

Lineare Algebra II

Woche 12

01.07.2024 und 02.07.2024

Nachtrag: positive Definitheit impliziert Invertierbarkeit

Lemma 34.6 (Version für Matrizen)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ eine (nicht notwendig symmetrische) positiv definite Matrix.

Dann ist A invertierbar, und die inverse Matrix A^{-1} ist wieder positiv definit.

Beweis.

Definition 34.20

Es seien (V, γ_1) und (W, γ_2) zwei Euklidische Räume.

Eine Abbildung $f: V \rightarrow W$ heißt **orthogonal** oder eine **(lineare) Isometrie bzgl. (γ_1, γ_2)** , wenn f ein Homomorphismus der quadratischen Räume $(V, \gamma_1) \rightarrow (W, \gamma_2)$ ist, wenn also gilt:

Satz 34.21

Es seien (V, γ_1) und (W, γ_2) zwei Euklidische Räume und $f \in \text{Hom}(V, W)$. Dann sind äquivalent:

- 1 f ist (γ_1, γ_2) -orthogonal.
- 2 $\|f(v)\|_{\gamma_2} = \|v\|_{\gamma_1}$ für alle $v \in V$.
- 3 $\|f(v_1) - f(v_2)\|_{\gamma_2} = \|v_1 - v_2\|_{\gamma_1}$ für alle $v_1, v_2 \in V$.
- 4 Ist $(v_i)_{i \in I}$ eine orthonormale Familie in (V, γ_1) , dann ist auch $(f(v_i))_{i \in I}$ eine orthonormale Familie in (W, γ_2) .
- 5 Ist v ein Einheitsvektor in (V, γ_1) , dann ist $f(v)$ ein Einheitsvektor in (W, γ_2) .

Orthogonale Abbildungen sind injektiv

Lemma 34.22

Es seien (V, γ_1) und (W, γ_2) zwei Euklidische Räume.

- 1 Ist $f \in \text{Hom}(V, W)$ eine (γ_1, γ_2) -orthogonale Abbildung, dann ist f injektiv.
- 2 Gilt zusätzlich $\dim(V) = \dim(W) = n \in \mathbb{N}_0$, dann ist f bijektiv und f^{-1} ebenfalls eine bijektive orthogonale Abbildung.

Beweis. Übung

Lemma 34.23

Es seien (U, γ_1) und (V, γ_2) , (W, γ_3) Euklidische Räume. Sind

- $g: U \rightarrow V$ eine (γ_1, γ_2) -orthogonale Abbildung und
- $f: V \rightarrow W$ eine (γ_2, γ_3) -orthogonale Abbildung,

dann ist $f \circ g: U \rightarrow W$ eine (γ_1, γ_3) -orthogonale Abbildung.

Bijektive Isometrie in den Koordinatenraum

Lemma 34.24

Es sei (V, γ) ein Euklidischer Raum mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei B_V eine Basis von V und $M := \mathcal{M}_{B_V^*}^{B_V}(\gamma)$ die Darstellungsmatrix von γ .

Dann ist die Abbildung

$$\Phi_{B_V} : (\mathbb{R}^n, \gamma_M) \rightarrow (V, \gamma)$$

eine bijektive Isometrie. Das heißt, für alle $u, v \in V$ gilt

Lemma 34.25

Es seien (V, γ_1) und (W, γ_2) zwei endlich-dimensionale Euklidische Räume mit Basen B_V bzw. B_W . Weiter seien $f \in \text{Hom}(V, W)$ und

- $M_1 := \mathcal{M}_{B_V^*}^{B_V}(\gamma_1)$
- $M_2 := \mathcal{M}_{B_W^*}^{B_W}(\gamma_2)$
- $A = \mathcal{M}_{B_W}^{B_V}(f)$

Dann sind äquivalent:

- 1 f ist (γ_1, γ_2) -orthogonal.
- 2 Die Darstellungsmatrix A erfüllt $A^T M_2 A = M_1$.

Beweis.

Folgerung 34.26

Es sei (V, γ) ein endlich-dimensionaler Euklidischer Raum mit Basis B_V .
Weiter seien $f \in \text{End}(V)$ und

$$\bullet M := \mathcal{M}_{B_V^*}^{B_V}(\gamma) \qquad \bullet A = \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f)$$

Dann sind äquivalent:

- 1 f ist γ -orthogonal.
- 2 Die Darstellungsmatrix A erfüllt $A^T M A = M$.

Definition 34.27

- ① Es seien $m, n \in \mathbb{N}_0$, $M_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und $M_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit.

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ heißt (M_1, M_2) -orthogonal im Fall

$$A^T M_2 A = M_1$$

- ② Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit.

