Lineare Algebra II

Woche 11

25.06.2024 und 27.06.2024

Quadratische Form

Definition 32.1

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K.

1. $q\colon V \to K$ heißt eine **quadratische Form** auf V, wenn gilt:
   a. $q(\alpha\, u) = \alpha^2 q(u)$ für alle $\alpha \in K$ und alle $v \in V$
   b. Die Abbildung
      $$\Gamma\colon V \times V \ni (u, v) \mapsto q(u + v) - q(u) - q(v) \in K$$
      ist eine Bilinearform.
2. Die Menge aller quadratischen Formen auf V bezeichnen wir mit $\operatorname{QF}(V)$.

Quadratische Formen bilden einen Vektorraum

Lemma 32.2

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K.

Dann ist $\operatorname{QF}(V)$ ein Unterraum des Vektorraumes $K^V = \{f \colon V \to K\}$ aller Abbildungen $V \to K$.

Beweis. Übung

Bilinearformen induzieren quadratische Formen

Lemma 32.3

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K.

Ist $\gamma\colon V \times V \to K$ eine Bilinearform auf V, dann ist

$$q_\gamma(u) := \gamma(u, u)$$

eine quadratische Form auf V mit zugehörigem $\Gamma = \gamma + \gamma^*$.

Satz 32.4

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit $\operatorname{char}(K) \neq 2$.

$$
\begin{aligned}
&q_\bullet \colon \operatorname{Bil}_{\text{sym}}(V, V) \ni \gamma \mapsto q_\gamma \in \operatorname{QF}(V) \\
&q_\gamma(u) \coloneqq \gamma(u, u)
\end{aligned}
$$

ist ein Isomorphismus von Vektorräumen. Die zu $q_\bullet$ inverse Abbildung ist

$$
\begin{aligned}
&\gamma_\bullet \colon \operatorname{QF}(V) \ni q \mapsto \gamma_q \in \operatorname{Bil}_{\text{sym}}(V, V) \\
&\gamma_q(u, v) \coloneqq \frac{1}{2}\big(q(u + v) - q(u) - q(v)\big).
\end{aligned}
$$

Zusammenhang Bilinearformen und quadratische Formen

Satz 32.4

$$q_\bullet\colon\ \mathrm{Bil}_{\mathrm{sym}}(V,V) \to \mathrm{QF}(V), \quad q_\gamma(u) \coloneqq \gamma(u,u)$$

$$\gamma_\bullet\colon\ \mathrm{QF}(V) \to \mathrm{Bil}_{\mathrm{sym}}(V,V), \quad \gamma_q(u,v) \coloneqq \frac{1}{2}\big(q(u+v) - q(u) - q(v)\big)$$

Beweis.

Zusammenhang Bilinearformen und quadratische Formen

Satz 32.4

$$q_\bullet \colon \operatorname{Bil}_{\mathrm{sym}}(V,V) \to \operatorname{QF}(V), \quad q_\gamma(u) \coloneqq \gamma(u,u)$$

$$\gamma_\bullet \colon \operatorname{QF}(V) \to \operatorname{Bil}_{\mathrm{sym}}(V,V), \quad \gamma_q(u,v) \coloneqq \frac{1}{2}\big(q(u+v) - q(u) - q(v)\big)$$

Beweis.

Zusammenhang Bilinearformen und quadratische Formen

Beispiel 32.6

1.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 2} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$$

induzieren verschiedene Bilinearformen:

$$\gamma_A(x,y) = y^\mathsf{T} A\, x =$$
$$\gamma_B(x,y) = y^\mathsf{T} B\, x =$$

Diese jedoch induzieren dieselbe quadratische Form, nämlich

$$q(x) = \gamma_A(x,x) = \qquad\qquad = \gamma_B(x,x).$$

Zusammenhang Bilinearformen und quadratische Formen

Beispiel 32.6

2. Die quadratische Form

$$q(x) = -x_1^2 - 8\,x_1\,x_2 + 5\,x_2^2$$

induziert die symmetrische Bilinearform

$$\gamma_q(x, y) = y^\mathsf{T} \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} x.$$

Zusammenhang Bilinearformen und quadratische Formen

Beispiel 32.6

3. Die Abbildung

$$f \colon \mathbb{Q}^2 \times \mathbb{Q}^2 \ni (x, y) \mapsto 3\, x_1\, y_1 + y_1\, y_2 \in \mathbb{Q}$$

ist keine Bilinearform, denn

$$\begin{aligned} f(2\,x, y) &= 6\, x_1\, y_1 + y_1\, y_2 \\ 2\, f(x, y) &= 6\, x_1\, y_1 + 2\, y_1\, y_2 \end{aligned}$$

sind verschiedene Abbildungen.

