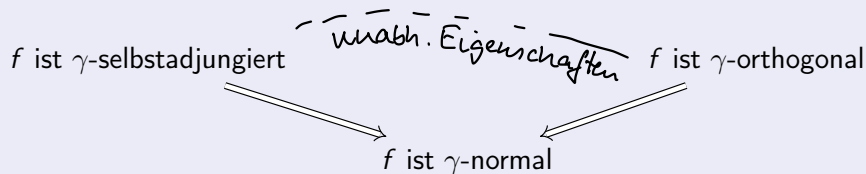
① ~~f ist γ -selbstadjungiert.~~ *γ -normal*

② Die Darstellungsmatrix A erfüllt $\underbrace{A M^{-1} A^T M}_{A^{\circ}} = \underbrace{M^{-1} A^T M A}_{A^{\circ}}$.

Orthogonalität, Selbstadjungiertheit, Normalität

Lemma 34.48

Es sei (V, γ) ein endlich-dimensionaler Euklidischer Raum.
Weiter sei $f \in \text{End}(V)$. Dann gilt:



Beispiel 34.49

- ① Die Drehabbildung, dargestellt durch

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

bzgl. der Standardbasis, ist I -orthogonal (Beispiel 34.33).

Also ist A auch γ_I -normal.

Im Allgemeinen ist A aber nicht γ_I -selbstadjungiert, denn

$$I^{-1} A^T I = \overbrace{\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}}^{A^0 \hat{=} \text{Drehung um } (-\alpha)} \neq \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} = A$$

außer im Fall $\sin(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ oder $\alpha = \pi$

Beispiel 34.49

- ② Die Spiegelungsabbildung, dargestellt durch

$$A = \begin{bmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$



bzgl. der Standardbasis, ist I -orthogonal (Beispiel 34.33).

Also ist A auch γ_I -normal.

Darüber hinaus ist A auch γ_I -selbstadjungiert, denn

$$A^0 = I^{-1} A^T I = \begin{bmatrix} c & s \\ s & -c \end{bmatrix} = A$$

Normale Endomorphismen induzieren Zerlegungen

orthogonale direkte

Folgerung 34.50

Es sei (V, γ) ein endlich-dimensionaler Euklidischer Raum.

Weiter sei $f \in \text{End}(V)$ γ -normal.

Dann gilt:

$$\text{Kern}(f^\circ) = \text{Kern}(f)$$

$$\text{Bild}(f^\circ) = \text{Bild}(f)$$

und daher

$$V = \text{Kern}(f) \oplus \text{Bild}(f)$$

$$V = \text{Kern}(f^\circ) \oplus \text{Bild}(f^\circ)$$

} identische
Zerlegungen

Eigenvektoren selbstadjungierter Endomorphismen

Lemma 34.51

Es sei (V, γ) ein Euklidischer Raum und $f \in \text{End}(V)$ γ -selbstadjungiert.

Sind $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ verschiedene Eigenwerte von f mit Eigenvektoren v_1 bzw. v_2 , dann sind (v_1, v_2) γ -orthogonal.

Beweis.

$$\begin{aligned}\lambda_1 \gamma(v_1, v_2) &= \gamma(\lambda_1 v_1, v_2) \\ &= \gamma(f(v_1), v_2) \\ &= \gamma(v_1, f(v_2)) \quad \text{wegen } f=f^{\circ} \\ &= \gamma(v_1, \lambda_2 v_2) \\ &= \lambda_2 \gamma(v_1, v_2)\end{aligned}$$

$\Rightarrow \gamma(v_1, v_2) = 0.$

Invariante Unterräume selbstadjungierter Endomorphismen

Lemma 34.52

Es sei (V, γ) ein Euklidischer Raum und $f \in \text{End}(V)$ γ -selbstadjungiert.

Ist $U \subseteq V$ ein f -invarianter Unterraum, dann ist auch U^\perp ein f -invarianter Unterraum.

Beweis. Übung

Wichtig für die Herleitung von Normalformen von Endomorphismen: Finde f -invariante UR, sodass ein dazu komplementäres UR wieder f -invariant ist.

Einheitssphäre, Rayleigh-Quotient

Definition 34.53

Es sei (V, γ) ein (endlich-dimensionaler) Euklidischer Raum.

- ① Die Menge

$$S(V, \gamma) := \{v \in V \mid \|v\|_\gamma = 1\}$$

Einheitskugel, -ball
bei „ ≤ 1 “

heißt die **Einheitssphäre** des Raumes (V, γ) .