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^n$ heißt M -orthogonal im Fall

$$A^T M A = M$$

Eigenwerte orthogonaler Endomorphismen

Lemma 34.29

Es sei (V, γ) ein Euklidischer Raum.

Ist $f \in \text{End}(V)$ γ -orthogonal, dann gilt $\Lambda(f) \subseteq \{\pm 1\}$.

Beweis.

Orthogonale Endomorphismen bilden eine Gruppe

Lemma 34.30

Es sei (V, γ) ein **endlich-dimensionaler** Euklidischer Raum. Dann gilt:

- 1 Die γ -orthogonalen Endomorphismen von (V, γ) bilden eine Gruppe bzgl. der Komposition, genannt die **orthogonale Gruppe** des Euklidischen Raumes (V, γ) :

$$O(V, \gamma) := \{f \in \text{End}(V) \mid f \text{ ist } \gamma\text{-orthogonal}\}.$$

- 2 Die γ -orthogonalen Endomorphismen $f \in O(V, \gamma)$ mit $\det(f) = 1$ bilden einen Normalteiler von $O(V, \gamma)$, genannt die **spezielle orthogonale Gruppe** des Euklidischen Raumes (V, γ) :

$$SO(V, \gamma) := \{f \in O(V, \gamma) \mid \det(f) = 1\}.$$

Beweis. Übung

Orthogonale (Darstellungs)matrizen bilden eine Gruppe

Folgerung 34.31

Es sei $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit. Dann gilt:

- 1 Die M -orthogonalen Matrizen in $\mathbb{R}^{n \times n}$ bilden eine Gruppe bzgl. der Matrix-Multiplikation, genannt die **orthogonale Gruppe** des Euklidischen Raumes (\mathbb{R}^n, γ_M) :

$$O(\mathbb{R}^n, \gamma_M) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A \text{ ist } M\text{-orthogonal}\}.$$

- 2 Die M -orthogonalen Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\det(A) = 1$ bilden einen Normalteiler von $O(\mathbb{R}^n, \gamma_M)$, genannt die **spezielle orthogonale Gruppe** des Euklidischen Raumes (\mathbb{R}^n, γ_M) :

$$SO(\mathbb{R}^n, \gamma_M) := \{A \in O(\mathbb{R}^n, \gamma_M) \mid \det(A) = 1\}.$$

Beispiel 34.33

- ① Die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

ist I -orthogonal, denn:

A ist aber nicht M -orthogonal bzgl. der Innenproduktmatrix

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ denn:}$$

- ② Die Drehabbildung, dargestellt durch

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

bzgl. der Standardbasis, ist I -orthogonal, denn:

- ③ Die Spiegelungsabbildung, dargestellt durch

$$A = \begin{bmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

bzgl. der Standardbasis, ist I -orthogonal, denn:

Motivation

- Zwischen einem Vektorraum V und seinem Dualraum V^* gibt es auch bei endlicher Dimension keinen *kanonischen* Isomorphismus.
- Wenn wir jedoch ein Innenprodukt in V gewählt haben, dann induziert dieses eine bevorzugte Wahl eines solchen Isomorphismus in $\Gamma \in \text{Hom}(V, V^*)$.
- Γ ist mit den Innenprodukten γ in V und γ^* in V^* kompatibel ist, also eine lineare Isometrie.
- Dieser Isomorphismus wird der **Riesz-Isomorphismus** des Euklidischen Raumes (V, γ) genannt.

Darstellungssatz von Riesz

Satz 34.34

Es sei (V, γ) ein endlich-dimensionaler Euklidischer Raum.

Dann ist die Abbildung $\Gamma: V \ni v \mapsto \gamma(\cdot, v) \in V^*$ ein Isomorphismus.

Wird V^* mit dem Innenprodukt γ^{-1} ausgestattet, dann ist $\Gamma: (V, \gamma) \rightarrow (V^*, \gamma^{-1})$ eine bijektive Isometrie. Es gilt

Rieszscher Darstellungssatz für (\mathbb{R}^n, γ_M)

Folgerung 34.36

Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit.

Dann ist die Abbildung

$$\Gamma: \mathbb{R}^n \ni x \mapsto Mx \in (\mathbb{R}^n)^*$$

eine bijektive Isometrie der Euklidischen Räume (\mathbb{R}^n, γ_M) und $((\mathbb{R}^n)^*, \gamma_{M^{-1}})$.

Es gilt

Satz 34.37

Es seien (V, γ_1) und (W, γ_2) zwei endlich-dimensionale Euklidische Räume **derselben Dimension** und $f \in \text{Hom}(V, W)$. Dann sind äquivalent:

- 1 f ist (γ_1, γ_2) -orthogonal.
- 2 f^* ist $(\gamma_2^{-1}, \gamma_1^{-1})$ -orthogonal.

