Lineare Algebra II

Woche 09

10.06.2024 und 11.06.2024

Ergänzung zu §24: direkte Summe von Unterräumen

Lemma 24.9

Es sei K ein Körper.

1. Es sei $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$, $s \in \mathbb{N}_0$, paarweise verschiedene Eigenwerte von A, dann ist die Summe der Unterräume $\operatorname{Eig}(A, \lambda_1), \ldots, \operatorname{Eig}(A, \lambda_s)$ direkt.

2. Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und $f \in \operatorname{End}(V)$. Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$, $s \in \mathbb{N}_0$, paarweise verschiedene Eigenwerte von f, dann ist die Summe der Unterräume $\operatorname{Eig}(f, \lambda_1), \ldots, \operatorname{Eig}(f, \lambda_s)$ direkt.

In Lemma 24.7 und Lemma 24.8 wurde das Resultat zunächst nur für zwei verschiedene Eigenwerte formuliert.

Ergänzung zu §24: notwendiges und hinreichendes Kriterium

Satz 24.28 (Version für Matrizen)

Es sei $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Weiter seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$, $s \in \mathbb{N}_0$, die paarweise verschiedenen Eigenwerte von A. Dann sind äquivalent:

1. A ist diagonalisierbar.
2. $K^n = \displaystyle\bigoplus_{j=1}^{s} \operatorname{Eig}(A, \lambda_j)$.
3. $\displaystyle\sum_{j=1}^{s} \mu^{\text{geo}}(A, \lambda_j) = n$.
4. Das charakteristische Polynom χ_A zerfällt vollständig in Linearfaktoren, und es gilt $\mu^{\text{alg}}(A, \lambda_j) = \mu^{\text{geo}}(A, \lambda_j)$ für alle $j = 1, \ldots, s$.

Das Beispiel 24.29 (mögliche Ursachen fehlender Diagonalisierbarkeit) hat das Resultat zwar suggeriert, aber es war nicht formuliert/bewiesen.

Minimalpolynom einer Diagonalmatrix

Lemma 28.11

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ eine Diagonalmatrix

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{bmatrix}$$

Ist $\{b_1, \ldots, b_s\} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ und sind $b_1, \ldots, b_s$ paarweise verschieden, dann gilt

$$\mu_A = (\lambda - b_1) \cdots (\lambda - b_s).$$

Notwendiges und hinreichendes Krit. für Diagonalisierbarkeit

Satz 28.12 (Version für Matrizen)

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ eine Matrix.

Dann sind äquivalent:

1. A ist diagonalisierbar.
2. Das Minimalpolynom μ_A zerfällt in Linearfaktoren und besitzt nur einfache Nullstellen.

Beispiel 28.13 (vgl. Beispiel 28.8)

1. Die Matrix
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$$
besitzt das Minimalpolynom $\mu_A = (\lambda - 1)\,(\lambda + 1)$

2. Die Matrix
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -8 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$
besitzt das Minimalpolynom $\mu_A = (\lambda + 1)^2\,(\lambda - 3)$

Notwendiges und hinreichendes Krit. für Diagonalisierbarkeit

Beispiel 28.13 (vgl. Beispiel 28.8)

3. Die Matrix
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -6 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$
besitzt das Minimalpolynom $\mu_A = (\lambda + 1)\,(\lambda - 3)$

Begleitmatrix

Definition 28.14

Es sei K ein Körper und

$$p = \lambda^n + \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j \, \lambda^j \in K[\lambda]$$

ein normiertes Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}_0$. Die Matrix

$$C_p := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & -\alpha_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \in K^{n \times n}$$

heißt die **Begleitmatrix** von p.

Polynome von Begleitmatrizen

Lemma 28.15

Es sei K ein Körper und $p \in K[\lambda]$ ein normiertes Polynom. Dann gilt:

$$\chi_{C_p} = \mu_{C_p} = p.$$

Beweis. Die Behauptung für

$$\chi_{C_p} = \det(\lambda I - C_p) = \det \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha_0 \\ -1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots & \alpha_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & \lambda & \alpha_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & \lambda + \alpha_n \end{pmatrix}$$

kann man mit Laplaceschem Entwicklungssatz und Induktion zeigen.

Lokal annullierende Polynome

Lemma 29.1

Es sei K ein Körper.

