Lineare Algebra II

Woche 11

25.06.2024 und 27.06.2024

Nächste Woche Vorlesung

Mo 01.07.

Di 02.07

Plenarübung

Do 04.07.

Definition 32.1

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K.

1. $q \colon V \to K$ heißt eine **quadratische Form** auf V, wenn gilt:
   a. $q(\alpha\, u) = \alpha^2 q(u)$ für alle $\alpha \in K$ und alle $v \in V$ homogen vom Grad 2
   b. Die Abbildung

   $$\Gamma \colon V \times V \ni (u, v) \mapsto \underbrace{q(u + v) - q(u) - q(v)}_{\text{symm., d.h. } \Gamma(u,v) = \Gamma(v,u)} \in K$$

   ist eine Bilinearform.
2. Die Menge aller quadratischen Formen auf V bezeichnen wir mit $\mathrm{QF}(V)$.

Quadratische Formen bilden einen Vektorraum

Lemma 32.2

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K.

Dann ist $\operatorname{QF}(V)$ ein Unterraum des Vektorraumes $K^V = \{f \colon V \to K\}$ aller Abbildungen $V \to K$.

Beweis. Übung

Bilinearformen induzieren quadratische Formen

Lemma 32.3

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K.

Ist $\gamma \colon V \times V \to K$ eine Bilinearform auf V, dann ist

$$q_\gamma(u) := \gamma(u, u)$$

Auswertung von γ entlang der Diagonale

eine quadratische Form auf V mit zugehörigem $\Gamma = \gamma + \gamma^*$.

$$\gamma \mapsto q_\gamma \mapsto \Gamma = \gamma + \gamma^*$$

q „sieht" nur den (doppelten) „symm. Anteil von γ

Satz 32.4

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$.

$$q_\bullet \colon\ \mathrm{Bil}_{\mathrm{sym}}(V,V) \ni \gamma \mapsto q_\gamma \in \mathrm{QF}(V)$$

$$q_\gamma(u) := \gamma(u,u)$$

durch γ induzierte QF

ist ein Isomorphismus von Vektorräumen. Die zu $q_\bullet$ inverse Abbildung ist

$$\gamma_\bullet \colon\ \mathrm{QF}(V) \ni q \mapsto \gamma_q \in \mathrm{Bil}_{\mathrm{sym}}(V,V)$$

$$\gamma_q(u,v) := \frac{1}{2}\big(q(u+v) - q(u) - q(v)\big).$$

durch q induzierte symm. BLF

Polarisierungsformel

Satz 32.4

$$q_\bullet\colon\ \mathrm{Bil}_{\mathrm{sym}}(V,V) \to \mathrm{QF}(V), \quad q_\gamma(u) := \gamma(u,u)$$

$$\gamma_\bullet\colon\ \mathrm{QF}(V) \to \mathrm{Bil}_{\mathrm{sym}}(V,V), \quad \gamma_q(u,v) := \frac{1}{2}\big(q(u+v) - q(u) - q(v)\big)$$

Beweis. • $q_\bullet$ ist linear:

$$\begin{aligned} q_{\alpha\gamma_1+\beta\gamma_2}(u) = (\alpha\gamma_1+\beta\gamma_2)(u,u) &= \alpha\gamma_1(u,u)+\beta\gamma_2(u,u) \\ &= \alpha q_{\gamma_1}(u)+\beta q_{\gamma_2}(u) \\ &= (\alpha q_{\gamma_1}+\beta q_{\gamma_2})(u) \end{aligned}$$

$2=1+1$

$4=2+2$

• $q_\bullet \circ \gamma_\bullet = \mathrm{id}_{\mathrm{QF}(V)}$:

$$\begin{aligned} \big((q_\bullet\circ\gamma_\bullet)(q)\big)(u) &= \big(q_\bullet(\gamma_q)\big)(u) = \gamma_q(u,u) \\ &= \tfrac{1}{2}\big(q(u+u) - q(u) - q(u)\big) = \tfrac{1}{2}\big(q(2u) - 2q(u)\big) \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot 4q(u) - q(u) = 2q(u) - q(u) = q(u). \end{aligned}$$

Zusammenhang Bilinearformen und quadratische Formen

Wir können wechseln zw. symm. BLF und QF!

