Lineare Algebra II

Woche 10

18.06.2024 und 20.06.2024

Frobenius-Normalform vs. Jordan-Normalform von A

Frobenius-Normalform

Zerlegung in direkte Summe A-invarianter Unterräume der Bauart

$$\langle x_1,\ A\,x_1,\ A^2\,x_1, \ldots, A^{m-1}\,x_1 \rangle,$$

repräsentiert jeweils durch ein lokales Minimalpolynom.

$$\begin{bmatrix} C_{p_1} & & & \\ & C_{p_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_{p_k} \end{bmatrix}$$

Jordan-Normalform

Zerlegung in direkte Summe A-invarianter Unterräume verallgemeinerter Eigenräume

Verallgemeinerte Eigenvektoren

Definition 30.1

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

1. Ein Vektor $x \in K^n \setminus \{0\}$ heißt ein **verallgemeinerter Eigenvektor** oder **Hauptvektor** zum **Eigenwert** $\lambda \in K$ **der Matrix** A, wenn

$$(\lambda\, I - A)^k\, x = 0$$

   für ein $k \in \mathbb{N}$ gilt.

2. Die Menge

$$\operatorname{GEig}(A, \lambda) := \left\{ x \in K^n \,\middle|\, (\lambda\, I - A)^k\, x = 0 \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \right\}$$

   heißt der **verallgemeinerte Eigenraum** zu $\lambda \in K$.

Verallgemeinerte Eigenräume sind A-invariant

Eigenschaften der Kerne aufsteigender Potenzen

Für jede quadratische Matrix A gilt

$$\{0\} = \operatorname{Kern}(A^0) \subseteq \operatorname{Kern}(A^1) \subseteq \operatorname{Kern}(A^k) \subseteq \operatorname{Kern}(A^{k+1}) \subseteq \cdots$$

Lemma 30.2

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$\operatorname{Kern}(A^n) = \operatorname{Kern}(A^{n+j}) \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N}_0.$$

$$\operatorname{GEig}(A, \lambda) = \operatorname{Kern}\big((\lambda\, I - A)^n\big)$$

Zerlegung in verallgemeinerte Eigenräume

Satz 30.3 (Version für Matrizen)

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Wenn das charakteristische Polynom χ_A wie in

$$\chi_A = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}$$

vollständig in Linearfaktoren zerfällt, dann gilt:

$$K^n = \bigoplus_{j=1}^{s} \operatorname{GEig}(A, \lambda_j).$$

Innere Struktur verallgemeinerter Eigenräume

$$
\begin{aligned}
(\lambda I - A)\, x_1 &= 0 \\
(\lambda I - A)\, x_2 &= -x_1 \\
(\lambda I - A)\, x_3 &= -x_2 \\
\vdots \qquad \vdots \; &= \; \vdots \\
(\lambda I - A)\, x_r &= -x_{r-1}
\end{aligned}
$$

Darstellungsmatrix von f_A auf dem Unterraum $\langle x_1,\ x_2,\ \ldots, x_r \rangle$:

$$
\begin{bmatrix}
 & & & \\
& & & \\
& & & \\
& & &
\end{bmatrix}
$$

Jordan-Block und Jordan-Matrix

Definition 30.5

Es sei K ein Körper.

1. Es sei $\lambda \in K$ und $r \in \mathbb{N}$. Dann heißt die Matrix

$$J_r(\lambda) \coloneqq \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \in K^{r \times r}$$

   der **Jordan-Block** der Größe $r \times r$ mit Diagonaleintrag λ.

2. Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$, $n \in \mathbb{N}_0$, heißt eine **Jordan-Matrix**, wenn sie eine Blockdiagonalmatrix aus lauter Jordan-Blöcken ist.