Folgerung 34.38

Es sei (V, γ) ein endlich-dimensionaler Euklidischer Raum und $f \in \text{End}(V)$. Dann sind äquivalent:

- 1 f ist γ -orthogonal.
- 2 f^* ist γ^{-1} -orthogonal.

Adjungierter Homomorphismus

Definition 34.39

Es seien (V, γ_1) und (W, γ_2) zwei **endlich-dimensionale** Euklidische Räume. Weiter sei $f \in \text{Hom}(V, W)$ eine lineare Abbildung. Dann heißt

$$f^\circ := \Gamma_{V \rightarrow V^*}^{-1} \circ f^* \circ \Gamma_{W \rightarrow W^*} : W \rightarrow V$$

der zu f (γ_1, γ_2) -**adjungierte Homomorphismus**.

$$\begin{array}{ccc} (V, \gamma_1) & \xleftarrow{f^\circ} & (W, \gamma_2) \\ \Gamma_{V \rightarrow V^*} \downarrow & & \downarrow \Gamma_{W \rightarrow W^*} \\ (V^*, \gamma_1^{-1}) & \xleftarrow{f^*} & (W^*, \gamma_2^{-1}) \end{array}$$

Vergleich dualer und adjungierter Homomorphismen

Es sei $f \in \text{Hom}(V, W)$.

dualer Homomorphismus

- $f^* \in \text{Hom}(W^*, V^*)$
- keine Abhängigkeit von Innenprodukten

$$\langle w^*, f(v) \rangle_{W^*, W} = \langle f^*(w^*), v \rangle_{V^*, V}$$

adjungierter Homomorphismus

- $f^\circ \in \text{Hom}(W, V)$
- erfordert Innenprodukte in V und W

$$\gamma_2(w, f(v)) = \gamma_1(f^\circ(w), v)$$

Darstellungsmatrizen adjungierter Homomorphismen

Satz 34.41

Es seien (V, γ_1) und (W, γ_2) zwei endlich-dimensionale Euklidische Räume mit Basen B_V bzw. B_W . Weiter seien $f \in \text{Hom}(V, W)$ und

- $M_1 := \mathcal{M}_{B_V^*}^{B_V}(\gamma_1)$
- $A = \mathcal{M}_{B_W}^{B_V}(f)$
- $M_2 := \mathcal{M}_{B_W^*}^{B_W}(\gamma_2)$

Dann gilt für die Darstellungsmatrix von $f^\circ \in \text{Hom}(W, V)$

$$A^\circ := \mathcal{M}_{B_V}^{B_W}(f^\circ) = M_1^{-1} A^T M_2$$

Biadjungierte Abbildung

Lemma 34.42

Es seien (V, γ_1) und (W, γ_2) endlich-dimensionale Euklidische Räume.

Dann ist die (γ_1, γ_2) -biadjungierte Abbildung $f^{\circ\circ} := (f^\circ)^\circ$ identisch zu f , unabhängig von den Innenprodukten γ_1 und γ_2 .

Nochmal vier fundamentale Unterräume

Es seien (V, γ_1) und (W, γ_2) endlich-dimensionale Euklidische Räume und $f \in \text{Hom}(V, W)$.

Satz 21.36

$$\text{Bild}(f^*) = \text{Kern}(f)^0 \quad \text{in } V^*$$

$$\text{Kern}(f^*) = \text{Bild}(f)^0 \quad \text{in } W^*$$

$$\text{Bild}(f) = {}^0\text{Kern}(f^*) \quad \text{in } W$$

$$\text{Kern}(f) = {}^0\text{Bild}(f^*) \quad \text{in } V$$

Satz 34.43

$$\text{Bild}(f^\circ) = \text{Kern}(f)^\perp \quad \text{in } V$$

$$\text{Kern}(f^\circ) = \text{Bild}(f)^\perp \quad \text{in } W$$

$$\text{Bild}(f) = \text{Kern}(f^\circ)^\perp \quad \text{in } W$$

$$\text{Kern}(f) = \text{Bild}(f^\circ)^\perp \quad \text{in } V$$

Endomorphismen induzieren orthogonale direkte Summen

Folgerung 34.44

Es sei (V, γ) ein endlich-dimensionaler Euklidischer Raum.

Weiter sei $f \in \text{End}(V)$ mit γ -adjungierter Abbildung $f^\circ \in \text{End}(V)$.

Dann gilt:

$$V = \text{Kern}(f) \oplus \text{Bild}(f^\circ)$$

$$V = \text{Kern}(f^\circ) \oplus \text{Bild}(f)$$

Beweis.