Satz 32.4

$$q_\bullet : \ \mathrm{Bil}_{\mathrm{sym}}(V,V) \to \mathrm{QF}(V), \quad q_\gamma(u) := \gamma(u,u)$$

$$\gamma_\bullet : \ \mathrm{QF}(V) \to \mathrm{Bil}_{\mathrm{sym}}(V,V), \quad \gamma_q(u,v) := \frac{1}{2}\big(q(u+v) - q(u) - q(v)\big)$$

Beweis. • $\gamma_\bullet \circ q_\bullet = \mathrm{id}_{\mathrm{Bil}_{\mathrm{sym}}(V,V)}$:

$$\big((\gamma_\bullet \circ q_\bullet)(\gamma)\big)(u,v) = \big(\gamma_\bullet(q_\gamma)\big)(u,v)$$

$$= \frac{1}{2}\big(q_\gamma(u+v) - q_\gamma(u) - q_\gamma(v)\big)$$

$$= \frac{1}{2}\big(\gamma(u+v,u+v) - \gamma(u,u) - \gamma(v,v)\big)$$

$$= \dots = \frac{1}{2}\cdot\big(\gamma(u,v) + \gamma(v,u)\big) \underset{\text{symm.}}{=} \gamma(u,v)$$

Beispiel 32.6

symm. Anteil von A

$= \frac{1}{2}(A+A^T)$

1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 2} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$$

induzieren verschiedene Bilinearformen:

$$\gamma_A(x,y) = y^\mathsf{T} A\, x = x_1 y_1 + 2x_2 y_1 + 3x_2 y_2$$

$$\gamma_B(x,y) = y^\mathsf{T} B\, x = x_1 y_1 + x_2 y_1 + x_1 y_2 + 3x_2 y_2$$

Diese jedoch induzieren dieselbe quadratische Form, nämlich

$$q(x) = \gamma_A(x,x) = x_1^2 + 2x_1 x_2 + 3x_2^2 = \gamma_B(x,x).$$

Zusammenhang Bilinearformen und quadratische Formen

Beispiel 32.6

2. Die quadratische Form

$$q(x) = -x_1^2 - 8\,x_1\,x_2 + 5\,x_2^2$$

induziert die symmetrische Bilinearform

$$\gamma_q(x, y) = y^\mathsf{T} \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} x.$$

Beispiel 32.6

3. Die Abbildung

$$f \colon \mathbb{Q}^2 \times \mathbb{Q}^2 \ni (x, y) \mapsto 3\, x_1\, y_1 + y_1\, y_2 \in \mathbb{Q}$$

ist keine Bilinearform, denn

$$\begin{aligned} f(2\, x, y) &= 6\, x_1\, y_1 + y_1\, y_2 \\ 2\, f(x, y) &= 6\, x_1\, y_1 + 2\, y_1\, y_2 \end{aligned}$$

sind verschiedene Abbildungen.

Wann können wir Orthogonalität definieren?

Definition 33.1 V sei Vektorraum über Körper K.

1. Ist $\gamma \in \mathrm{Bil}_{\mathrm{sym}}(V, V)$ eine symmetrische Bilinearform auf V und q die zugehörige quadratische Form, dann heißt (V, γ) ein **quadratischer Raum über V**.

   eigentlich: (V, q)

   Wir brauchen häufiger γ als q.

2. Zwei Vektoren $u, v \in V$ heißen **orthogonal bzgl. γ**, wenn $\gamma(u, v) = 0$ gilt.

   symm. Relation

   $u \perp_\gamma v$ oder einfach $u \perp v$

3. Wir führen auch die Mengenschreibweise $E_1 \perp E_2$ für $E_1, E_2 \subseteq V$ ein. Diese bedeutet $u_1 \perp u_2$ für alle $u_1 \in E_1$ und alle $u_2 \in E_2$.

