Lineare Algebra II

Woche 10

18.06.2024 und 20.06.2024

Frobenius-Normalform vs. Jordan-Normalform von A $\dot{x} = Ax$

Eigenräume reichen im Fall $\mu^{geo}(A,\lambda) < \mu^{alg}(A,\lambda)$ nicht aus!

Frobenius-Normalform

Zerlegung in direkte Summe A-invarianter Unterräume der Bauart

$$\langle x_1,\ A\,x_1,\ A^2\,x_1, \ldots, A^{m-1}\,x_1 \rangle,$$

repräsentiert jeweils durch ein lokales Minimalpolynom.

$$\begin{bmatrix} C_{p_1} & & & \\ & C_{p_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_{p_k} \end{bmatrix}$$

Begleitmatrizen

Jordan-Normalform

Zerlegung in direkte Summe A-invarianter Unterräume verallgemeinerter Eigenräume

$$\begin{bmatrix} \square & & \\ & \ddots & \\ & & \square \end{bmatrix}$$

Jordan-Blöcke

Definition 30.1

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

1. Ein Vektor $x \in K^n \setminus \{0\}$ heißt ein **verallgemeinerter Eigenvektor** oder **Hauptvektor** zum **Eigenwert** $\lambda \in K$ **der Matrix** A, wenn

$$(\lambda I - A)^k x = 0 \quad \text{, d.h. } x \in \operatorname{Kern}\left((\lambda I - A)^k\right)$$

für ein $k \in \mathbb{N}$ gilt. Die Stufe ist $k \in \mathbb{N}$, wenn $(\lambda I - A)^k x = 0$, aber $(\lambda I - A)^{k-1} x \neq 0$ gilt.

2. Die Menge $= \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \operatorname{Kern}\left((\lambda I - A)^k\right)$

$$\operatorname{GEig}(A, \lambda) := \left\{x \in K^n \,\middle|\, (\lambda I - A)^k x = 0 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}\right\}$$

heißt der **verallgemeinerte Eigenraum** zu $\lambda \in K$.

nicht notwendig ein EW zur Matrix A!

$$(\lambda I - A)^k x = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda I - A)^k \underbrace{Ax} = 0 \quad \checkmark$$

denn: $(\lambda I - A) A = \lambda A - A^2 = A(\lambda I - A)$

also auch $(\lambda I - A)^k A = (\lambda I - A)^{k-1} A (\lambda I - A)$

$$= \dots = A(\lambda I - A)^k$$

Für jede quadratische Matrix A gilt

Unterraum

$A^k x = 0 \Rightarrow A^{k+1} x = 0$

$$\{0\} = \operatorname{Kern}(\underbrace{A^0}_{I}) \subseteq \operatorname{Kern}(A^1) \subseteq \operatorname{Kern}(A^k) \subseteq \operatorname{Kern}(A^{k+1}) \subseteq \cdots$$

insbesondere

$$\{0\} = \operatorname{Kern}((\lambda I - A)^0) \subseteq \underbrace{\operatorname{Kern}((\lambda I - A)^1)}_{\text{Eigenvektoren}}$$

$$\subseteq \operatorname{Kern}((\lambda I - A)^2) \subseteq \cdots$$

Lemma 30.2 Sättigung spätestens bei $k = n$

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$\operatorname{Kern}(A^n) = \operatorname{Kern}(A^{n+j}) \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N}_0.$$

$$\operatorname{GEig}(A, \lambda) = \operatorname{Kern}\big((\lambda I - A)^n\big)$$

Satz 30.3 (Version für Matrizen)

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Wenn das charakteristische Polynom χ_A wie in

$$\chi_A = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}$$

vollständig in Linearfaktoren zerfällt, dann gilt:

$$K^n = \bigoplus_{j=1}^{s} \operatorname{GEig}(A, \lambda_j).$$

Das ist insbes. der Fall über alg. abgeschlossenen Körpern wie in $\mathbb{C}$.