- ② Für $f \in \text{End}(V)$ γ -selbstadjungiert heißt die Funktion

$$R_{f, \gamma} : V \setminus \{0\} \ni v \mapsto \frac{\gamma(v, f(v))}{\|v\|_\gamma^2} \in \mathbb{R}$$

der **Rayleigh-Quotient** von f .

$$R_{f, \gamma}(\alpha v) = R_{f, \gamma}(v) \quad \forall \alpha \neq 0 \quad 0\text{-homogen}$$

Maximum des Rayleigh-Quotienten

Satz 34.54

Es sei (V, γ) ein Euklidischer Raum mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}$.
Weiter sei $f \in \text{End}(V)$ γ -selbstadjungiert. Dann gilt:

- Der Rayleigh-Quotient ist auf $V \setminus \{0\}$ nach oben beschränkt und nimmt sein Supremum als Maximum an.

Beweis. $\{ R_{f, \gamma}(v) \mid v \in \underbrace{S(V, \gamma)}_{\substack{\text{kompakt} \\ (\text{abg.} + \text{beschränkt})}} \} = \{ R_{f, \gamma}(v) \mid v \in V \setminus \{0\} \}$
0-Homogenität

Satz von Weierstraß: Jede stetige Funktion nimmt auf einer kompakten Menge ihr Supremum als Maximum an.

$R_{f, \gamma}$ ist stetig auf $V \setminus \{0\}$: In Koordinaten!

$$\frac{x^T A x}{x^T M x}$$

Maximum des Rayleigh-Quotienten

Satz 34.54

Es sei (V, γ) ein Euklidischer Raum mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}$.

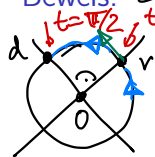
Weiter sei $f \in \text{End}(V)$ γ -selbstadjungiert. Dann gilt:

- ② Das Maximum $m := \max\{R_{f,\gamma}(v) \mid v \in V \setminus \{0\}\}$ ist der größte Eigenwert von f . Die Maximierer sind genau die Eigenvektoren:

$$\{v \in V \setminus \{0\} \mid R_{f,\gamma}(v) = m\} = \text{Eig}(f, m) \setminus \{0\}.$$

Beweis.

Es sei $v \in S(V, \gamma)$ ein Maximierer von $R_{f,\gamma}$.



$$u(0) = v$$

$$\dot{u}(0) = d$$

$$u(t) = \cos(t)v + \sin(t)d, \quad d \in v^\perp \cap S(V, \gamma)$$

$r(t) := R_{f,\gamma}(u(t))$ ist maximal bei $t=0$.

$$\dot{r}(t) = 2\gamma(f(\dot{u}(t)), u(t))$$

$$0 = \dot{r}(0) = 2\gamma(f(d), v), \text{ also } f(d) \in v^\perp$$

v^\perp ist f -invariant $\Rightarrow \langle v \rangle = v^\perp$ ist f -invariant
d.h. v ist EV. ... zum EW m .

Spektralsatz für γ -selbstadjungierte Endomorphismen

geht nicht ohne reelle Analysis

Satz 34.55

Es sei (V, γ) ein endlich-dimensionaler Euklidischer Raum.

Für $f \in \text{End}(V)$ sind äquivalent:

- 1 f ist γ -selbstadjungiert.
- 2 f ist diagonalisierbar, und es gibt es Basis aus Eigenvektoren von f , die γ -orthonormal ist.

Beweis. ① \rightarrow ② $\dim(V) = 0 \checkmark$ Induktion $n = \dim(V)$.

$m := \max \{ \rho_{f, \gamma}(v) \mid v \in V \setminus \{0\} \}$ ist ein EW.

$\Rightarrow V = \text{Eig}(f, m) \oplus \underline{\text{Eig}(f, m)^\perp} =: U$ \leftarrow wieder f -invariant

nach Ind. vor: $f|_U$ ist orthogonal diagonalisierbar.

Spektralsatz für γ -selbstadjungierte Endomorphismen

Satz 34.55

Es sei (V, γ) ein endlich-dimensionaler Euklidischer Raum.

Für $f \in \text{End}(V)$ sind äquivalent:

- 1 f ist γ -selbstadjungiert.
- 2 f ist diagonalisierbar, und es gibt es Basis aus Eigenvektoren von f , die γ -orthonormal ist. „ f ist orthogonal diagonalisierbar“

Beweis. ② \rightarrow ① B_V sei γ -orthonormale Eigenbasis

$\Rightarrow D = M_{B_V}^{B_V}(f)$ ist diagonal

$$M = M_{B_V}^{B_V}(\gamma) = I$$

$$D^0 = M^{-1} D^T M = I^{-1} D^T I = D^T = D \quad \leftarrow \text{diagonal}$$

$\Rightarrow f$ ist γ -selbstadjungiert.

Bemerkung 34.56

- 1 Besonderheit der γ -orthogonalen Diagonalisierbarkeit eines Endomorphismus auf V :

Es existiert eine Basis aus Eigenvektoren, die **alle** auch über die Eigenräume hinweg paarweise orthogonal gewählt werden können.