   $u \perp E$ statt $\{u\} \perp E$

Quadratischer Raum und Orthogonalität

Definition 33.1

4. Eine Menge $E \subseteq V$ in V heißt **orthogonal bzgl.** γ, wenn ihre Elemente paarweise orthogonal sind, d. h., wenn gilt: $u \perp v$ für alle $u, v \in E$ mit $u \neq v$.

5. Eine Familie $(v_i)_{i \in I}$ in V heißt **orthogonal bzgl.** γ, wenn ihre Mitglieder paarweise orthogonal sind, d. h., wenn gilt: $v_i \perp v_j$ für alle $i, j \in I$ mit $i \neq j$.

6. Der Unterraum UR-Kriterium

$$E^\perp := \left\{ v \in V \,\middle|\, \gamma(u, v) = 0 \text{ für alle } u \in E \right\}$$

heißt das **orthogonale Komplement bzgl.** γ der Menge $E \subseteq V$.

Beispiel 33.2

1. Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit $\operatorname{char}(K) \neq 2$. Mit der Nullform γ wird (V, γ) zu einem quadratischen Raum, in dem zwei beliebige Vektoren stets orthogonal sind.

2. In $V = \mathbb{R}^n$ erzeugt die symmetrische Bilinearform $\gamma(x, y) := y^\mathsf{T} x$ den bekannten Begriff von Orthogonalität.

$$y^T x = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i$$

Satz 33.3

Es sei (V, γ) ein quadratischer Raum über K mit $\operatorname{char}(K) \neq 2$.

Ist die Familie $(v_1, \dots, v_k)$ orthogonal, dann gilt

$$\gamma\Big(\sum_{i=1}^k v_i, \sum_{j=1}^k v_j\Big) = \sum_{i=1}^k \gamma(v_i, v_i).$$

Beweis.

$$\gamma\Big(\sum_{i=1}^k v_i, \sum_{j=1}^k v_j\Big) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \underbrace{\gamma(v_i, v_j)}_{=0 \text{ für } i \neq j} = \sum_{i=1}^k \gamma(v_i, v_i)$$

Orthogonalbasis, orthogonale direkte Summe

Definition 33.4

Es sei (V, γ) ein quadratischer Raum über K mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$.

1. Eine Familie $B := (v_i)_{i \in I}$ von Vektoren in V heißt eine **Orthogonalbasis**, wenn B eine Basis von V und außerdem orthogonal bzgl. γ ist. Basisvektoren paarweise senkrecht

OB

2. Es sei $(U_i)_{i \in I}$ eine nichtleere Familie von Unterräumen von V. Die Summe $\sum_{i \in I} U_i = \left\langle \bigcup_{i \in I} U_i \right\rangle$ dieser Familie heißt eine **orthogonale direkte Summe**, wenn die Summe direkt ist und $U_i \perp U_j$ gilt für alle $i, j \in I$ mit $i \neq j$.

Wir schreiben für eine orthogonale direkte Summe auch $\bigoplus_{i \in I} U_i$.

$U_i \perp \sum_{j \in I \setminus \{i\}} U_j$ wegen Bilinearität oder $\textcircled{\perp}$ oder $\textcircled{+}$

Satz 33.5

Es sei (V, γ) ein quadratischer Raum über K mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$.

1. Ist B eine Orthogonalbasis von V und $(B_i)_{i \in I}$ eine Partition von B mit nichtleerer Indexmenge I, dann gilt $V = \bigoplus_{i \in I} \langle B_i \rangle$.

2. Ist $(U_i)_{i \in I}$ eine nichtleere Familie von Unterräumen von V mit Orthogonalbasen B_i, $i \in I$, und gilt $V = \bigoplus_{i \in I} U_i$, so ist $\bigcup_{i \in I} B_i$ eine Orthogonalbasis von V.

Lemma 33.7

Es sei (V, γ) ein quadratischer Raum über K mit $\operatorname{char}(K) \neq 2$.