direkte Summe A-invarianter Unterräume

Innere Struktur verallgemeinerter Eigenräume

λ Eigenwert von A, $x_k \neq 0$ — VEV Stufe

$$Ax_1 = \lambda x_1 \iff (\lambda I - A)\, x_1 = 0 \qquad 1$$

$$Ax_2 = \lambda x_2 + x_1 \iff (\lambda I - A)\, x_2 = -x_1 \Rightarrow (\lambda I - A)^2 x_2 = \underbrace{-(\lambda I - A) x_1}_{=0} \qquad 2$$

$$(\lambda I - A)\, x_3 = -x_2 \qquad 3$$

$$\vdots \qquad \vdots \quad = \quad \vdots \qquad \vdots$$

$$Ax_r = \lambda x_r + x_{r-1} \quad (\lambda I - A)\, x_r = -x_{r-1} \Rightarrow (\lambda I - A)^r x_r = 0 \qquad r$$

Ende, sobald $(\lambda I - A) x_r = -x_{r-1}$ nicht lösbar

Darstellungsmatrix von f_A auf dem Unterraum $\langle \underbrace{x_1, x_2, \dots, x_r}_{\text{Basis}} \rangle$:

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_r \end{array} \\
\begin{array}{c} x_1 \rightarrow \\ \\ \\ x_r \rightarrow \end{array} & \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}
\end{array}$$

lineare Unabhängigkeit:

$$\sum_{k=1}^{r} \alpha_k x_k = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{r} \alpha_k (\lambda I - A)^{r-1} x_k = 0$$

d.h. $\alpha_r (\underbrace{-x_{r-1}}_{\neq 0}) = 0 \Rightarrow \alpha_r = 0$ usw.

Jordan-Block und Jordan-Matrix

Definition 30.5

Es sei K ein Körper.

1. Es sei $\lambda \in K$ und $r \in \mathbb{N}$. Dann heißt die Matrix

$$J_r(\lambda) := \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \in K^{r \times r}$$

   der **Jordan-Block** der Größe $r \times r$ mit Diagonaleintrag λ.

2. Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$, $n \in \mathbb{N}_0$, heißt eine **Jordan-Matrix**, wenn sie eine Blockdiagonalmatrix aus lauter Jordan-Blöcken ist.

Charakt. für das Fehlen von EV sind Jordan-Blöcke mit $r>1$.

Bemerkung 30.6

1. Für $r = 1$ ergibt sich $J_1(\lambda) = (\lambda) \in K^{1\times 1}$.

2. Der Jordan-Block $J_r(\lambda)$ ist ähnlich zur Begleitmatrix C_p des Polynoms $p = (t-\lambda)^r \in K[t]$ und daher
$$\chi_{J_r(\lambda)} = \mu_{J_r(\lambda)} = (t-\lambda)^r \in K[t].$$

3. $\lambda \in K$ ist der einzige Eigenwert von $J_r(\lambda)$. Dieser weist die größtmögliche Differenz zwischen seiner algebraischen und geometrischen Vielfachheit auf, denn es gilt
$$\mu^{\text{alg}}(\overset{J_r(\lambda)}{\cancel{A}}, \lambda) = r \quad \text{und} \quad \mu^{\text{geo}}(\overset{J_r(\lambda)}{\cancel{A}}, \lambda) = 1.$$

Satz 30.7 (Version für Matrizen)

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Wenn das charakteristische Polynom χ_A vollständig in Linearfaktoren zerfällt, dann gilt:

1. A ist ähnlich zu einer Jordan-Matrix

Jordan-Normalform

$$\begin{bmatrix} J_{r_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{r_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{r_k}(\lambda_k) \end{bmatrix}$$

$k \in \mathbb{N}$

Eigenwerte entsprechend ihres geom. Vielfachheit

2. Die Jordan-Normalformen von A unterscheiden sich nur in der Reihenfolge ihrer Jordan-Blöcke.

Bemerkung 30.8

$$\begin{bmatrix} J_{r_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{r_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{r_k}(\lambda_k) \end{bmatrix}$$

- $\mu^{\text{alg}}(A, \lambda) = \sum_{\lambda_j = \lambda} r_j$ Summe der Dim. aller J.-Blöcke zu λ
- $\mu^{\text{geo}}(A, \lambda) = \sum_{\lambda_j = \lambda} 1$ Anzahl der J.-Blöcke zu λ

$$\chi_A = \prod_{j=1}^{k} (t - \lambda_j)^{r_j}$$

λ_j kann mehrfach vorkommen

$$\mu_A = \prod_{\lambda \in \Lambda(A)} (t - \lambda)^{\underbrace{\max\{r_j \mid \lambda_j = \lambda\}}_{\text{Größe des gr. J.-Blocks zu } \lambda}}$$

Beispiel 30.9

1. Die Matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -4 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ besitzt das charakteristische Polynom und Minimalpolynom $\chi_A = \mu_A = (\lambda - 2)^3$.