- 2 Zu einem diagonalisierbaren Endomorphismus mit Eigenvektorbasis $B_V = (v_1, \dots, v_n)$ können wir ein Innenprodukt γ auf V so wählen, dass f γ -orthogonal diagonalisierbar ist:

$$\gamma(v_i, v_j) := \delta_{ij} \quad \rightarrow \quad \mathcal{M}_{\mathbb{R}^n}^{\mathcal{B}_V}(\gamma) = I$$

Spektralsatz für M -selbstadjungierte Matrizen

Folgerung 34.57

Innenprodukt

Es sei (\mathbb{R}^n, γ_M) ein Euklidischer Raum, also $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit. Weiter sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann sind äquivalent:

- 1 A ist M -selbstadjungiert, erfüllt also $M^{-1}A^T M = A$.
- 2 A ist diagonalisierbar, und es gibt eine Basis (v_1, \dots, v_n) aus Eigenvektoren von A , die M -orthonormal ist.

$$V = [v_1, \dots, v_n] = [|||] \quad \text{Eigenvektoren}$$

$$A V = V \Lambda \quad \text{mit} \quad V^T M V = I$$

$$\boxed{} ||| = ||| \overbrace{()}^{\lambda}$$

Eigenwerte

Innenprodukte in komplexen Vektorräumen?

- 1 \mathbb{C} ist kein geordneter Körper.

Wir könnten aber fordern: $f(x,x) \in \mathbb{R}$
und $f(x,x) > 0 \ \forall x \neq 0$

- 2 Es ist aber

$$\gamma(ix, ix) = i^2 f(x, x) = -f(x, x)$$

- 3 Fazit: Innenprodukte in komplexen Vektorräumen können nicht mit Hilfe von Bilinearformen definiert werden!

Definition 35.1

Es seien V, W komplexe Vektorräume.

- ① Eine Abbildung $f: V \rightarrow W$ heißt **antilinear** oder **konjugiert linear**, wenn gilt:

$$f(u + v) = f(u) + f(v) \quad \text{für alle } u, v \in V, \quad \textit{additiv}$$

$$f(\alpha u) = \bar{\alpha} f(u) \quad \text{für alle } u \in V \text{ und alle } \alpha \in \mathbb{C}.$$

konj. komplexe Zahl *antihomogen, konj. hom.*

- ② Antilineare Abbildungen werden auch als **antilineare Homomorphismen** bezeichnet.

*antihom(V, W), ebenfalls für Endo-, Iso-,
Automorphismen*

Beispiel 35.2

- ① Die komponentenweise komplexe Konjugation in \mathbb{C}^n , $n \in \mathbb{N}_0$, also

$$\mathbb{C}^n \ni \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \overline{v_1} \\ \vdots \\ \overline{v_n} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n,$$

ist eine antilineare Abbildung.

- ② Für $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ ist die Matrix-Vektor-Multiplikation mit dem komplex konjugierten Vektor

$$\mathbb{C}^m \ni z \mapsto A\bar{z} \in \mathbb{C}^n$$

eine antilineare Abbildung.

Darstellungssatz für antilineare Abbildungen

Satz 35.3

Es seien V, W zwei endlich-dimensionale komplexe Vektorräume mit Basen $B_V = (v_1, \dots, v_m)$ und $B_W = (w_1, \dots, w_n)$.

Dann gibt es zu jeder antilinearen Abbildung $f: V \rightarrow W$ eine eindeutig definierte **Darstellungsmatrix** $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ mit der Eigenschaft

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} w_i \quad \text{für alle } j = 1, \dots, m.$$

*identisch wie bei
linearen
Abb. !*

$$v = \sum_{j=1}^m \alpha_j v_j \quad \Rightarrow \quad f(v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} \alpha_j w_i, \quad \text{wenn } f \text{ linear ist}$$

A\alpha

$$v = \sum_{j=1}^m \alpha_j v_j \quad \Rightarrow \quad f(v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} \overline{\alpha_j} w_i, \quad \text{wenn } f \text{ antilinear ist}$$

A\bar{\alpha}

Ersatz für Bilinearformen

Definition 35.4

Es sei V ein komplexer Vektorraum.

- 1 Eine Abbildung $\theta: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ heißt eine **Sesquilinearform auf V** , wenn θ im ersten Argument antilinear und im zweiten Argument linear ist:

$$\theta(\alpha u + \beta v, w) = \bar{\alpha} \theta(u, w) + \bar{\beta} \theta(v, w)$$

$$\theta(u, \alpha v + \beta w) = \alpha \theta(u, v) + \beta \theta(u, w)$$

- 2 Die Menge aller Sesquilinearformen $V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ bezeichnen wir mit $\text{Sesq}(V, V)$.

Definition 35.4

Es sei V ein komplexer Vektorraum.