Eigenschaften von Jordan-Blöcken

Bemerkung 30.6

1. Für $r = 1$ ergibt sich $J_1(\lambda) = \big(\lambda\big) \in K^{1\times 1}$.

2. Der Jordan-Block $J_r(\lambda)$ ist ähnlich zur Begleitmatrix C_p des Polynoms $p = (t-\lambda)^r \in K[t]$ und daher

$$\chi_{J_r(\lambda)} = \mu_{J_r(\lambda)} = (t-\lambda)^r \in K[t].$$

3. $\lambda \in K$ ist der einzige Eigenwert von $J_r(\lambda)$. Dieser weist die größtmögliche Differenz zwischen seiner algebraischen und geometrischen Vielfachheit auf, denn es gilt

$$\mu^{\text{alg}}(J_r(\lambda),\lambda) = r \quad \text{und} \quad \mu^{\text{geo}}(J_r(\lambda),\lambda) = 1.$$

Jordan-Normalform

Satz 30.7 (Version für Matrizen)

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Wenn das charakteristische Polynom χ_A vollständig in Linearfaktoren zerfällt, dann gilt:

1. A ist ähnlich zu einer Jordan-Matrix

$$\begin{bmatrix} J_{r_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{r_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{r_k}(\lambda_k) \end{bmatrix}$$

2. Die Jordan-Normalformen von A unterscheiden sich nur in der Reihenfolge ihrer Jordan-Blöcke.

Eigenschaften der Jordan-Normalform

Bemerkung 30.8

$$\begin{bmatrix} J_{r_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{r_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{r_k}(\lambda_k) \end{bmatrix}$$

- $\mu^{\text{alg}}(A, \lambda) = \sum_{\lambda_j = \lambda} r_j$
- $\mu^{\text{geo}}(A, \lambda) = \sum_{\lambda_j = \lambda} 1$

$$\chi_A = \prod_{j=1}^{k} (t - \lambda_j)^{r_j}$$

$$\mu_A = \prod_{\lambda \in \Lambda(A)} (t - \lambda)^{\max\{r_j \,|\, \lambda_j = \lambda\}}$$

Beispiel 30.9

1. Die Matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -4 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$ besitzt das charakteristische Polynom und Minimalpolynom $\chi_A = \mu_A = (\lambda - 2)^3$.

Beispiel 30.9

2. Die Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ besitzt das charakteristische Polynom $\chi_A = (\lambda - 2)^3$ und das Minimalpolynom $\mu_A = (\lambda - 2)^2$.

Beispiel 30.9

3. Die Matrix $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & 3 \\ -1 & 5 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$ besitzt das charakteristische Polynom $\chi_A = (\lambda - 3)^3(\lambda - 2)$ und das Minimalpolynom $\mu_A = (\lambda - 3)^2(\lambda - 2)$.

Jordan-Normalform

Beispiel 30.9

4. Die Darstellungsmatrix der Ableitungsabbildung $f : K_n[t] \to K_n[t]$ bzgl. der Monombasis $\left(t^0, t^1, t^2, \ldots, t^n\right)$ ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Wiederholung: Bilinearformen auf einem Vektorraum

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K.

Eine Abbildung $\gamma\colon V \times V \to K$ heißt eine **Bilinearform** auf $V \times V$, wenn für jedes feste $\overline{u} \in V$ und jedes feste $\overline{v} \in V$ die Abbildungen

$$\gamma(\overline{u}, \cdot)\colon V \ni v \mapsto \gamma(\overline{u}, v) \in K$$
$$\gamma(\cdot, \overline{v})\colon V \ni u \mapsto \gamma(u, \overline{v}) \in K$$

beide linear sind.

Die Menge $\operatorname{Bil}(V, V)$ aller Bilinearformen $V \times V \to K$ ist ein K-Vektorraum.