Es gibt also nur einen J-Block: $J_3(2)$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

Beispiel 30.9

2. Die Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ besitzt das charakteristische Polynom $\chi_A = (\lambda - 2)^3$ und das Minimalpolynom $\mu_A = (\lambda - 2)^2$.

Alle J.-Blöcke gehören zu 2. Größter: $J_2(2)$

Notwendig. weiteres J.-Block $J_1(2)$.

$$\hat{A} = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & \\ & 2 & \\ \hline & & 2 \end{array}\right]$$

Beispiel 30.9

3. Die Matrix $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & 3 \\ -1 & 5 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$ besitzt das charakteristische Polynom $\chi_A = (\lambda - 3)^3(\lambda - 2)$ und das Minimalpolynom $\mu_A = (\lambda - 3)^2(\lambda - 2)^1$.

$J_2(3)$ $\quad J_1(2)$ und $J_1(3)$

$$\hat{A} = \left[\begin{array}{cc|c|c} 3 & 1 & & \\ & 3 & & \\ \hline & & 3 & \\ \hline & & & 2 \end{array}\right]$$

n Fakultät

Beispiel 30.9

4. Die Darstellungsmatrix der Ableitungsabbildung $f: K_n[t] \to K_n[t]$ bzgl. der Monombasis $\left(t^0, t^1, \frac{1}{2}t^2, \ldots, \frac{1}{n!}t^n\right)$ ist

$$J_{n+1}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \cancel{2}\;1 & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & \cancel{n}\;1 \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in K^{(n+1)\times(n+1)}$$

Wiederholung: Bilinearformen auf einem Vektorraum

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K. oder: auf V

Eine Abbildung $\gamma\colon V \times V \to K$ heißt eine **Bilinearform** auf $V \times V$, wenn für jedes feste $\overline{u} \in V$ und jedes feste $\overline{v} \in V$ die Abbildungen

$$\gamma(\overline{u}, \cdot)\colon V \ni v \mapsto \gamma(\overline{u}, v) \in K$$
$$\gamma(\cdot, \overline{v})\colon V \ni u \mapsto \gamma(u, \overline{v}) \in K$$

beide linear sind. $\gamma(\bar{u}, \cdot) \in V^*$ und $\gamma(\cdot, \bar{v}) \in V^*$

Die Menge $\operatorname{Bil}(V, V)$ aller Bilinearformen $V \times V \to K$ ist ein K-Vektorraum.

Wiederholung: Bilinearformen auf einem Vektorraum

Wir nennen eine Bilinearform

$$\begin{aligned} \textbf{symmetrisch}, \text{ wenn} \quad & \gamma(u,v) = \gamma(v,u) \quad \text{für alle } u, v \in V \\ \textbf{schiefsymmetrisch}, \text{ wenn} \quad & \gamma(u,v) = -\gamma(v,u) \quad \text{für alle } u, v \in V \\ \textbf{alternierend}, \text{ wenn} \quad & u = v \quad \Rightarrow \quad \gamma(u,v) = 0 \end{aligned}$$

gilt.

- Jede alternierende Bilinearform ist schiefsymmetrisch.
- Im Fall $\operatorname{char}(K) \neq 2$ ist auch jede schiefsymmetrische Bilinearform alternierend.

Siehe Lemma 22.30

Bilinearformen auf einem Vektorraum

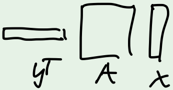
Die durch A induzierte BLF auf K^n

Beispiel 31.1

1. Für jede Matrix $A \in K^{n \times n}$ ist die Abbildung

$$K^n \times K^n \ni (x, y) \mapsto y^\mathsf{T} A x \in K$$

eine Bilinearform auf K^n.



Die Symmetrieeigenschaften von γ_A sind die von A.

$$y^T A x = (y^T A x)^T = x^T A^T y \overset{?}{=} x^T A y$$

$$\iff \quad A = A^T$$

Spezialfall: $\gamma_I(x, y) = y^T x = x^T y$

Beispiel 31.1

2. Die Multiplikation zweier Polynome

$K = \mathbb{R}$

$$K[t] \times K[t] \ni (p, q) \mapsto \cancel{p\, q \in K[t]} \quad \int_0^1 \tilde{p}(t) \cdot \tilde{q}(t)\, dt \in K$$

ist eine symmetrische Bilinearform auf $K[t]$.