Für eine Basis B_V von V sind äquivalent:

1. B_V ist eine Orthogonalbasis von V.
2. Die Darstellungsmatrix $\underset{A=}{\mathcal{M}_{B_V^*}^{B_V}(\gamma)}$ ist diagonal. $\begin{bmatrix} \ddots & 0 \\ 0 & \ddots \end{bmatrix}$

$$A = (a_{ij}) = \big(\gamma(v_i, v_j)\big)_{i,j} = 0 \text{ für } i \neq j.$$

Definition 33.8

Es seien (V, γ_1) und (W, γ_2) quadratische Räume über K mit $\operatorname{char}(K) \neq 2$.

1. Eine Abbildung $f\colon V \to W$ heißt ein **Homomorphismus quadratischer Räume** von (V, γ_1) in (W, γ_2), wenn gilt:

$$f \text{ ist linear}$$
$$\gamma_2(f(u), f(v)) = \gamma_1(u, v) \quad \text{für alle } u, v \in V$$

2. Ist $f\colon V \to W$ bijektiv, so heißt f auch ein **Isomorphismus quadratischer Räume**. (V, γ_1) und (W, γ_2) heißen dann auch zueinander **isomorphe quadratische Räume**.

$(V_1, \gamma_1) \cong (V_2, \gamma_2)$

Inverse eines Isomorphismus quadratischer Räume

Lemma 33.9

Es seien (V, γ_1) und (W, γ_2) quadratische Räume über K mit $\operatorname{char}(K) \neq 2$.

Ist $f\colon V \to W$ ein Isomorphismus quadratischer Räume, dann auch f^{-1}. Außerdem gilt $\operatorname{Rang}(\gamma_1) = \operatorname{Rang}(\gamma_2)$. ↖ falls V endlich-dimensional

Beweis. Übung

Normalform symmetrischer Bilinearformen

Satz 33.10

Es sei (V, γ) ein endlich-dimensionaler quadratischer Raum über K mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Dann gilt:

1. V besitzt eine Orthogonalbasis B_V. In dieser ist die Darstellungsmatrix $\mathcal{M}_{B_V^*}^{B_V}(\gamma)$ diagonal.

2. Die Basis B_V kann so gewählt werden, dass die Darstellungsmatrix die folgende Gestalt hat:

$$\mathcal{M}_{B_V^*}^{B_V}(\gamma) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \alpha_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$r = \mathrm{Rang}(\gamma)$, $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in K \setminus \{0\}$ nicht eindeutig

Normalform symmetrischer BLF in reellen Vektorräumen

über $K=\mathbb{R}$

Satz 33.13

Es sei (V, γ) ein endlich-dimensionaler quadratischer Raum über $\mathbb{R}$. Dann gilt: V besitzt eine Orthogonalbasis B_V, bzgl. der die Darstellungsmatrix die Gestalt

$+1 \ldots +1$ $\qquad$ $-1 \ldots -1$

$$\mathcal{M}_{B_V^*}^{B_V}(\gamma) = \begin{bmatrix} I_{n_+} & & \\ & -I_{n_-} & \\ & & 0_{n_0} \end{bmatrix}$$

$n_+ + n_- = r = \operatorname{Rang}(\gamma)$

hat. Dabei ist die **Signatur** (n_+, n_-, n_0) eindeutig bestimmt.

Hintergrund: Wurzelziehen in $\mathbb{R}$ (Konsequenz aus der Supremumsvollständigkeit von $\mathbb{R}$)

Außerdem ist $\mathbb{R}$ ein geord. Körper.

Trägheitssatz von Sylvester

Satz 33.14

Weiter sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch, $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gibt es eine reguläre Matrix $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, sodass $T^{-\mathsf{T}} A \, T^{-1}$ eine Diagonalmatrix der Gestalt

$$\begin{bmatrix} I_{n_+} & & \\ & -I_{n_-} & \\ & & 0_{n_0} \end{bmatrix}$$

ist. Die Anzahl der Diagonaleinträge, die gleich $+1$, -1 oder 0 sind, also die Signatur der durch A induzierten Bilinearform γ_A, ist durch A eindeutig festgelegt.