Quadratischer Raum und Orthogonalität

Definition 33.1

1. Ist $\gamma \in \mathrm{Bil}_{\mathrm{sym}}(V, V)$ eine symmetrische Bilinearform auf V und q die zugehörige quadratische Form, dann heißt (V, γ) ein **quadratischer Raum über V**.

2. Zwei Vektoren $u, v \in V$ heißen **orthogonal bzgl. γ**, wenn $\gamma(u, v) = 0$ gilt.

3. Wir führen auch die Mengenschreibweise $E_1 \perp E_2$ für $E_1, E_2 \subseteq V$ ein. Diese bedeutet $u_1 \perp u_2$ für alle $u_1 \in E_1$ und alle $u_2 \in E_2$.

Definition 33.1

4. Eine Menge $E \subseteq V$ in V heißt **orthogonal bzgl.** γ, wenn ihre Elemente paarweise orthogonal sind, d. h., wenn gilt: $u \perp v$ für alle $u, v \in E$ mit $u \neq v$.

5. Eine Familie $(v_i)_{i \in I}$ in V heißt **orthogonal bzgl.** γ, wenn ihre Mitglieder paarweise orthogonal sind, d. h., wenn gilt: $v_i \perp v_j$ für alle $i, j \in I$ mit $i \neq j$.

6. Der Unterraum

$$E^\perp := \big\{ v \in V \,\big|\, \gamma(u, v) = 0 \text{ für alle } u \in E \big\}$$

heißt das **orthogonale Komplement bzgl.** γ der Menge $E \subseteq V$.

Quadratischer Raum und Orthogonalität

Beispiel 33.2

1. Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit $\operatorname{char}(K) \neq 2$. Mit der Nullform γ wird (V, γ) zu einem quadratischen Raum, in dem zwei beliebige Vektoren stets orthogonal sind.

2. In $V = \mathbb{R}^n$ erzeugt die symmetrische Bilinearform $\gamma(x, y) \coloneqq y^\mathsf{T} x$ den bekannten Begriff von Orthogonalität.

Satz des Pythagoras

Satz 33.3

Es sei (V, γ) ein quadratischer Raum über K mit $\operatorname{char}(K) \neq 2$.

Ist die Familie $(v_1, \ldots, v_k)$ orthogonal, dann gilt

$$\gamma\Big(\sum_{i=1}^{k} v_i, \sum_{j=1}^{k} v_j\Big) = \sum_{i=1}^{k} \gamma(v_i, v_i).$$

Beweis.

$$\gamma\Big(\sum_{i=1}^{k} v_i, \sum_{j=1}^{k} v_j\Big) = \qquad\qquad = \sum_{i=1}^{k} \gamma(v_i, v_i)$$

Orthogonalbasis, orthogonale direkte Summe

Definition 33.4

Es sei (V, γ) ein quadratischer Raum über K mit $\operatorname{char}(K) \neq 2$.

1. Eine Familie $B := (v_i)_{i \in I}$ von Vektoren in V heißt eine **Orthogonalbasis**, wenn B eine Basis von V und außerdem orthogonal bzgl. γ ist.

2. Es sei $(U_i)_{i \in I}$ eine nichtleere Familie von Unterräumen von V. Die Summe $\sum_{i \in I} U_i = \left\langle \bigcup_{i \in I} U_i \right\rangle$ dieser Familie heißt eine **orthogonale direkte Summe**, wenn die Summe direkt ist und $U_i \perp U_j$ gilt für alle $i, j \in I$ mit $i \neq j$.

   Wir schreiben für eine orthogonale direkte Summe auch $\bigoplus_{i \in I} U_i$.

Orthogonale direkte Summe, Orthogonalbasis

Satz 33.5

Es sei (V, γ) ein quadratischer Raum über K mit $\operatorname{char}(K) \neq 2$.