1. Es sei $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Für $x \in K^n$ ist die Menge
$$J_{A,x} := \{p \in K[\lambda] \,|\, \widetilde{p}(A)\, x = 0\}$$
ein Ideal in $K[\lambda]$ ungleich dem Nullideal.

2. Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K und $f \in \operatorname{End}(V)$. Für $v \in V$ ist die Menge
$$J_{f,v} := \{p \in K[\lambda] \,|\, \widetilde{p}(f)(v) = 0\}$$
ein Ideal in $K[\lambda]$ ungleich dem Nullideal.

Lokales Minimalpolynom

Definition 29.2

Es sei K ein Körper.

1. Es sei $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in K^n$.

   Das eindeutig bestimmte normierte Polynom $\mu_{A,x}$ geringsten Grades mit der Eigenschaft $\mu_{A,x} \in J_{A,x}$ heißt das **(lokale) Minimalpolynom von A bzgl. x**.

2. Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem Körper K. Weiter sei $f \in \operatorname{End}(V)$ und $v \in V$.

   Das eindeutig bestimmte normierte Polynom $\mu_{f,v}$ geringsten Grades mit der Eigenschaft $\mu_{f,v} \in J_{f,v}$ heißt das **(lokale) Minimmalpolynom von f bzgl. v**.

Satz 29.3

Es sei K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K mit der Basis $B_V = (v_1, \ldots, v_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei $f \in \operatorname{End}(V)$ und $A = \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f)$.

Dann gilt für $v \in V$ und seinen Koordinatenvektor $x = \Phi_{B_V}^{-1}(v)$:

$$\mu_{f,v} = \mu_{A,x}.$$

Beweis. Übung

Beispiel 29.4

1.

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A\,x = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} x = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A^2\,x = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{bmatrix} x = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A^0\,x & A^1\,x & A^2\,x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Bestimmung des lokalen Minimalpolynoms

Beispiel 29.4

2

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A\,y = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A^2\,y = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{bmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A^0\,y & A^1\,y & A^2\,y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Das lokale Minimalpolynom als Teiler

Lemma 29.5

Es sei K ein Körper.

1. Es sei $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in K^n$. Dann teilt das lokale Minimalpolynom $\mu_{A,x}$ jedes Polynom mit der Eigenschaft $\widetilde{p}(A)\, x = 0$.

2. Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K und $f \in \operatorname{End}(V)$ sowie $v \in V$. Dann teilt das lokale Minimalpolynom $\mu_{f,v}$ jedes Polynom mit der Eigenschaft $\widetilde{p}(f)(v) = 0$.

Lokale Minimalpolynome erzeugen A-invariante Unterräume

Lemma 29.6

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ eine Matrix. Weiter sei $x \in K^n$ und

$$\mu_{A,x} = \sum_{j=0}^{d-1} \alpha_j \, \lambda^j + \lambda^d$$

das lokale Minimalpolynom bzgl. x.

Dann ist der Unterraum

$$U_x := \big\langle x,\ A\,x,\ A^2\,x, \ldots, A^{d-1}\,x \big\rangle$$

ein A-invarianter Unterraum mit der Basis

$$B_x = \big(x,\ A\,x,\ A^2\,x, \ldots, A^{d-1}\,x\big).$$

Lokale Minimalpolynome erzeugen A-invariante Unterräume

Lemma 29.6

$$\mu_{A,x} = \sum_{j=0}^{d-1} \alpha_j \, \lambda^j + \lambda^d \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} U_x := \langle x,\ A\,x,\ A^2\,x, \ldots, A^{d-1}\,x \rangle \\ \text{ist } A\text{-invariant mit Basis} \\ B_x = \left(x,\ A\,x,\ A^2\,x, \ldots, A^{d-1}\,x\right) \end{array}$$

Beweis.

Lokale Minimalpolynome maximalen Grades

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ eine Matrix.

1. Für verschiedene $x \in K^n$ haben die lokalen Minimalpolynome von A bzgl. x verschiedene Grade.

2. x heißt ein **maximaler Vektor bzgl. A**, wenn das lokale Minimalpolynom $\mu_{A,x}$ den maximal möglichen Grad

$$d = \max\big\{\deg(\mu_{A,y}) \,\big|\, y \in K^n\big\}$$

   über alle lokalen Minimalpolynome von A besitzt.