Der Satz wird oft mit EW formuliert.

Diese sind aber nicht erklärt für Darstellungsmatrizen von BLF!

Satz 33.16

Es sei (V, γ) ein endlich-dimensionaler quadratischer Raum über $\mathbb{C}$. Dann gilt: V besitzt eine Orthogonalbasis B_V, bzgl. der die Darstellungsmatrix die Gestalt

$$\mathcal{M}_{B_V^*}^{B_V}(\gamma) = \begin{bmatrix} I_r & \\ & 0 \end{bmatrix}$$

hat.

<u>Hintergrund</u>: Jedes $\alpha \in \mathbb{C}$ hat zwei komplexe Wurzeln.

geordneter Körper!

Definition 34.1

Vektor

Es sei (V, γ) ein ~~quadratischer~~ Raum über $\mathbb{R}$. mit BLF γ.

nicht notwendig symmetrisch

Eine Bilinearform $\gamma \in \operatorname{Bil}(V, V)$ heißt

1. **positiv definit**, wenn $\gamma(v, v) > 0$ gilt für alle $v \in V \setminus \{0\}$.
2. **positiv semidefinit**, wenn $\gamma(v, v) \geqslant 0$ gilt für alle $v \in V$.
3. **negativ definit**, wenn $\gamma(v, v) < 0$ gilt für alle $v \in V \setminus \{0\}$.
4. **negativ semidefinit**, wenn $\gamma(v, v) \leqslant 0$ gilt für alle $v \in V$.
5. **indefinit**, wenn γ weder positiv semi-definit noch negativ semi-definit ist, wenn es also Vektoren $v_1, v_2 \in V$ gibt mit $\gamma(v_1, v_1) > 0$ und $\gamma(v_2, v_2) < 0$.

Gleiche Sprechweise verwenden wir für Darstellungsmatrizen von BLF γ über reellen Vektorräumen, z.B. A ist pos. semidefinit $:\Leftrightarrow x^T A x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

Definition 34.3

Es sei (V, γ) ein quadratischer Raum über $\mathbb{R}$.

Die symmetrische Bilinearform γ heißt ein **Innenprodukt auf V**, wenn γ positiv definit ist. $\gamma(u,v) = \gamma(v,u)$ und $\gamma(v,v) > 0 \ \forall v \neq 0$.

In diesem Fall heißt (V, γ) auch ein **reeller Innenproduktraum** oder **Euklidischer Raum**.

Innenprodukt heißt auch Skalarprodukt.

Verwechslungsgefahr mit
S-Multiplikation
$\alpha \cdot v \in V$, $\alpha \in K$

Signatur ist $(n,0,0)$.

Beispiel 34.5

1.
$$\gamma\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (x, y) \mapsto y^\mathsf{T} x = \sum_{i=1}^n x_i\, y_i \in \mathbb{R}$$

heißt das **Standardinnenprodukt** auf $\cancel{K}^n$. $\mathbb{R}^n$

repräsentiert durch die Einheitsmatrix I_n

$$\gamma\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-7\\4\end{pmatrix}\right) = 1\cdot(-7) + 2\cdot 4 = 1.$$

Es reicht beim Test auf Definitheit nicht aus, nur die Werte $\gamma(v_i, v_i)$ auf einer Basis zu prüfen!

Beispiel 34.5

2. Für

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

und die induzierte Bilinearform γ_A gilt

$$\gamma(e_1, e_1) = \gamma(e_2, e_2) = 1,$$

aber

$$\gamma\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}^{T} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\gamma(e_1+e_2, e_1+e_2)$

$$= -2 < 0.$$

$\Rightarrow$ indefinit

Lemma 34.6

Es sei (V, γ) ein Euklidischer Raum.

Ist $(v_1, \ldots, v_k)$ eine orthogonale Familie von Vektoren in $V \setminus \{0\}$, $k \in \mathbb{N}_0$, dann ist $(v_1, \ldots, v_k)$ linear unabhängig.