1. Ist B eine Orthogonalbasis von V und $(B_i)_{i \in I}$ eine Partition von B mit nichtleerer Indexmenge I, dann gilt $V = \bigoplus_{i \in I} \langle B_i \rangle$.

2. Ist $(U_i)_{i \in I}$ eine nichtleere Familie von Unterräumen von V mit Orthogonalbasen B_i, $i \in I$, und gilt $V = \bigoplus_{i \in I} U_i$, so ist $\bigcup_{i \in I} B_i$ eine Orthogonalbasis von V.

Orthogonalbasen und diagonale Darstellungsmatrizen

Lemma 33.7

Es sei (V, γ) ein quadratischer Raum über K mit $\operatorname{char}(K) \neq 2$.

Für eine Basis B_V von V sind äquivalent:

1. B_V ist eine Orthogonalbasis von V.
2. Die Darstellungsmatrix $\mathcal{M}_{B_V^*}^{B_V}(\gamma)$ ist diagonal.

Homomorphismus quadratischer Räume

Definition 33.8

Es seien (V, γ_1) und (W, γ_2) quadratische Räume über K mit $\operatorname{char}(K) \neq 2$.

1. Eine Abbildung $f\colon V \to W$ heißt ein **Homomorphismus quadratischer Räume** von (V, γ_1) in (W, γ_2), wenn gilt:

$$\begin{aligned} &f \text{ ist linear} \\ &\gamma_2(f(u), f(v)) = \gamma_1(u, v) \quad \text{für alle } u, v \in V \end{aligned}$$

2. Ist $f\colon V \to W$ bijektiv, so heißt f auch ein **Isomorphismus quadratischer Räume**. (V, γ_1) und (W, γ_2) heißen dann auch zueinander **isomorphe quadratische Räume**.

Inverse eines Isomorphismus quadratischer Räume

Lemma 33.9

Es seien (V, γ_1) und (W, γ_2) quadratische Räume über K mit $\operatorname{char}(K) \neq 2$.

Ist $f\colon V \to W$ ein Isomorphismus quadratischer Räume, dann auch f^{-1}. Außerdem gilt $\operatorname{Rang}(\gamma_1) = \operatorname{Rang}(\gamma_2)$.

Beweis. Übung

Satz 33.10

Es sei (V, γ) ein endlich-dimensionaler quadratischer Raum über K mit $\operatorname{char}(K) \neq 2$. Dann gilt:

1. V besitzt eine Orthogonalbasis B_V. In dieser ist die Darstellungsmatrix $\mathcal{M}_{B_V^*}^{B_V}(\gamma)$ diagonal.

2. Die Basis B_V kann so gewählt werden, dass die Darstellungsmatrix die folgende Gestalt hat:

$$\mathcal{M}_{B_V^*}^{B_V}(\gamma) = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

Normalform symmetrischer BLF in reellen Vektorräumen

Satz 33.13

Es sei (V, γ) ein endlich-dimensionaler quadratischer Raum über $\mathbb{R}$. Dann gilt: V besitzt eine Orthogonalbasis B_V, bzgl. der die Darstellungsmatrix die Gestalt

$$\mathcal{M}_{B_V^*}^{B_V}(\gamma) = \begin{bmatrix} I_{n_+} & & \\ & -I_{n_-} & \\ & & 0_{n_0} \end{bmatrix}$$

hat. Dabei ist die **Signatur** (n_+, n_-, n_0) eindeutig bestimmt.

Trägheitssatz von Sylvester

Satz 33.14

Weiter sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gibt es eine reguläre Matrix $T \in K^{n \times n}$, sodass $T^{-\mathsf{T}} A \, T^{-1}$ eine Diagonalmatrix der Gestalt

$$\begin{bmatrix} I_{n_+} & & \\ & -I_{n_-} & \\ & & 0_{n_0} \end{bmatrix}$$

ist. Die Anzahl der Diagonaleinträge, die gleich $+1$, -1 oder 0 sind, also die Signatur der durch A induzierten Bilinearform γ_A, ist durch A eindeutig festgelegt.