- ③ Eine Sesquilinearform heißt *analog zu symm./schief-symm.*

hermitesch im Fall $\theta(u, v) = \overline{\theta(v, u)}$ für alle $u, v \in V$

schiefhermitesch im Fall $\theta(u, v) = -\overline{\theta(v, u)}$ für alle $u, v \in V$

- ④ Die Menge aller hermiteschen Sesquilinearformen $V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ bezeichnen wir mit $\text{Sesq}_{\text{herm}}(V, V)$ und die der schiefhermiteschen Sesquilinearformen mit $\text{Sesq}_{\text{skew}}(V, V)$.

- ⑤ Zwei Vektoren $u, v \in V$ heißen **orthogonal bzgl. der hermiteschen Sesquilinearform θ** , wenn $\theta(u, v) = 0$ gilt.

$$u \perp v \quad \text{oder} \quad u \perp_{\theta} v$$

Hermitesche Sesquilinearformen sind auf der Diagonale reell

Lemma 35.5

Es sei V ein komplexer Vektorraum.

Für $\theta \in \text{Sesq}(V, V)$ sind äquivalent:

- 1 θ ist hermitesch.
- 2 $\theta(v, v) \in \mathbb{R}$ für alle $v \in V$.

Definitheit und Indefinitheit von Sesquilinearformen

Definition 35.6

Im reellen Fall brauchen wir die Symm. nicht!

Es sei V ein komplexer Vektorraum. Eine (notwendigerweise hermitesche) Sesquilinearform θ auf V heißt

- 1 **positiv definit**, wenn $\theta(v, v) > 0$ gilt für alle $v \in V \setminus \{0\}$
- 2 **positiv semidefinit**, wenn $\theta(v, v) \geq 0$ gilt für alle $v \in V$
- 3 **negativ definit**, wenn $\theta(v, v) < 0$ gilt für alle $v \in V \setminus \{0\}$
- 4 **negativ semidefinit**, wenn $\theta(v, v) \leq 0$ gilt für alle $v \in V$
- 5 **indefinit**, wenn θ weder positiv semidefinit noch negativ semidefinit ist, wenn es also Vektoren $v_1, v_2 \in V$ gibt mit $\theta(v_1, v_1) > 0$ und $\theta(v_2, v_2) < 0$

Innenprodukt, unitärer Raum

Definition 35.7

Es sei V ein komplexer Vektorraum.

Die **hermitesche** Sesquilinearform $\theta \in \text{Sesq}(V, V)$ heißt ein **Innenprodukt auf V** , wenn θ **positiv definit** ist.

In diesem Fall heißt (V, θ) auch ein **komplexer Innenproduktraum** oder ein **unitärer Raum**.

- θ sesquilinear
- $\theta(u, v) = \overline{\theta(v, u)}$
- $\theta(v, v) > 0 \quad \forall v \in V \setminus \{0\}$

Beispiel 35.8

- ① Die durch die Einheitsmatrix $I \in \mathbb{C}^{n \times n}$ induzierte Sesquilinearform

$$\theta_I: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \ni (x, y) \mapsto x^H y = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i \in \mathbb{C}$$

konjugiert transponiert

heißt das **Standardinnenprodukt** auf \mathbb{C}^n .

- ② Im Vektorraum $\mathbb{C}^{n \times m}$ ist

$$n, m \in \mathbb{N}_0$$

$$\theta(A, B) := \text{trace}(A^H B)$$

ein Innenprodukt, genannt das **Frobenius-Innenprodukt**.

Darstellungsmatrix einer Sesquilinearform

Definition 35.9

Es sei V ein endlich-dimensionaler komplexer Vektorraum mit Basis $B_V = (v_1, \dots, v_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei $\theta \in \text{Sesq}(V, V)$.

Die Matrix

$$A = \mathcal{M}_{B_V^*}^{B_V}(\theta) = (\theta(v_i, v_j))_{i,j=1}^n \in \mathbb{C}^{n \times n}$$


wie bei
Bilinear-
formen

heißt die **Darstellungsmatrix** der Sesquilinearform θ bzgl. der Basis B_V .

Antilinearität

$$\theta(u, v) = \alpha^H A \beta$$

↑ ↑
Koeff. α Koeff. β



Konjugiert transponierte Matrix

Definition 35.10

Es sei $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$, $n, m \in \mathbb{N}_0$.

Die **konjugiert transponierte Matrix** oder **hermitesch transponierte Matrix** zu $A = (a_{ij})$ ist die Matrix mit den Einträgen $\overline{a_{ji}}$.

