Klausurrelevanz inkl. Woche 13

Übungsblatt 13 nicht zulassungsrelevant, keine Abgabe

letzte Vorlesung: Di, 16.07.2024 (Woche 14/1)

Lineare Algebra II

Woche 12

Erinnerung:

Alle Vektorräume in §34 sind reell ($K=\mathbb{R}$)

01.07.2024 und 02.07.2024

Euklidischer Raum := $\mathbb{R}$-Vektorraum mit IP

Nachtrag: positive Definitheit impliziert Invertierbarkeit

Lemma 34.6 (Version für Matrizen)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ eine (nicht notwendig symmetrische) positiv definite Matrix. $x^T A x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

Dann ist A invertierbar, und die inverse Matrix A^{-1} ist wieder positiv definit.

Beweis. Wenn A nicht invertierbar ist, dann ist A nicht injektiv, also ex. $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $Ax = 0$.

$\Rightarrow x^T A x = 0$, also ist A nicht positiv definit.

$$\xi^T A^{-1} \xi = (Ax)^T A^{-1} (Ax) = x^T A^T \underbrace{A^{-1} A}x = x^T A^T x = x^T A x > 0$$

$\xi \neq 0$ $\quad \xi \in (\mathbb{R}^n)^*$ $\quad x := A^{-1}\xi \neq 0$ $\quad \xi = Ax \neq 0$

vgl.: Homomorphismen von Vektorräumen heißen lineare Abbildungen.

Definition 34.20

Es seien (V, γ_1) und (W, γ_2) zwei Euklidische Räume.

Eine Abbildung $f\colon V \to W$ heißt **orthogonal** oder eine **(lineare) Isometrie bzgl.** (γ_1, γ_2), wenn f ein Homormophismus der quadratischen Räume $(V, \gamma_1) \to (W, \gamma_2)$ ist, wenn also gilt:
(Euklidischen)

- f ist linear
- $\gamma_2(f(u), f(v)) = \gamma_1(u, v) \quad \forall u, v \in V$
  (bedeutet: winkelerhaltend)

kurz: (γ_1, γ_2)-orthogonal

Charakterisierung orthogonaler Abbildungen

Satz 34.21

Es seien (V, γ_1) und (W, γ_2) zwei Euklidische Räume und $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$. Dann sind äquivalent:

1. f ist (γ_1, γ_2)-orthogonal.
2. $\|f(v)\|_{\gamma_2} = \|v\|_{\gamma_1}$ für alle $v \in V$. längentreu
3. $\|f(v_1) - f(v_2)\|_{\gamma_2} = \|v_1 - v_2\|_{\gamma_1}$ für alle $v_1, v_2 \in V$. abstandstreu (isometrisch)
4. Ist $(v_i)_{i \in I}$ eine orthonormale Familie in (V, γ_1), dann ist auch $(f(v_i))_{i \in I}$ eine orthonormale Familie in (W, γ_2). orthonormalitätserhaltend
5. Ist v ein Einheitsvektor in (V, γ_1), dann ist $f(v)$ ein Einheitsvektor in (W, γ_2).

Lemma 34.22

Es seien (V, γ_1) und (W, γ_2) zwei Euklidische Räume.

1. Ist $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ eine (γ_1, γ_2)-orthogonale Abbildung, dann ist f injektiv. Also notwendig $\dim(V) \le \dim(W)$ $\boxed{A}$
2. Gilt zusätzlich $\dim(V) = \dim(W) = n \in \mathbb{N}_0$, dann ist f bijektiv und f^{-1} ebenfalls eine bijektive orthogonale Abbildung.

Beweis. Übung

Komposition orthogonaler Abbildungen

Lemma 34.23

Es seien (U, γ_1) und (V, γ_2), (W, γ_3) Euklidische Räume. Sind

- $g\colon U \to V$ eine (γ_1, γ_2)-orthogonale Abbildung und
- $f\colon V \to W$ eine (γ_2, γ_3)-orthogonale Abbildung,

dann ist $f \circ g\colon U \to W$ eine (γ_1, γ_3)-orthogonale Abbildung.

$$\begin{tikzcd}
(W, \gamma_3) & (V, \gamma_2) \arrow[l, "f"'] & (U, \gamma_1) \arrow[l, "g"'] \arrow[ll, bend left, "f \circ g"]
\end{tikzcd}$$

Lemma 34.24

Es sei (V, γ) ein Euklidischer Raum mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei B_V eine Basis von V und $M := \mathcal{M}_{B_V^*}^{B_V}(\gamma)$ die Darstellungsmatrix von γ.