Beweis. Ansatz $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j v_j = 0$

$$0 = \gamma\Big(v_i, \sum_{j=1}^{k} \alpha_j v_j\Big)$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \underbrace{\gamma(v_i, v_j)}_{= 0 \text{ für } i \neq j} = \alpha_i \underbrace{\gamma(v_i, v_i)}_{> 0}$$

$\Rightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, k.$

Satz 34.7

Es sei (V, γ) ein Euklidischer Raum. Dann gilt:

$$\gamma(u, v)^2 \leqslant \gamma(u, u)\,\gamma(v, v)$$

$$\Longleftrightarrow |\gamma(u,v)| \le \sqrt{\gamma(u,u)}\,\sqrt{\gamma(v,v)}$$

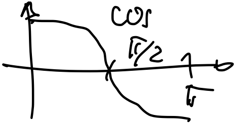
für alle $u, v \in V$.

Gleichheit gilt genau dann, wenn (u, v) linear abhängig ist.

Das gilt für **jedes** Innenprodukt auf V!

Erlaubt z.B. Def. eines Winkels für $u, v \neq 0$

$$\varphi := \arccos \frac{\gamma(u,v)}{\sqrt{\gamma(u,u)}\,\sqrt{\gamma(v,v)}} \in [-1, 1]$$



Norm definiert einen Längenbegriff

Definition 34.9

Es sei (V, γ) ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.

1. Eine Abbildung $\|\cdot\| \colon V \to \mathbb{R}$ heißt eine **Norm auf V**, wenn gilt:

$$\|u\| \geqslant 0 \quad \text{und} \quad \|u\| = 0 \;\Rightarrow\; u = 0 \qquad \text{positive Definitheit}$$

$$\|\alpha\, u\| = |\alpha|\, \|u\| \qquad \text{absolute Homogenität}$$

Betrag in $\mathbb{R}$

$$\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\| \qquad \text{Dreiecksungleichung}$$

Subadditivität

für alle $u, v \in V$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. Das Paar $(V, \|\cdot\|)$ heißt ein **normierter reeller Vektorraum**.

Jedes Innenprodukt induziert eine Norm

CSU: $\gamma(u,v) \le |\gamma(u,v)| \le \|u\|_\gamma \|v\|_\gamma$

Satz 34.10

Es sei (V,γ) ein Euklidischer Raum. Dann definiert

$$\|\cdot\|_\gamma \colon V \ni u \mapsto \|u\|_\gamma := \sqrt{\underbrace{\gamma(u,u)}_{\ge 0}} \in \mathbb{R}$$

eine Norm auf V.

Beweis. 1) $\|u\|_\gamma \ge 0$ ✓ $\quad \|u\|_\gamma = 0 \Leftrightarrow \gamma(u,u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$

2) $\|\alpha u\|_\gamma^2 = \gamma(\alpha u, \alpha u) = \alpha^2 \gamma(u,u)$

$\Rightarrow \|\alpha u\|_\gamma = |\alpha| \sqrt{\gamma(u,u)} = |\alpha| \, \|u\|_\gamma$

3) $\|u+v\|_\gamma^2 = \gamma(u+v, u+v) = \gamma(u,u) + 2\gamma(u,v) + \gamma(v,v)$

$= \|u\|_\gamma^2 + 2\gamma(u,v) + \|v\|_\gamma^2$

$\underset{\text{CSU}}{\le} \|u\|_\gamma^2 + 2\|u\|_\gamma \|v\|_\gamma + \|v\|_\gamma^2 = \left(\|u\|_\gamma + \|v\|_\gamma\right)^2$

Satz des Pythagoras

Satz 34.11

Es sei (V, γ) ein Euklidischer Raum. Ist die Familie $(v_1, \ldots, v_k)$ orthogonal, dann gilt

$$\Big\| \sum_{i=1}^k v_i \Big\|^2 = \sum_{i=1}^k \|v_i\|^2.$$

Definition 34.12

Es sei (V, γ) ein Euklidischer Raum mit Norm $\|\cdot\|$.