Wir bezeichnen sie mit $\overline{A^T}$ oder kurz: $A^H \in \mathbb{C}^{m \times n}$.

$$\approx (A^T)$$

Rechenregeln für die konjugierte Transposition

Lemma 35.11

Für $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ und $C \in \mathbb{C}^{m \times \ell}$, $n, m, \ell \in \mathbb{N}_0$, und $\alpha \in \mathbb{C}$ gelten die folgenden Eigenschaften:

$$\begin{array}{ll} (A^H)^H = A & \text{involutorisch} \\ (A + B)^H = A^H + B^H & \text{additiv} \\ (\alpha A)^H = \bar{\alpha} A^H & \text{antihomogen} \\ (AC)^H = C^H A^H & \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}} \right\} \text{antilinear}$$

Hermitesche und schiefhermitesche Matrizen

Definition 35.12

Es $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

- 1 A heißt **hermitesch**, wenn $A = A^H$ gilt.
- 2 A heißt **antihermitesch** oder **schiefhermitesch**, wenn $A = -A^H$ gilt.

Die Menge der hermiteschen bzw. schiefhermiteschen $n \times n$ -Matrizen bezeichnen wir mit $\mathbb{C}_{\text{herm}}^{n \times n}$ bzw. $\mathbb{C}_{\text{skew}}^{n \times n}$.

Beispiel 35.13

Für jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist die Abbildung

$$\theta_A: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \ni (x, y) \mapsto x^H A y \in \mathbb{C}$$

↳ von A induziert
eine Sesquilinearform auf \mathbb{C}^n .

$$\theta_A \text{ hermitisch} \Leftrightarrow A \text{ hermitisch}$$

A ist die Darstellungsmatrix von θ_A bzgl. der Standardbasis (e_1, \dots, e_n) von \mathbb{C}^n .

Transform. der Darstellungsmatrix einer Sesquilinearform

Satz 35.14

Es sei V ein endlich-dimensionaler komplexer Vektorraum. Weiter seien B_V und \widehat{B}_V Basen von V .

Dann gilt für die Darstellungsmatrix einer Sesquilinearform $\theta: V \times V \rightarrow K$:

$$\mathcal{M}_{\widehat{B}_V^*}^{\widehat{B}_V}(\theta) = \overline{T_{\widehat{B}_V^*}^{B_V^*}} \mathcal{M}_{B_V^*}^{B_V}(\theta) T_{B_V}^{\widehat{B}_V}.$$

$$\widehat{A} = T^{-H} A T^{-1}$$

Hermitesche Kongruenztransformation

Definition 35.15

Zwei Matrizen $A, \hat{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \in \mathbb{N}_0$, heißen **hermitesch kongruent**, wenn es eine invertierbare Matrix $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gibt, sodass gilt:

$$\hat{A} = T^{-H} A T^{-1}.$$

Der Übergang von A zu $T^{-H} A T^{-1}$ heißt auch eine **hermitesche Kongruenztransformation** von A .

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Satz 35.17

Es sei (V, θ) ein unitärer Raum. Dann gilt:

$$\theta(u, v) \overline{\theta(u, v)} = |\theta(u, v)|^2 \leq \theta(u, u) \theta(v, v)$$

für alle $u, v \in V$. *oder* $|\theta(u, v)| \leq \sqrt{\theta(u, u)} \sqrt{\theta(v, v)}$

Gleichheit gilt genau dann, wenn (u, v) linear abhängig ist.

Norm auf einem komplexen Vektorraum

Definition 35.18

Es sei V ein Vektorraum über \mathbb{C} .

① Eine Abbildung $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}$ heißt eine **Norm auf V** , wenn gilt:

$$\begin{array}{ll} \|u\| \geq 0 \quad \text{und} \quad \|u\| = 0 \Rightarrow u = 0 & \text{positive Definitheit} \\ \|\alpha u\| = |\alpha| \|u\| & \text{absolute Homogenität} \\ \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| & \text{Dreiecksungleichung} \end{array}$$

für alle $u, v \in V$ und alle $\alpha \in \mathbb{C}$.

② Das Paar $(V, \|\cdot\|)$ heißt ein **normierter komplexer Vektorraum**.

Jedes Innenprodukt induziert eine Norm

Satz 35.19

Es sei (V, θ) ein unitärer Raum. Dann definiert

$$\|\cdot\|_\theta: V \ni u \mapsto \|u\|_\theta := \sqrt{\theta(u, u)} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

eine Norm auf V .

Jedes Innenprodukt induziert eine Norm

Beispiel 35.20

- 1 Das Standardinnenprodukt auf \mathbb{C}^n

$$\theta_I: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \ni (x, y) \mapsto x^H y = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i \in \mathbb{C}$$

induziert die Norm (hier quadriert)

$$\|x\|^2 := \sum_{i=1}^n \bar{x}_i x_i = \sum_{i=1}^n |x_i|^2,$$

die manchmal die **Standardnorm** auf \mathbb{C}^n genannt wird.