Wiederholung: Bilinearformen auf einem Vektorraum

Wir nennen eine Bilinearform

$$\begin{aligned}
&\textbf{symmetrisch}\text{, wenn} \quad && \gamma(u,v) = \gamma(v,u) \quad \text{für alle } u, v \in V \\
&\textbf{schiefsymmetrisch}\text{, wenn} \quad && \gamma(u,v) = -\gamma(v,u) \quad \text{für alle } u, v \in V \\
&\textbf{alternierend}\text{, wenn} \quad && u = v \quad \Rightarrow \quad \gamma(u,v) = 0
\end{aligned}$$

gilt.

- Jede alternierende Bilinearform ist schiefsymmetrisch.
- Im Fall $\operatorname{char}(K) \neq 2$ ist auch jede schiefsymmetrische Bilinearform alternierend.

Bilinearformen auf einem Vektorraum

Beispiel 31.1

1. Für jede Matrix $A \in K^{n \times n}$ ist die Abbildung

$$K^n \times K^n \ni (x, y) \mapsto y^\mathsf{T} A x \in K$$

eine Bilinearform auf K^n.

Die Symmetrieeigenschaften von γ_A sind die von A.

Beispiel 31.1

2. Ein bestimmtes Integral über das Produkt zweier Polynome, z. B.

$$K[t] \times K[t] \ni (p, q) \mapsto \int_0^1 \widetilde{p}(t) \cdot \widetilde{q}(t) \, \mathrm{d}t \in K$$

ist eine symmetrische Bilinearform auf $K[t]$.

Darstellungsmatrix einer Bilinearform

Definition 31.2

Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem Körper K und $\gamma \in \mathrm{Bil}(V, V)$. Weiter sei $B_V = (v_1, \ldots, v_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$, eine Basis von V.

Die Matrix

$$\mathcal{M}_{B_V^*}^{B_V}(\gamma) = \big(\gamma(v_i, v_j)\big)_{i,j=1}^{n} \in K^{n \times n}$$

heißt die **Darstellungsmatrix** der Bilinearform γ bzgl. der Basis B_V.

Darstellungsmatrix einer Bilinearform

Bemerkung 31.3

$\gamma \in \operatorname{Bil}(V, V)$ kann identifiziert werden mit $\widehat{\gamma} \in \operatorname{Hom}(V, V^*)$ durch

Ist V endlich-dimensional, dann ist die zu $\gamma \in \operatorname{Hom}(V, V^*)$ **duale Bilinearform** $\gamma^* \colon V^{**} \cong V \to V^*$ definiert durch

$$\gamma^*(u, v) = \gamma(v, u)$$

für $u, v \in V$.

Transformation der Darstellungsmatrix

Satz 31.4

Es seien K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K. Weiter seien B_V und $\widehat{B}_V$ Basen von V.

Dann gilt für die Darstellungsmatrix einer Bilinearform $\gamma \colon V \times V \to K$:

$$\mathcal{M}^{\widehat{B}_V}_{\widehat{B}_V^*}(\gamma) = \mathcal{T}^{B_V^*}_{\widehat{B}_V^*} \, \mathcal{M}^{B_V}_{B_V^*}(\gamma) \, \mathcal{T}^{\widehat{B}_V}_{B_V} .$$

Kongruente Matrizen

Definition 31.5

Es seien K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_0$.

Zwei Matrizen $A, \widehat{A} \in K^{n \times n}$ heißen **kongruent**, wenn es eine invertierbare Matrix $T \in K^{n \times n}$ gibt, sodass gilt:

$$\widehat{A} = T^{-\mathsf{T}} A \, T^{-1}.$$

Kongruente Matrizen

Satz 31.6

Es seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}_0$ und $A, \widehat{A} \in K^{n \times n}$. Weiter sei V ein Vektorraum über K mit $\dim(V) = n$ und B_V eine Basis von V mit dualer Basis B_V^*, $\gamma\colon V \times V \to K$ eine Bilinearform und $A = \mathcal{M}_{B_V^*}^{B_V}(\gamma)$.