Dann ist die Abbildung

$$\Phi_{B_V} : (\mathbb{R}^n, \gamma_M) \to (V, \gamma)$$

$$\Phi_{B_V}(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \underbrace{v_i}_{\in B_V}$$

eine bijektive Isometrie. Das heißt, für alle $u, v \in V$ gilt

$$x^T M y = \gamma(u, v)$$

$$u = \Phi_{B_V}(x), \quad v = \Phi_{B_V}(y)$$

$\dim(V) = m \qquad \dim(W) = n$

Lemma 34.25

Es seien (V, γ_1) und (W, γ_2) zwei endlich-dimensionale Euklidische Räume mit Basen B_V bzw. B_W. Weiter seien $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ und

- $M_1 := \mathcal{M}^{B_V}_{B_V^*}(\gamma_1) \in \mathbb{R}^{m \times m}$
- $M_2 := \mathcal{M}^{B_W}_{B_W^*}(\gamma_2) \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- $A = \mathcal{M}^{B_V}_{B_W}(f) \in \mathbb{R}^{n \times m}$

m, n

$(T^{-T} A^T S^T)(S^{-T} M_2 S^{-1})(S A T^{-1}) = T^{-T} M_1 T^{-1}$

Dann sind äquivalent:

1. f ist (γ_1, γ_2)-orthogonal.
2. Die Darstellungsmatrix A erfüllt $\boxed{A^T M_2 A = M_1}$.

Beweis. $u = \Phi_{B_V}(x)\,, \quad v = \Phi_{B_V}(y)$

? $\gamma_1(u, v) = x^T M_1 y$

$\gamma_2(f(u), f(v)) = [Ax]^T M_2 [Ay] = x^T A^T M_2 A y$

Folgerung 34.26

Es sei (V, γ) ein endlich-dimensionaler Euklidischer Raum mit Basis B_V. Weiter seien $f \in \operatorname{End}(V)$ und

- $M := \mathcal{M}^{B_V}_{B_V^*}(\gamma) \in \mathbb{R}^{n}$
- $A = \mathcal{M}^{B_V}_{B_V}(f) \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Dann sind äquivalent:

1. f ist γ-orthogonal.
2. Die Darstellungsmatrix A erfüllt $A^\mathsf{T} M A = M$.

Literatur: Spezialfall $M = I$ (d.h. B_V ist ONB)

$$\underbrace{A^T}_{\hat{=}\operatorname{End}(V^*)} \; \underbrace{I}_{\hat{=}\operatorname{Hom}(V, V^*)} \; \underbrace{A}_{\hat{=}\operatorname{End}(V)} = \underbrace{I}_{\in \operatorname{Hom}(V, V^*)}$$

Definition 34.27

1. Es seien $m, n \in \mathbb{N}_0$, $M_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und $M_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit.

   Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ heißt **(M_1, M_2)-orthogonal** im Fall

   $$A^\mathsf{T} M_2 \, A = M_1$$

   $$\boxed{A^T} \boxed{M_2} \boxed{A} = \boxed{M_1}$$

2. Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit.

   Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n}$ heißt **M-orthogonal** im Fall

   $$A^\mathsf{T} M \, A = M$$

   $$\boxed{A^T} \boxed{M} \boxed{A} = \boxed{M}$$

Lemma 34.29

Es sei (V, γ) ein Euklidischer Raum.

Ist $f \in \operatorname{End}(V)$ γ-orthogonal, dann gilt $\Lambda(f) \subseteq \{\pm 1\}$.