Jedes Innenprodukt induziert eine Norm

Beispiel 35.20

- ② Die vom Frobenius-Innenprodukt auf $\mathbb{C}^{n \times m}$

$$\theta(A, B) := \text{trace}(A^H B)$$

induzierte Norm ist (hier quadriert)

$$\|A\|_F^2 := \text{trace}(A^H A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \overline{a_{ij}} a_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |a_{ij}|^2,$$

genannt die **Frobenius-Norm** auf $\mathbb{C}^{n \times m}$.

Homomorphismen unitärer Räume

Definition 35.29

Es seien (V, θ_1) und (W, θ_2) zwei unitäre Räume.

Eine Abbildung $f: V \rightarrow W$ heißt **unitär** oder eine **(lineare) Isometrie bzgl. (θ_1, θ_2)** , wenn f ein Homomorphismus der unitären Räume $(V, \theta_1) \rightarrow (W, \theta_2)$ ist, wenn also gilt:

f ist linear

$$\theta_2(f(u), f(v)) = \theta_1(u, v) \quad \text{für alle } u, v \in V.$$

Statt **unitär bzgl. (θ_1, θ_2)** sagen wir auch kurz **(θ_1, θ_2) -unitär**.

Satz 35.30

Es seien (V, θ_1) und (W, θ_2) zwei unitäre Räume und $f \in \text{Hom}(V, W)$.
Dann sind äquivalent:

- 1 f ist (θ_1, θ_2) -unitär.
- 2 $\|f(v)\|_{\theta_2} = \|v\|_{\theta_1}$ für alle $v \in V$, d. h., f ist **längentreu**.
- 3 $\|f(v_1) - f(v_2)\|_{\theta_2} = \|v_1 - v_2\|_{\theta_1}$ für alle $v_1, v_2 \in V$, d. h., f ist **abstandstreu**.
- 4 Ist $(v_i)_{i \in I}$ eine orthonormale Familie in (V, θ_1) , dann ist auch $(f(v_i))_{i \in I}$ eine orthonormale Familie in (W, θ_2) .
- 5 Ist v ein Einheitsvektor in (V, θ_1) , dann ist $f(v)$ ein Einheitsvektor in (W, θ_2) .

Lemma 35.34

Es seien (V, θ_1) und (W, θ_2) zwei endlich-dimensionale unitäre Räume mit Basen B_V bzw. B_W . Weiter seien $f \in \text{Hom}(V, W)$ und

- $M_1 := \mathcal{M}_{B_V^*}^{B_V}(\theta_1)$
- $M_2 := \mathcal{M}_{B_W^*}^{B_W}(\theta_2)$
- $A = \mathcal{M}_{B_W}^{B_V}(f)$

Dann sind äquivalent:

- 1 f ist (θ_1, θ_2) -unitär.
- 2 Die Darstellungsmatrix A erfüllt $A^H M_2 A = M_1$.

Unitarität in Darstellungsmatrizen: Endomorphismen

Folgerung 35.35

Es sei (V, θ) ein endlich-dimensionaler unitärer Raum mit Basis B_V . Weiter seien $f \in \text{End}(V)$ und

$$\bullet M := \mathcal{M}_{B_V^*}^{B_V}(\theta) \qquad \bullet A = \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f)$$

Dann sind äquivalent:

- 1 f ist θ -unitär.
- 2 Die Darstellungsmatrix A erfüllt $A^H M A = M$.

Definition 35.36

- ① Es seien $m, n \in \mathbb{N}_0$, $M_1 \in \mathbb{C}^{m \times m}$ und $M_2 \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitesch und positiv definit.

Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ heißt (M_1, M_2) -**unitär** im Fall

$$A^H M_2 A = M_1.$$

- ② Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitesch und positiv definit.

Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^n$ heißt M -**unitär** im Fall

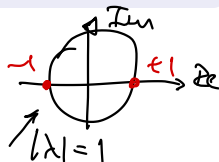
$$A^H M A = M.$$

Eigenwerte unitärer Endomorphismen

Lemma 35.38

Es sei (V, θ) ein unitärer Raum.

Ist $f \in \text{End}(V)$ θ -unitär, dann gilt $|\lambda| = 1$ für alle $\lambda \in \Lambda(f)$.