3. Es ist natürlich immer möglich, einen solchen maximalen Vektor $x \in K^n$ zu wählen, da die Menge der möglichen Grade der lokalen Minimalpolynome nach oben durch $\deg(\mu_A)$ beschränkt ist.

Lokale Minimalpolynome maximalen Grades

Lemma 29.7

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ eine Matrix. Weiter sei $x \in K^n$ ein maximaler Vektor bzgl. A mit $d := \deg(\mu_{A,x})$.

Dann gilt: Ergänzen wir die Basis B_x von U_x zu irgendeiner Basis

$$B = (x_1, \ldots, x_d, x_{d+1}, \ldots, x_n)$$

von K^n und definieren die Linearform ξ durch $\xi^\mathsf{T} x_j = \delta_{jd}$, dann ist

$$W := \left\{ w \in K^n \,\middle|\, \xi^\mathsf{T} A^j \, w = 0 \text{ für alle } j = 0, \ldots, d-1 \right\}$$

A-invarianter Unterraum der Dimension $\dim(W) = n - d$ und erfüllt

$$K^n = U \oplus W.$$

Lokale Minimalpolynome maximalen Grades

Beweis. $W := \{ w \in K^n \mid \xi^\mathsf{T} A^j \, w = 0 \text{ für alle } j = 0, \ldots, d-1 \}$ ist A-invariant:

Lokale Minimalpolynome maximalen Grades

Beweis. $W := \left\{ w \in K^n \,\middle|\, \xi^\mathsf{T} A^j \, w = 0 \text{ für alle } j = 0, \ldots, d-1 \right\}$ hat $\dim(W) \geqslant n - d$:

Lokale Minimalpolynome maximalen Grades

Beweis. $U_x \cap W = \{0\}$:

Lokale Minimalpolynome maximalen Grades

Beweis. $\dim(W) = n - d$ und $K^n = U \oplus W$:

Das Minimalpolynom ist ein lokales Minimalpolynom

Lemma 29.8 (Version für Matrizen)

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Für jedes $x \in K^n$, für das $\mu_{A,x}$ maximalen Grad besitzt, gilt $\mu_{A,x} = \mu_A$.

Frobenius-Normalform

Satz 29.9 (Version für Matrizen)

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Dann existieren normierte, nicht-konstante Polynome $p_1, \ldots, p_k$, $k \in \mathbb{N}$, die folgende Eigenschaften haben:

1. $p_1 = \mu_A$ und $p_{j+1} \mid p_j$ für $j = 1, \ldots, k-1$.
2. A ist ähnlich zu der Blockdiagonalmatrix aus Begleitmatrizen
$$\begin{bmatrix} C_{p_1} & & & \\ & C_{p_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_{p_k} \end{bmatrix}$$
3. Sowohl die Polynome p_j also auch die Matrix sind eindeutig.

Beweis. Wir spalten einen A-invarianten Unterraum U_1 maximaler Dimension ab:

Beweis. Wir konstruieren einen zu U_1 komplementären, ebenfalls A-invarianten Unterraum W_1, also $K^n = U_1 \oplus W_1$ mit $A \cdot W_1 \subseteq W_1$:

Frobenius-Normalform

Beweis. Wir wiederholen die Konstruktion:

Beweis. Wir zeigen die Eindeutigkeit:

$$A_1 = \begin{bmatrix} C_{p_1} & & \\ & \ddots & \\ & & C_{p_k} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad A_2 = \begin{bmatrix} C_{q_1} & & \\ & \ddots & \\ & & C_{q_\ell} \end{bmatrix}$$

$$p_2(A_1) = \begin{bmatrix} p_2(C_{p_1}) & & & \\ & p_2(C_{p_2}) & & \\ & & \ddots & \\ & & & p_2(C_{p_k}) \end{bmatrix} = p_2(T\,A_2\,T^{-1})$$

$$= \qquad\qquad = T \begin{bmatrix} \qquad\qquad \end{bmatrix} T^{-1}$$

Frobenius-Normalform

Beispiel 29.11

1. $$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -4 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$$

Beispiel 29.11

2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$$

Frobenius-Normalform

Beispiel 29.11

3.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & 3 \\ -1 & 5 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$$