Ebenfalls Bilinearform, nicht-symmetrisch:

$(p,q) \mapsto \tilde{p}(0) \cdot \tilde{q}(1) \in K$ und nicht anti-symmetrisch

Nicht-Symmetrie: $p = t+1$, $q = t$

$$\underbrace{\tilde{p}(0) = 1 \qquad \tilde{q}(1) = 1}_{\gamma(p,q) = 1} \qquad\qquad \underbrace{\tilde{q}(0) = 0 \qquad \tilde{p}(1) = 1+1 \in K}_{\gamma(q,p) = 0}$$

Definition 31.2

Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem Körper K und $\gamma \in \operatorname{Bil}(V, V)$. Weiter sei $B_V = (v_1, \ldots, v_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$, eine Basis von V.

Die Matrix

$$A := \mathcal{M}_{B_V^*}^{B_V}(\gamma) = \big(\gamma(v_i, v_j)\big)_{i,j=1}^{n} \in K^{n\times n}$$

Fundamentalmatrix

heißt die **Darstellungsmatrix** der Bilinearform γ bzgl. der Basis B_V.

$$u = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, \quad v = \sum_{j=1}^n \beta_j v_j$$

$$\begin{array}{c|cc} i \backslash j & 1 & 2 \\ \hline 1 & \gamma(v_1,v_1) & \gamma(v_1,v_2) \\ 2 & \cdots & \cdots \end{array}$$

$$\Rightarrow \gamma(u,v) = \gamma\Big(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^n \beta_j v_j\Big)$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j \gamma(v_i, v_j) = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_n\end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots \\ \beta_n\end{pmatrix}$$

Darstellungsmatrix einer Bilinearform

Bemerkung 31.3

$\gamma \in \operatorname{Bil}(V, V)$ kann identifiziert werden mit $\widehat{\gamma} \in \operatorname{Hom}(V, V^*)$ durch

$$\gamma(\cdot, v) = \hat{\gamma}(v)$$

eigentlich: $\mathcal{M}^{B_V}_{B_{V^*}}(\hat{\gamma})$

Wir unterscheiden γ und $\hat{\gamma}$ nicht!

Ist V endlich-dimensional, dann ist die zu $\gamma \in \operatorname{Hom}(V, V^*)$ **duale Bilinearform** $\gamma^* \colon \underbrace{V^{**} \cong V} \to V^*$ definiert durch

$$\boxed{\gamma^*(u, v) = \gamma(v, u)}$$

Tausch der Argumente

$f: U \to V$

$f^*: V^* \to U^*$

duales Homomorphismus

für $u, v \in V$.

alt neu

Satz 31.4

Es seien K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K. Weiter seien B_V und $\widehat{B}_V$ Basen von V.

Dann gilt für die Darstellungsmatrix einer Bilinearform $\gamma\colon V \times V \to K$:

$$\mathcal{M}_{\widehat{B}_V^*}^{\widehat{B}_V}(\gamma) = \mathcal{T}_{\widehat{B}_V^*}^{B_V^*}\, \mathcal{M}_{B_V^*}^{B_V}(\gamma)\, \mathcal{T}_{B_V}^{\widehat{B}_V}.$$

Symmetrieerhaltung! $\hat{A} = \underbrace{T^{-T} A T^{-1}}$ Transponierte voneinander

Konvention: $T = \mathcal{T}_{\widehat{B}_V}^{B_V}$ „von alt nach neu"

Definition 31.5

Es seien K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_0$.

Zwei Matrizen $A, \widehat{A} \in K^{n \times n}$ heißen **kongruent**, wenn es eine invertierbare Matrix $T \in K^{n \times n}$ gibt, sodass gilt:

$$\widehat{A} = T^{-\mathsf{T}} A \, T^{-1}.$$

Kongruenz ist Äquivalenztransformation.

$\hat{A}$ ist symm. $\Leftrightarrow$ A ist symm.

Kongruente Matrizen

Satz 31.6

Es seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}_0$ und $A, \widehat{A} \in K^{n \times n}$. Weiter sei V ein Vektorraum über K mit $\dim(V) = n$ und B_V eine Basis von V mit dualer Basis B_V^*, $\gamma\colon V \times V \to K$ eine Bilinearform und $A = \mathcal{M}_{B_V^*}^{B_V}(\gamma)$.