Beweis. (λ, v) Eigenpaar von f

$$\underbrace{\|v\|}_{\neq 0} = \|f(v)\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \underbrace{\|v\|}_{\neq 0} \Rightarrow |\lambda| = 1.$$

Orthogonale Endomorphismen bilden eine Gruppe

Lemma 34.30

endlich-dimensionaler

Es sei (V, γ) ein Euklidischer Raum. Dann gilt:

1. Die γ-orthogonalen Endomorphismen von (V, γ) bilden eine Gruppe bzgl. der Komposition, genannt die **orthogonale Gruppe** des Euklidischen Raumes (V, γ):

$$\mathrm{O}(V, \gamma) := \{f \in \mathrm{End}(V) \mid f \text{ ist } \gamma\text{-orthogonal}\}.$$

2. Ist V endlich-dimensional, dann bilden die γ-orthogonalen Endomorphismen $f \in \mathrm{O}(V, \gamma)$ mit $\det(f) = 1$ einen Normalteiler von $\mathrm{O}(V, \gamma)$, genannt die **spezielle orthogonale Gruppe** des Euklidischen Raumes (V, γ):

$$\mathrm{SO}(V, \gamma) := \{f \in \mathrm{O}(V, \gamma) \mid \underbrace{\det(f) = 1}_{\text{von FP unabhängig}}\}.$$

Beweis. Übung

Orthogonale (Darstellungs)matrizen bilden eine Gruppe

Folgerung 34.31

$\widehat{=}$ Innenprodukt auf $\mathbb{R}^n$

Es sei $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit. Dann gilt:

1. Die M-orthogonalen Matrizen in $\mathbb{R}^{n \times n}$ bilden eine Gruppe bzgl. der Matrix-Multiplikation, genannt die **orthogonale Gruppe** des Euklidischen Raumes $(\mathbb{R}^n, \gamma_M)$:

$$\mathrm{O}(\mathbb{R}^n, \gamma_M) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A \text{ ist } M\text{-orthogonal}\}.$$

2. Die M-orthogonalen Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\det(A) = 1$ bilden einen Normalteiler von $\mathrm{O}(\mathbb{R}^n, \gamma_M)$, genannt die **spezielle orthogonale Gruppe** des Euklidischen Raumes $(\mathbb{R}^n, \gamma_M)$:

$$\mathrm{SO}(\mathbb{R}^n, \gamma_M) := \{A \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^n, \gamma_M) \mid \det(A) = 1\}.$$

Beispiel 34.33

1. Die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

ist I-orthogonal, denn:

$$A^T I A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

A ist aber nicht M-orthogonal bzgl. der Innenproduktmatrix $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, denn:

$$A^T M A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \neq M$$

2. Die Drehabbildung, dargestellt durch

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

bzgl. der Standardbasis, ist I-orthogonal, denn:

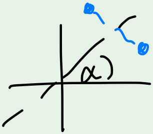
$$A^T I A = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2+s^2 & 0 \\ 0 & s^2+c^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$\det(A) = c^2 + s^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad A \in SO(\mathbb{R}^2, \gamma_I)$$

3. Die Spiegelungsabbildung, dargestellt durch

$$A = \begin{bmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$



bzgl. der Standardbasis, ist I-orthogonal, denn:

$$A^T I A = \begin{bmatrix} c & s \\ s & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s \\ s & -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$\det(A) = -c^2 - s^2 = -1$$

$$A \in O(\mathbb{R}^2, \gamma_I) \setminus SO(\mathbb{R}^2, \gamma_I)$$

Endlich-dimensionaler Vektorraum und Dualraum

Motivation

- Zwischen einem Vektorraum V und seinem Dualraum V^* gibt es auch bei endlicher Dimension keinen *kanonischen* Isomorphismus.
- Wenn wir jedoch ein Innenprodukt in V gewählt haben, dann induziert dieses eine bevorzugte Wahl eines solchen Isomorphimus in $\Gamma \in \mathrm{Hom}(V, V^*)$.
- Γ ist mit den Innenprodukten γ in V und γ^{-1} in V^* kompatibel ist, also eine lineare Isometrie.
- Dieser Isomorphismus wird der **Riesz-Isomorphismus** des Euklidischen Raumes (V, γ) genannt.

Darstellungssatz von Riesz (Riesz-Fréchet)

Satz 34.34

Riesz-Isom.

Es sei (V, γ) ein endlich-dimensionaler Euklidischer Raum.