Unitäre Endomorphismen bilden eine Gruppe

Lemma 35.39

Es sei (V, θ) ein **endlich-dimensionaler** unitärer Raum. Dann gilt:

- 1 Die θ -unitären Endomorphismen von (V, θ) bilden eine Gruppe bzgl. der Komposition, genannt die **unitäre Gruppe** des unitären Raumes (V, θ) :

$$U(V, \theta) := \{f \in \text{End}(V) \mid f \text{ ist } \theta\text{-unitär}\}.$$

- 2 Die θ -unitären Endomorphismen $f \in U(V, \theta)$ mit $\det(f) = 1$ bilden einen Normalteiler von $U(V, \theta)$, genannt die **spezielle unitäre Gruppe** des unitären Raumes (V, θ) :

$$SU(V, \theta) := \{f \in U(V, \theta) \mid \det(f) = 1\}.$$

Unitäre (Darstellungs)matrizen bilden eine Gruppe

Folgerung 35.40

Es sei $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitesch und positiv definit. Dann gilt

- 1 Die M -unitären Matrizen in $\mathbb{C}^{n \times n}$ bilden eine Gruppe bzgl. der Matrix-Multiplikation, genannt die **unitäre Gruppe** des ~~Euklidischen~~ Raumes (\mathbb{C}^n, γ_M) :

unitären

$$U(\mathbb{C}^n, \gamma_M) := \{A \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid A \text{ ist } M\text{-unitär}\}.$$

- 2 Die M -unitären Matrizen $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit $\det(A) = 1$ bilden einen Normalteiler von $U(\mathbb{C}^n, \gamma_M)$, genannt die **spezielle unitäre Gruppe** des ~~Euklidischen~~ Raumes (\mathbb{C}^n, γ_M) :

$$SU(\mathbb{C}^n, \gamma_M) := \{A \in U(\mathbb{C}^n, \gamma_M) \mid \det(A) = 1\}.$$

Darstellungssatz von Riesz

Satz 35.42

unitär

Es sei (V, θ) ein endlich-dimensionaler ~~Euklidischer~~ Raum.

Dann ist **Riesz-Isomorphismus von V nach V^***

$$\Theta: V \ni u \mapsto \theta(u, \cdot) \in V^*$$

ein **antilinear** Isomorphismus.

Wird V^* mit dem Innenprodukt θ^{-1} ausgestattet, dann ist $\Theta: (V, \theta) \rightarrow (V^*, \theta^{-1})$ eine bijektive Isometrie. Es gilt

$$\theta(u, v) = \langle \Theta(u), v \rangle = \overline{\langle \Theta(v), u \rangle} = \theta^{-1}(\Theta(u), \Theta(v))$$

für alle $u, v \in V$.

Rieszscher Darstellungssatz für (\mathbb{C}^n, θ_M)

Folgerung 35.44

Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitesch und positiv definit.

Dann ist die Abbildung

$$\Theta: \mathbb{C}^n \ni x \mapsto \underbrace{(M x^H)^T}_{\text{wavy}} = M^T \bar{x} \in (\mathbb{C}^n)^*$$

eine bijektive antilineare Isometrie der ~~Euklidischen~~ Räume (\mathbb{C}^n, θ_M) und $((\mathbb{C}^n)^*, \theta_{M^{-1}})$.
unitären

Es gilt

$$x^H M y = (x^H M) y = \overline{(y^H M) x} = (x^H M) M^{-1} (M y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{C}^n$.

Adjungierter Homomorphismus

Definition 35.47

Es seien (V, θ_1) und (W, θ_2) zwei **endlich-dimensionale** unitäre Räume. Weiter sei $f \in \text{Hom}(V, W)$ eine lineare Abbildung. Dann heißt

$$f^\circ := \Theta_{V \rightarrow V^*}^{-1} \circ f^* \circ \Theta_{W \rightarrow W^*} : W \rightarrow V$$

der zu f (θ_1, θ_2) -**adjungierte Homomorphismus**.

Die Definition lautet ausgeschrieben:

$$\theta_2(w, f(v)) = \theta_1(f^\circ(w), v)$$

$$\begin{array}{ccc} (V, \theta_1) & \xleftarrow[f^\circ]{\text{linear}} & (W, \theta_2) \\ \text{antilinear } \Theta_{V \rightarrow V^*} \downarrow & \uparrow & \downarrow \Theta_{W \rightarrow W^*} \text{ antilinear} \\ (V^*, \theta_1^{-1}) & \xleftarrow[f^*]{\text{linear}} & (W^*, \theta_2^{-1}) \end{array}$$

Darstellungsmatrizen adjungierter Homomorphismen

Satz 35.49

Es seien (V, θ_1) und (W, θ_2) zwei endlich-dimensionale unitäre Räume mit Basen B_V und B_W . Weiter seien $f \in \text{Hom}(V, W)$ und

- $M_1 := \mathcal{M}_{B_V^*}^{B_V}(\theta_1)$
- $A = \mathcal{M}_{B_W}^{B_V}(f)$
- $M_2 := \mathcal{M}_{B_W^*}^{B_W}(\theta_2)$

Dann gilt für die Darstellungsmatrix von $f^\circ \in \text{Hom}(W, V)$

$$A^\circ := \mathcal{M}_{B_V}^{B_W}(f^\circ) = M_1^{-1} A^H M_2$$


Statt A^T wegen
der Antilinearität

Selbstadjungierte und normale Endomorphismen

Definition 35.53

Es sei (V, θ) ein unitärer Raum.