Normalform symmetrischer BLF in komplexen Vektorräumen

Satz 33.16

Es sei (V, γ) ein endlich-dimensionaler quadratischer Raum über $\mathbb{C}$. Dann gilt: V besitzt eine Orthogonalbasis B_V, bzgl. der die Darstellungsmatrix die Gestalt

$$\mathcal{M}_{B_V^*}^{B_V}(\gamma) = \begin{bmatrix} I_r & \\ & 0 \end{bmatrix}$$

hat.

Definitheit und Indefinitheit von Bilinearformen

Definition 34.1

Es sei (V, γ) ein quadratischer Raum über $\mathbb{R}$.

Eine Bilinearform $\gamma \in \operatorname{Bil}(V, V)$ heißt

1. **positiv definit**, wenn $\gamma(v, v) > 0$ gilt für alle $v \in V \setminus \{0\}$.
2. **positiv semidefinit**, wenn $\gamma(v, v) \geqslant 0$ gilt für alle $v \in V$.
3. **negativ definit**, wenn $\gamma(v, v) < 0$ gilt für alle $v \in V \setminus \{0\}$.
4. **negativ semidefinit**, wenn $\gamma(v, v) \leqslant 0$ gilt für alle $v \in V$.
5. **indefinit**, wenn γ weder positiv semi-definit noch negativ semi-definit ist, wenn es also Vektoren $v_1, v_2 \in V$ gibt mit $\gamma(v_1, v_1) > 0$ und $\gamma(v_2, v_2) < 0$.

Innenprodukt, Euklidischer Raum

Definition 34.3

Es sei (V, γ) ein quadratischer Raum über $\mathbb{R}$.

Die symmetrische Bilinearform γ heißt ein **Innenprodukt auf V**, wenn γ positiv definit ist.

In diesem Fall heißt (V, γ) auch ein **reeller Innenproduktraum** oder **Euklidischer Raum**.

Beispiel 34.5

1.

$$\gamma\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (x, y) \mapsto y^\mathsf{T} x = \sum_{i=1}^n x_i\, y_i \in \mathbb{R}$$

heißt das **Standardinnenprodukt** auf K^n.

Innenprodukt, Euklidischer Raum

Beispiel 34.5

2. Für
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$
und die induzierte Bilinearform γ_A gilt
$$\gamma(e_1, e_1) = \gamma(e_2, e_2) = \quad ,$$
aber
$$\gamma\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

Orthogonalität impliziert lineare Unabhängigkeit

Lemma 34.7

Es sei (V, γ) ein Euklidischer Raum.

Ist $(v_1, \ldots, v_k)$ eine orthogonale Familie von Vektoren in $V \setminus \{0\}$, $k \in \mathbb{N}_0$, dann ist $(v_1, \ldots, v_k)$ linear unabhängig.

Beweis.

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Satz 34.8

Es sei (V, γ) ein Euklidischer Raum. Dann gilt:

$$\gamma(u, v)^2 \leqslant \gamma(u, u)\, \gamma(v, v)$$

für alle $u, v \in V$.

Gleichheit gilt genau dann, wenn (u, v) linear abhängig ist.

Norm auf einem reellen Vektorraum

Definition 34.10

Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.

1. Eine Abbildung $\|\cdot\| \colon V \to \mathbb{R}$ heißt eine **Norm auf V**, wenn gilt:

$$
\begin{aligned}
&\|u\| \geqslant 0 \quad \text{und} \quad \|u\| = 0 \;\Rightarrow\; u = 0 && \textbf{positive Definitheit} \\
&\|\alpha\, u\| = |\alpha|\, \|u\| && \textbf{absolute Homogenität} \\
&\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\| && \textbf{Dreiecksungleichung}
\end{aligned}
$$

   für alle $u, v \in V$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. Das Paar $(V, \|\cdot\|)$ heißt ein **normierter reeller Vektorraum**.

Jedes Innenprodukt induziert eine Norm

Satz 34.11

Es sei (V, γ) ein Euklidischer Raum. Dann definiert

$$\|\cdot\|_\gamma \colon V \ni u \mapsto \|u\|_\gamma := \sqrt{\gamma(u,u)} \in \mathbb{R}$$

eine Norm auf V.

Beweis.