Dann sind äquivalent:

1. A und $\widehat{A}$ sind kongruente Matrizen.
2. $\widehat{A}$ ist die Darstellungsmatrix von γ bzgl. einer geeigneten Basis $\widehat{B}_V$ und zugehöriger dualer Basis $\widehat{B}_V^*$.

Versch. Transformationsverhalten von Darstellungsmatrizen

Bemerkung 31.7

Name	Transformation	Darstellungsmatrizen von
Äquivalenztransform.	$S\,A\,T^{-1}$	$\mathrm{Hom}(V, W)$
Ähnlichkeitstransform.	$T\,A\,T^{-1}$	$\mathrm{End}(V)$
Kongruenztransform.	$T^{-\mathsf{T}} A\,T^{-1}$	$\mathrm{Bil}(V, V) \cong \mathrm{Hom}(V, V^*)$

- Einer Matrix kann man nicht ansehen, welche Art von Abbildung sie repräsentiert!
- Beispielsweise ist die Frage nach Eigenwerten einer Matrix oder nach ihrer Jordan-Normalform nur dann sinnvoll, wenn diese einen Endomorphismus repräsentiert!

Rang einer Bilinearform

Definition 31.8

Es seien K ein Körper und V ein Vektorraum über K mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei $\gamma\colon V \times V \to K$ eine Bilinearform und $A = \mathcal{M}_{B_V^*}^{B_V}(\gamma) \in K^{n \times n}$ ihre Darstellungsmatrix bzgl. einer beliebigen Basis B_V von V.

Wir definieren den **Rang** der Bilinearform γ durch

$$\operatorname{Rang}(\gamma) \coloneqq \operatorname{Rang}(A).$$

Nicht-ausgeartete und perfekte Bilinearformen

Definition 31.9

Es seien K ein Körper und V ein Vektorraum über K. Weiter sei $\gamma\colon V \times V \to K$ eine Bilinearform.

1. γ heißt **nicht ausgeartet**, wenn die linearen Abbildungen

$$V \ni u \mapsto \gamma(u, \cdot) \in V^*$$
$$V \ni v \mapsto \gamma(\cdot, v) \in V^*$$

   beide injektiv sind. Andernfalls heißt γ **ausgeartet**.

2. γ heißt **perfekt**, wenn die linearen Abbildungen

$$V \ni u \mapsto \gamma(u, \cdot) \in V^*$$
$$V \ni v \mapsto \gamma(\cdot, v) \in V^*$$

   beide bijektiv sind.

Lemma 31.10

Es seien K ein Körper und V ein Vektorraum über K. Weiter sei $\gamma \colon V \times V \to K$ eine Bilinearform.

Dann sind äquivalent:

1. γ ist nicht entartet.
2. Es gelten
$$\begin{aligned} \gamma(u,v) = 0 \text{ für alle } v \in V \quad &\Rightarrow \quad u = 0 \\ \gamma(u,v) = 0 \text{ für alle } u \in V \quad &\Rightarrow \quad v = 0 \end{aligned}$$
3. Es gelten
$$\begin{aligned} &\text{für alle } u \neq 0 \text{ existiert } v \in V \text{ mit } \gamma(u,v) \neq 0 \\ &\text{für alle } v \neq 0 \text{ existiert } u \in V \text{ mit } \gamma(u,v) \neq 0 \end{aligned}$$

Nicht-ausgeartete und perfekte Bilinearformen

Lemma 31.11

Es seien K ein Körper und V ein Vektorraum über K mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei $\gamma\colon V \times V \to K$ eine Bilinearform und $A = \mathcal{M}_{B_V^*}^{B_V}(\gamma) \in K^{n \times n}$ ihre Darstellungsmatrix bzgl. einer beliebigen Basis B_V von V.

Dann sind äquivalent:

1. $u \mapsto \gamma(u, \cdot)$ ist injektiv.
2. $v \mapsto \gamma(\cdot, v)$ ist injektiv.
3. γ ist nicht-entartet.
4. γ ist perfekt.
5. A ist regulär.