Dann ist die Abbildung $\Gamma \colon V \ni v \mapsto \gamma(\cdot, v) \in V^*$ ein Isomorphismus.

Wird V^* mit dem Innenprodukt γ^{-1} ausgestattet, dann ist $\Gamma \colon (V, \gamma) \to (V^*, \gamma^{-1})$ eine bijektive $\underbrace{\text{Isometrie}}_{(\gamma,\gamma^{-1})\text{-orthogonal}}$. Es gilt

$$\gamma(u,v) = \langle \underbrace{\Gamma(v)}_{\in V^*}, \underbrace{u}_{\in V} \rangle = \langle \Gamma(u), v \rangle = \gamma^{-1}\big(\Gamma(u), \Gamma(v)\big)$$

Jedes Element $\xi \in V^*$ kann eindeutig dargestellt werden in der Form $\langle \xi, u \rangle = \gamma(v, \cdot)$ mit $v \in V$.

Folgerung 34.36

Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit.

Dann ist die Abbildung

$$\Gamma \colon \mathbb{R}^n \ni x \mapsto M\,x \in (\mathbb{R}^n)^*$$

eine bijektive Isometrie der Euklidischen Räume $(\mathbb{R}^n, \gamma_M)$ und $((\mathbb{R}^n)^*, \gamma_{M^{-1}})$.

Es gilt $\underset{\in \mathbb{R}^n}{y}^T M \underset{\in \mathbb{R}^n}{x} = \underbrace{y^T (Mx)}_{= \langle Mx, y \rangle} = \underbrace{(My)^T x}_{= \langle My, x \rangle} = \underbrace{(y^T M)}_{\in (\mathbb{R}^n)^*} M^{-1} \underbrace{(Mx)}_{\in (\mathbb{R}^n)^*}$

- Multipl. mit M : $\mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^*$
- " M^{-1} : $(\mathbb{R}^n)^* \to \mathbb{R}^n$

Orthogonalität dualer Homomorphismen

Satz 34.37

$f^* \in \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$

Es seien (V, γ_1) und (W, γ_2) zwei endlich-dimensionale Euklidische Räume derselben Dimension und $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Dann sind äquivalent:

1. f ist (γ_1, γ_2)-orthogonal.
2. f^* ist $(\gamma_2^{-1}, \gamma_1^{-1})$-orthogonal.

mögl. Konst. für Orth. von f

① heißt: A invertierbar & $A^T M_2 A = M_1$

$\Updownarrow \Leftrightarrow$

② heißt: A^T invertierbar & $A M_1^{-1} A^T = M_2^{-1}$

$\dim(V) = \dim(W)$ ist wesentlich!

Für $\dim(V) \neq \dim(W)$ ist mind. eine von ①, ② falsch.

Orthogonalität dualer Endomorphismen

Folgerung 34.38

Es sei (V, γ) ein endlich-dimensionaler Euklidischer Raum und $f \in \operatorname{End}(V)$. Dann sind äquivalent:

1. f ist γ-orthogonal.
2. f^* ist γ^{-1}-orthogonal.

Adjungierter Homomorphismus

endlich-dimensional

Definition 34.39

Es seien (V, γ_1) und (W, γ_2) zwei Euklidische Räume. Weiter sei $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ eine lineare Abbildung. Dann heißt

$$f^\circ := \Gamma_{V \to V^*}^{-1} \circ f^* \circ \Gamma_{W \to W^*} : W \to V$$

der zu f **(γ_1, γ_2)-adjungierte Homomorphismus**. oder (γ_1, γ_2)-adjungierte Abb.

$$\begin{tikzcd}
(V, \gamma_1) \arrow[d, "\Gamma_{V \to V^*}"'] & (W, \gamma_2) \arrow[l, "f^\circ"'] \arrow[d, "\Gamma_{W \to W^*}"] \\
(V^*, \gamma_1^{-1}) & (W^*, \gamma_2^{-1}) \arrow[l, "f^*"']
\end{tikzcd}$$

$$\gamma_2(w, f(v)) = \gamma_1(f^\circ(w), v)$$

Vergleich dualer und adjungierter Homomorphismen

Es sei $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$.