Satz des Pythagoras

Satz 34.12

Es sei (V, γ) ein Euklidischer Raum. Ist die Familie $(v_1, \ldots, v_k)$ orthogonal, dann gilt

$$\Big\| \sum_{i=1}^{k} v_i \Big\|^2 = \sum_{i=1}^{k} \|v_i\|^2.$$

Normierter Vektor, orthonormale Familie, Orthonormalbasis

Definition 34.13

Es sei (V, γ) ein Euklidischer Raum mit Norm $\|\cdot\|$.

1. Ein Vektor $u \in V$ heißt ein **normierter Vektor** oder **Einheitsvektor**, wenn $\|u\| = 1$ gilt.
2. Eine Menge $E \subseteq V$ in V heißt **orthonormal bzgl.** γ, wenn die Menge orthogonal ist und alle Elemente normiert sind.
3. Eine Familie $(v_i)_{i \in I}$ in V heißt **orthonormal bzgl.** γ, wenn die Familie orthogonal ist und alle ihre Mitglieder normiert sind.
4. Eine Familie $B := (v_i)_{i \in I}$ in V heißt eine **Orthonormalbasis**, wenn B eine Basis von V und außerdem orthonormal bzgl. γ ist.

Normalform von Innenprodukten

Satz 34.14

Es sei (V, γ) ein endlich-dimensionaler Euklidischer Raum.

Dann gilt: V besitzt eine Orthonormalbasis B_V.

Die Darstellungsmatrix erfüllt daher

$$\mathcal{M}_{B_V^*}^{B_V}(\gamma) = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

Orthogonale Projektion auf einen Vektor

Definition 34.15

Es sei (V, γ) ein Euklidischer Raum und $u \in V$, $u \neq 0$.

Dann ist durch

$$\operatorname{proj}_u^\gamma \colon V \ni v \mapsto \operatorname{proj}_u^\gamma(v) := \frac{\gamma(v, u)}{\|u\|^2} \, u \in V$$

die **orthogonale Projektion bzgl. γ auf $\langle u \rangle$** definiert.

Eigenschaften der orthogonalen Projektion

Lemma 34.16

Es sei (V, γ) ein Euklidischer Raum und $u \in V$, $u \neq 0$. Dann gilt:

1. $$\operatorname{proj}_u^\gamma \colon V \ni v \mapsto \operatorname{proj}_u^\gamma(v) := \frac{\gamma(v, u)}{\|u\|^2}\, u \in V$$

   definiert eine Projektion.

2. Es gilt $V = \operatorname{Bild}\big(\operatorname{proj}_u^\gamma\big) \oplus \operatorname{Kern}\big(\operatorname{proj}_u^\gamma\big)$.

   Jedes $v \in V$ besitzt also eine eindeutige Zerlegung

   $$v = u_{\|} + u_{\perp} \quad \text{mit} \quad u_{\|} \in \langle u \rangle \quad \text{und} \quad u_{\perp} \in \langle u \rangle^{\perp}.$$

Gram-Schmidt-Verfahren

Algorithmus 34.17

Eingabe: K Körper mit $\operatorname{char}(K) \neq 2$
Eingabe: V ein Vektorraum über K
Eingabe: γ ein Innenprodukt auf V
Eingabe: linear unabhängige Familie $(v_1, \ldots, v_k)$ in V
Ausgabe: orthogonale Familie mit $\langle u_1, \ldots, u_k \rangle = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$

for $j = 1, \ldots, k$ **do**
  Setze $u_j \leftarrow v_j - \displaystyle\sum_{i=1}^{j-1} \frac{\gamma(v_j, u_i)}{\alpha_i} \, u_i$
  Bestimme $\alpha_j := \|u_j\|^2$
end for
return $(u_1, \ldots, u_k)$

Gram-Schmidt-Verfahren

Satz 34.19

Es sei (V, γ) ein Euklidischer Raum.

Ist $(u_1, \ldots, u_k)$ eine linear unabhängige Familie in V, dann liefert das Gram-Schmidt-Verfahren eine orthogonale Familie $(v_1, \ldots, v_k)$ von V mit der Eigenschaft $\langle v_1, \ldots, v_j \rangle = \langle u_1, \ldots, u_j \rangle$ für alle $j = 1, \ldots, k$.

Beweis. Übung