1. Ein Vektor $u \in V$ heißt ein **normierter Vektor** oder **Einheitsvektor**, wenn $\|u\| = 1$ gilt.

2. Eine Menge $E \subseteq V$ in V heißt **orthonormal bzgl.** γ, wenn die Menge orthogonal ist und alle Elemente normiert sind.

3. Eine Familie $(v_i)_{i \in I}$ in V heißt **orthonormal bzgl.** γ, wenn die Familie orthogonal ist und alle ihre Mitglieder normiert sind.

4. Eine Familie $B := (v_i)_{i \in I}$ in V heißt eine **Orthonormalbasis** (ONB), wenn B eine Basis von V und außerdem orthonormal bzgl. γ ist.

Satz 34.13

Es sei (V, γ) ein endlich-dimensionaler Euklidischer Raum.

Dann gilt: V besitzt eine Orthonormalbasis B_V.

Die Darstellungsmatrix erfüllt daher

$$\mathcal{M}_{B_V^*}^{B_V}(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_i = \gamma(v_i, v_i) = \|v_i\|^2$$

Definition 34.14

Es sei (V, γ) ein Euklidischer Raum und $u \in V$, $u \neq 0$.

Dann ist durch

$\in \langle u \rangle$

$$\operatorname{proj}_u^\gamma \colon V \ni v \mapsto \operatorname{proj}_u^\gamma(v) := \underbrace{\frac{\gamma(v, u)}{\|u\|^2}}_{\in \mathbb{R}} u \in V$$

$v \perp u$
$\Leftrightarrow \operatorname{proj}_u^\gamma(v) = 0$

die **orthogonale Projektion bzgl. γ auf $\langle u \rangle$** definiert.

$\operatorname{proj}_u^\gamma(v)$ = „Anteil von v in $\langle u \rangle$"

Hängt von γ ab!

Eigenschaften der orthogonalen Projektion

Lemma 34.15

Es sei (V, γ) ein Euklidischer Raum und $u \in V$, $u \neq 0$. Dann gilt:

1. $$\operatorname{proj}_u^\gamma \colon V \ni v \mapsto \operatorname{proj}_u^\gamma(v) := \frac{\gamma(v, u)}{\|u\|^2}\, u \in V$$

   definiert eine Projektion.

2. Es gilt $V = \operatorname{Bild}\bigl(\operatorname{proj}_u^\gamma\bigr) \oplus \operatorname{Kern}\bigl(\operatorname{proj}_u^\gamma\bigr)$.

   Jedes $v \in V$ besitzt also eine eindeutige Zerlegung

   $$v = u^\parallel + u^\perp \quad \text{mit} \quad u^\parallel \in \langle u \rangle \quad \text{und} \quad u^\perp \in \langle u \rangle^\perp.$$

Gram-Schmidt-Verfahren

Algorithmus 34.16

Eingabe: K Körper mit $\operatorname{char}(K) \neq 2$
Eingabe: V ein Vektorraum über K
Eingabe: γ ein Innenprodukt auf V
Eingabe: linear unabhängige Familie $(v_1, \ldots, v_k)$ in V
Ausgabe: orthogonale Familie mit $\langle u_1, \ldots, u_k \rangle = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$

for $j = 1, \ldots, k$ **do**

    Setze $u_j \leftarrow v_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\gamma(v_j, u_i)}{\cancel{\alpha_j}\,\alpha_i} u_i$

    Bestimme $\alpha_j := \|u_j\|^2$

end for

return $(u_1, \ldots, u_k)$

Satz 34.18

Es sei (V, γ) ein Euklidischer Raum.

Ist $(u_1, \ldots, u_k)$ eine linear unabhängige Familie in V, dann liefert das Gram-Schmidt-Verfahren eine orthogonale Familie $(v_1, \ldots, v_k)$ von V mit der Eigenschaft $\langle v_1, \ldots, v_j \rangle = \langle u_1, \ldots, u_j \rangle$ für alle $j = 1, \ldots, k$.

Beweis. Übung