- 1 $f \in \text{End}(V)$ heißt θ -selbstadjungiert, wenn $f = f^\circ$ gilt.
- 2 $f \in \text{End}(V)$ heißt θ -normal, wenn $f \circ f^\circ = f^\circ \circ f$ gilt.

Selbstadjungiertheit in Darstellungsmatrizen

Lemma 35.54

Es sei (V, θ) ein unitärer Raum mit Basis B_V .

Weiter seien $f \in \text{End}(V)$ und

- $M := \mathcal{M}_{B_V^*}^{B_V}(f)$
- $A = \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f)$

Dann sind äquivalent:

- 1 f ist θ -selbstadjungiert.
- 2 Die Darstellungsmatrix A erfüllt $\underbrace{M^{-1} A^H}_{A^0} \underbrace{M}_{A} = A$.

Normalität in Darstellungsmatrizen

Lemma 35.55

Es sei (V, θ) ein unitärer Raum mit Basis B_V .

Weiter seien $f \in \text{End}(V)$ und

$$\bullet M := \mathcal{M}_{B_V^*}^{B_V}(f)$$

$$\bullet A = \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f)$$

Dann sind äquivalent:

① f ist θ -normal.

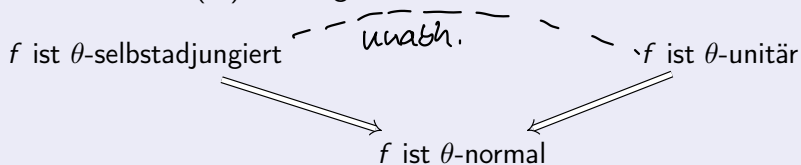
② Die Darstellungsmatrix A erfüllt $A \underbrace{M^{-1}A^H M}_{A \ A^0} = \underbrace{M^{-1}A^H M A}_{A^0 \ A}$.

Unitarität, Selbstadjungiertheit, Normalität

Lemma 35.56

Es sei (V, θ) ein endlich-dimensionaler unitärer Raum.

Weiter sei $f \in \text{End}(V)$. Dann gilt:



Normale Endomorphismen induzieren Zerlegungen

orthogonale direkte

Folgerung 35.57

Es sei (V, γ) ein endlich-dimensionaler unitärer Raum.

Weiter sei $f \in \text{End}(V)$ γ -normal.

Dann gilt:

$$\text{Kern}(f^\circ) = \text{Kern}(f)$$

$$\text{Bild}(f^\circ) = \text{Bild}(f)$$

und daher

$$V = \text{Kern}(f) \oplus \text{Bild}(f)$$

$$V = \text{Kern}(f^\circ) \oplus \text{Bild}(f^\circ)$$

Eigenwerte normaler Endomorphismen

Lemma 35.59

Es sei (V, θ) ein endlich-dimensionaler unitärer Raum.

Weiter sei $f \in \text{End}(V)$ θ -normal sowie $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

① $\lambda \text{id}_V - f$ ist ebenfalls θ -normal.

② $\text{Eig}(f, \lambda) = \text{Eig}(f^\circ, \bar{\lambda})$. gleiche EV; EW sind komplex konjugiert zueinander.

Insbesondere ist $\lambda \in \mathbb{C}$ genau dann ein Eigenwert von f , wenn $\bar{\lambda}$ ein Eigenwert von f° ist.

Spektralsatz für θ -normale Endomorphismen

In Eukl. Räumen brauchen wir sogar die θ -Selbstadjungtheit

Satz 35.60

Es sei (V, θ) ein endlich-dimensionaler unitärer Raum.

Für $f \in \text{End}(V)$ sind äquivalent:

- 1 f ist θ -normal.
- 2 f ist diagonalisierbar, und es gibt es Basis aus Eigenvektoren von f , die θ -orthonormal ist.
(Wir nennen f dann **θ -orthogonal diagonalisierbar.**)

Spektralsatz für M -normale Matrizen

Folgerung 35.62

Es sei (\mathbb{C}^n, θ_M) ein unitärer Raum, also $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitesch und positiv definit. Weiter sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Dann sind äquivalent:

- 1 A ist M -normal, erfüllt also $M^{-1}A^H M = A$.
- 2 A ist diagonalisierbar, und es gibt eine Basis (v_1, \dots, v_n) aus Eigenvektoren von A , die M -orthonormal ist. *Wm \mathbb{C}^n*

Es gibt also eine invertierbare Matrix $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$, sodass $V^H M V = I$ gilt und

$$AV = V\Lambda$$

mit der Diagonalmatrix $\Lambda \in \mathbb{C}^{n \times n}$ der Eigenwerte von A und zugehörigen M -orthonormalen Eigenvektoren $V = [v_1 \ \cdots \ v_n]$.