dualer Homomorphismus

- $f^* \in \operatorname{Hom}(W^*, V^*)$
- keine Abhängigkeit von Innenprodukten

$$\langle w^*\,, f(v)\rangle_{W^*,W} = \langle f^*(w^*)\,, v\rangle_{V^*,V}$$

adjungierter Homomorphismus

- $f^\circ \in \operatorname{Hom}(W, V)$
- erfordert Innenprodukte in V und W

$$\gamma_2\big(w, f(v)\big) = \gamma_1\big(f^\circ(w), v\big)$$

$\dim(V) = m \qquad \dim(W) = n$

Satz 34.41

Es seien (V, γ_1) und (W, γ_2) zwei endlich-dimensionale Euklidische Räume mit Basen B_V bzw. B_W. Weiter seien $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ und

- $M_1 := \mathcal{M}_{B_V^*}^{B_V}(\gamma_1) \in \mathbb{R}^{m \times m}$
- $M_2 := \mathcal{M}_{B_W^*}^{B_W}(\gamma_2) \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- $A = \mathcal{M}_{B_W}^{B_V}(f) \in \mathbb{R}^{n \times m}$

Dann gilt für die Darstellungsmatrix von $f^\circ \in \operatorname{Hom}(W, V)$

$$A^\circ := \mathcal{M}_{B_V}^{B_W}(f^\circ) = M_1^{-1} A^\mathsf{T} M_2$$

$$f^\circ = (\Gamma_{V \to V^*})^{-1} \circ f^* \circ \Gamma_{W \to W^*}$$

Biadjungierte Abbildung

Lemma 34.42

Es seien (V, γ_1) und (W, γ_2) endlich-dimensionale Euklidische Räume.

Dann ist die (γ_1, γ_2)-**biadjungierte Abbildung** $f^{\circ\circ} := \underbrace{(f^\circ)^\circ}$ identisch zu f, unabhängig von den Innenprodukten γ_1 und γ_2.

(γ_2, γ_1)-adj. Abb.
der (γ_1, γ_2)-adj. Abb.
von f

Nochmal vier fundamentale Unterräume va $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$

Es seien (V, γ_1) und (W, γ_2) endlich-dimensionale Euklidische Räume und $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$.

Satz 21.36

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Bild}(f^*) &= \mathrm{Kern}(f)^0 && \text{in } V^* \\
\mathrm{Kern}(f^*) &= \mathrm{Bild}(f)^0 && \text{in } W^* \\
\mathrm{Bild}(f) &= {}^0\mathrm{Kern}(f^*) && \text{in } W \\
\mathrm{Kern}(f) &= {}^0\mathrm{Bild}(f^*) && \text{in } V.
\end{aligned}
$$

Satz 34.43

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Bild}(f^\circ) &= \mathrm{Kern}(f)^{\perp_{\gamma_1}} && \text{in } V \\
\mathrm{Kern}(f^\circ) &= \mathrm{Bild}(f)^{\perp_{\gamma_2}} && \text{in } W \\
\mathrm{Bild}(f) &= \mathrm{Kern}(f^\circ)^{\perp_{\gamma_2}} && \text{in } W \\
\mathrm{Kern}(f) &= \mathrm{Bild}(f^\circ)^{\perp_{\gamma_1}} && \text{in } V.
\end{aligned}
$$

Endomorphismen induzieren orthogonale direkte Summen

Folgerung 34.44

Es sei (V, γ) ein endlich-dimensionaler Euklidischer Raum.
Weiter sei $f \in \operatorname{End}(V)$ mit γ-adjungierter Abbildung $f^\circ \in \operatorname{End}(V)$.

Dann gilt:

$$V = \operatorname{Kern}(f) \obot \operatorname{Bild}(f^\circ)$$

$$V = \operatorname{Kern}(f^\circ) \obot \operatorname{Bild}(f)$$

Beweis:

$$V = \operatorname{Kern}(f) \obot \operatorname{Kern}(f)^\perp = \operatorname{Kern}(f) \obot \operatorname{Bild}(f^\circ)$$

und

$$V = \operatorname{Bild}(f) \obot \operatorname{Bild}(f)^\perp = \operatorname{Bild}(f) \obot \operatorname{Kern}(f^\circ)$$