Dann sind äquivalent:

1. A und $\widehat{A}$ sind kongruente Matrizen.
2. $\widehat{A}$ ist die Darstellungsmatrix von γ bzgl. einer geeigneten Basis $\widehat{B}_V$ und zugehöriger dualer Basis $\widehat{B}_V^*$.

dieselbe BLF

Versch. Transformationsverhalten von Darstellungsmatrizen

Bemerkung 31.7

Name	Transformation	Darstellungsmatrizen von
Äquivalenztransform.	$S\,A\,T^{-1}$	$\operatorname{Hom}(V, W)$
Ähnlichkeitstransform.	$T\,A\,T^{-1}$	$\operatorname{End}(V)$
Kongruenztransform.	$T^{-\mathsf{T}} A\,T^{-1}$	$\operatorname{Bil}(V, V) \cong \operatorname{Hom}(V, V^*)$

- Einer Matrix kann man nicht ansehen, welche Art von Abbildung sie repräsentiert!
- Beispielsweise ist die Frage nach Eigenwerten einer Matrix oder nach ihrer Jordan-Normalform nur dann sinnvoll, wenn diese einen Endomorphismus repräsentiert!

Rang einer Bilinearform

Definition 31.8

Es seien K ein Körper und V ein Vektorraum über K mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei $\gamma\colon V \times V \to K$ eine Bilinearform und $A = \mathcal{M}_{B_V^*}^{B_V}(\gamma) \in K^{n \times n}$ ihre Darstellungsmatrix bzgl. einer beliebigen Basis B_V von V.

Wir definieren den **Rang** der Bilinearform γ durch

$$\operatorname{Rang}(\gamma) := \operatorname{Rang}(A).$$

Wohldefiniert, weil Rang einer Matrix unter Äquivalenztr. und insb. unter Kongruenztr. erhalten bleibt (Folgerung 15.41).

Nicht-ausgeartete und perfekte Bilinearformen

Definition 31.9

Es seien K ein Körper und V ein Vektorraum über K. Weiter sei $\gamma\colon V \times V \to K$ eine Bilinearform.

1. γ heißt **nicht ausgeartet**, wenn die linearen Abbildungen

$$V \ni u \mapsto \gamma(u, \cdot) \in V^*$$
$$V \ni v \mapsto \gamma(\cdot, v) \in V^*$$

   beide injektiv sind. Andernfalls heißt γ **ausgeartet**.

2. γ heißt **perfekt**, wenn die linearen Abbildungen

$$V \ni u \mapsto \gamma(u, \cdot) \in V^*$$
$$V \ni v \mapsto \gamma(\cdot, v) \in V^*$$

   beide bijektiv sind.

Bei (Anti-) Symmetrie reicht jeweils eine der Bed.

nicht notwendig endlich-dimensional

Lemma 31.10

Es seien K ein Körper und V ein Vektorraum über K. Weiter sei $\gamma\colon V \times V \to K$ eine Bilinearform.

Dann sind äquivalent:

1. γ ist nicht entartet.
2. Es gelten

   Testen mit allen $v \in V$

   $\ker(u \mapsto \gamma(u,\cdot)) = \{0\}$

$$\gamma(u, v) = 0 \text{ für alle } v \in V \quad \Rightarrow \quad u = 0$$
$$\gamma(u, v) = 0 \text{ für alle } u \in V \quad \Rightarrow \quad v = 0$$

   Testen mit allen $u \in V$

3. Es gelten

$$\text{für alle } u \neq 0 \text{ existiert } v \in V \text{ mit } \gamma(u, v) \neq 0$$
$$\text{für alle } v \neq 0 \text{ existiert } u \in V \text{ mit } \gamma(u, v) \neq 0$$

Lemma 31.11

Es seien K ein Körper und V ein Vektorraum über K mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei $\gamma\colon V \times V \to K$ eine Bilinearform und $A = \mathcal{M}_{B_V^*}^{B_V}(\gamma) \in K^{n \times n}$ ihre Darstellungsmatrix bzgl. einer beliebigen Basis B_V von V.

Dann sind äquivalent:

1. $u \mapsto \gamma(u, \cdot)$ ist injektiv.
2. $v \mapsto \gamma(\cdot, v)$ ist injektiv.
3. γ ist nicht-entartet.
4. γ ist perfekt.
5. A ist regulär.

6 $\operatorname{Rang}(\gamma) = n$