Lineare Algebra II

Woche 09

10.06.2024 und 11.06.2024

Lemma 24.9

Es sei K ein Körper.

1. Es sei $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_s$, $s \in \mathbb{N}_0$, paarweise verschiedene Eigenwerte von A, dann ist die Summe der Unterräume $\operatorname{Eig}(A, \lambda_1), \dots, \operatorname{Eig}(A, \lambda_s)$ direkt.
   $\bigoplus_{j=1}^{s} \operatorname{Eig}(A, \lambda_j)$
2. Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und $f \in \operatorname{End}(V)$. Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_s$, $s \in \mathbb{N}_0$, paarweise verschiedene Eigenwerte von f, dann ist die Summe der Unterräume $\operatorname{Eig}(f, \lambda_1), \dots, \operatorname{Eig}(f, \lambda_s)$ direkt.

In Lemma 24.7 und Lemma 24.8 wurde das Resultat zunächst nur für zwei verschiedene Eigenwerte formuliert.

Ergänzung zu §24: notwendiges und hinreichendes Kriterium

Satz 24.28 (Version für Matrizen)

Es sei $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Weiter seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$, $s \in \mathbb{N}_0$, die paarweise verschiedenen Eigenwerte von A. Dann sind äquivalent:

1. A ist diagonalisierbar.
2. $K^n = \bigoplus_{j=1}^{s} \operatorname{Eig}(A, \lambda_j)$.

   direkte Summe der ER ergibt den ganzen
3. $\sum_{j=1}^{s} \mu^{\text{geo}}(A, \lambda_j) = n$.
4. Das charakteristische Polynom χ_A zerfällt vollständig in Linearfaktoren, und es gilt $\mu^{\text{alg}}(A, \lambda_j) = \mu^{\text{geo}}(A, \lambda_j)$ für alle $j = 1, \ldots, s$.

Das Beispiel 24.29 (mögliche Ursachen fehlender Diagonalisierbarkeit) hat das Resultat zwar suggeriert, aber es war nicht formuliert/bewiesen.

Minimalpolynom einer Diagonalmatrix

Lemma 28.11

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ eine Diagonalmatrix

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{bmatrix}$$

$0 \le s \le n$

Ist $\{b_1, \ldots, b_s\} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ und sind $\underbrace{b_1, \ldots, b_s}_{\text{die verschiedenen Elemente von } \{a_1, \ldots, a_n\}}$ paarweise verschieden, dann gilt

$$\mu_A = (\lambda - b_1) \cdots (\lambda - b_s).$$

Notwendiges und hinreichendes Krit. für Diagonalisierbarkeit

Satz 28.12 (Version für Matrizen)

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ eine Matrix.

Dann sind äquivalent:

1. A ist diagonalisierbar.
2. Das Minimalpolynom μ_A zerfällt in Linearfaktoren und besitzt nur einfache Nullstellen.

Beispiel 28.13 (vgl. Beispiel 28.8)

1. Die Matrix
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$$
besitzt das Minimalpolynom $\mu_A = (\lambda - 1)\,(\lambda + 1)$, ist also diagonalisierbar.

2. Die Matrix
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -8 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$
besitzt das Minimalpolynom $\mu_A = (\lambda + 1)^2\,(\lambda - 3)$, ist also nicht diagonalisierbar.

Beispiel 28.13 (vgl. Beispiel 28.8)

3. Die Matrix
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -6 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$
besitzt das Minimalpolynom $\mu_A = (\lambda + 1)\,(\lambda - 3)$, ist also diagonalisierbar. Die zugehörige Diagonalmatrix ist entweder
$$\begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 3 \end{bmatrix} \text{ oder } \begin{bmatrix} -1 & & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{bmatrix}$$
bzw. Permutationen davon auf der Diagonale. Mit χ_A können wir das entscheiden.

Begleitmatrix

Definition 28.14

$n = 0 \Rightarrow p = 1$

$C_p = (\quad)$

Es sei K ein Körper und

$$p = \overset{1.}{\lambda^n} + \sum_{j=0}^{n-1} \boxed{\alpha_j} \lambda^j \in K[\lambda]$$

ein normiertes Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}_0$. Die Matrix

$$C_p := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & -\alpha_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \in K^{n \times n}$$

Diagonale „1"

heißt die **Begleitmatrix** von p.

Polynome von Begleitmatrizen

Lemma 28.15

Es sei K ein Körper und $p \in K[\lambda]$ ein normiertes Polynom. Dann gilt:

$$\chi_{C_p} = \mu_{C_p} = p.$$

Beweis. Die Behauptung für

$$\chi_{C_p} = \det(\lambda I - C_p) = \det \overbrace{\begin{pmatrix}
\lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha_0 \\
-1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\
0 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots & \alpha_2 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\
\vdots & & \ddots & -1 & \lambda & \alpha_{n-1} \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & \lambda + \alpha_n
\end{pmatrix}}^{n+1} \left.\rule{0pt}{7em}\right\} n+1$$

kann man mit Laplaceschem Entwicklungssatz und Induktion zeigen.

Lemma 29.1

Es sei K ein Körper.

lokalannulliert

1. Es sei $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Für $x \in K^n$ ist die Menge

$$\mathcal{J}_A \subseteq J_{A,x} := \left\{ p \in K[\lambda] \,\middle|\, \overbrace{\widetilde{p}(A)\, x = 0} \right\} \qquad x \in \operatorname{Kern}(\widetilde{p}(A))$$

   ein Ideal in $K[\lambda]$ ungleich dem Nullideal.

2. Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K und $f \in \operatorname{End}(V)$. Für $v \in V$ ist die Menge

$$\mathcal{J}_f \subseteq J_{f,v} := \left\{ p \in K[\lambda] \,\middle|\, \overbrace{\widetilde{p}(f)(v) = 0} \right\}$$

   ein Ideal in $K[\lambda]$ ungleich dem Nullideal.

Definition 29.2

Es sei K ein Körper.

1. Es sei $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in K^n$. $\setminus \{0\}$

   Das eindeutig bestimmte normierte Polynom $\mu_{A,x}$ geringsten Grades mit der Eigenschaft $\mu_{A,x} \in J_{A,x}$ heißt das **(lokale) Minimalpolynom von A bzgl. x.**

   $\Updownarrow \; \widetilde{\mu_{A,x}}(A)\, x = 0 \in K^n$

2. Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem Körper K. Weiter sei $f \in \operatorname{End}(V)$ und $v \in V$. $\setminus \{0\}$

   Das eindeutig bestimmte normierte Polynom $\mu_{f,v}$ geringsten Grades mit der Eigenschaft $\mu_{f,v} \in J_{f,v}$ heißt das **(lokale) Minimmalpolynom von f bzgl. v.**

   $\Updownarrow \; \widetilde{\mu_{f,v}}(f)(v) = 0 \in V$

Zusammenhang der lokalen Minimalpolynome

Satz 29.3

Es sei K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K mit der Basis $B_V = (v_1, \ldots, v_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei $f \in \operatorname{End}(V)$ und $A = \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f)$.

Dann gilt für $v \in V$ und seinen Koordinatenvektor $x = \Phi_{B_V}^{-1}(v)$:

$$\mu_{f,v} = \mu_{A,x}.$$

Beweis. Übung

Beispiel 29.4

vgl. Bsp. 28.5

1.

$\in \mathbb{R}^{3\times 3}$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A\,x = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} x = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A^2\,x = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{bmatrix} x = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A^0\,x & A^1\,x & A^2\,x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Kern ist $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

(Spalten 1–2) linear unabh.

(Spalten 1–3) linear abhängig

$$\mu_{A,x} = 0 \cdot \lambda^0 + 3 \cdot \lambda^1 + 1 \cdot \lambda^2$$
$$= \lambda^2 + 3\lambda \qquad = \mu_A$$

Bestimmung des lokalen Minimalpolynoms

Beispiel 29.4

2.

$\in \mathbb{R}^{3\times 3}$

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A\,y = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A^2\,y = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{bmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A^0\,y & A^1\,y & \cancel{A^2\,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cancel{0} \\ 1 & 0 & \cancel{0} \\ 1 & 0 & \cancel{0} \end{bmatrix}$$

Ker ist $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

↑ linear unabh.

↳ linear abhängig

$$\mu_{A,y} = 0\cdot\lambda^0 + 1\cdot\lambda^1 = \lambda$$

$$\neq \mu_A$$

Das lokale Minimalpolynom als Teiler

Lemma 29.5

Es sei K ein Körper.

1. Es sei $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in K^n$. Dann teilt das lokale Minimalpolynom $\mu_{A,x}$ jedes Polynom mit der Eigenschaft $\widetilde{p}(A)\, x = 0$. $p \in \mathfrak{J}_{A,x}$
2. Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K und $f \in \operatorname{End}(V)$ sowie $v \in V$. Dann teilt das lokale Minimalpolynom $\mu_{f,v}$ jedes Polynom mit der Eigenschaft $\widetilde{p}(f)(v) = 0$.

Das liegt an der Hauptidealeigenschaft von $\mathfrak{J}_{A,x}$ bzw. $\mathfrak{J}_{f,v}$ im komm. Ring mit Eins $K[t]$.

Lokale Minimalpolynome erzeugen A-invariante Unterräume

$A \cdot \mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}$

Lemma 29.6

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ eine Matrix. Weiter sei $x \in K^n$ und

$$\mu_{A,x} = \sum_{j=0}^{d-1} \alpha_j \lambda^j + \lambda^d$$

$$\boxed{\sum_{j=0}^{d-1} \alpha_j A^j x + 1 \cdot A^d x = 0}$$

das lokale Minimalpolynom bzgl. x.

Dann ist der Unterraum

$$U_x := \langle x,\ A\,x,\ A^2\,x, \ldots, A^{d-1}\,x \rangle$$

ein A-invarianter Unterraum mit der Basis

$$B_x = \left(x,\ A\,x,\ A^2\,x, \ldots, A^{d-1}\,x\right).$$

mit $A^d x$: linear abhängig

Lemma 29.6

$$\mu_{A,x} = \sum_{j=0}^{d-1} \alpha_j \lambda^j + \lambda^d \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} U_x := \langle x,\ A x,\ A^2 x, \ldots, A^{d-1} x \rangle \\ \text{ist } A\text{-invariant mit Basis} \\ B_x = (x,\ A x,\ A^2 x, \ldots, A^{d-1} x) \end{array}$$

$\in K$

Beweis. $\in U_x \nearrow u = \sum_{j=0}^{d-1} \beta_j A^j x$

$\Rightarrow Au = \sum_{j=0}^{d-1} \beta_j A^{j+1} x = \sum_{j=1}^{d-1} \beta_{j-1} \overbrace{A^j x}^{\in U_x} + \beta_{d-1} A^d x$

$0 = \mu_{A,x}(A)x \Rightarrow \sum_{j=0}^{d-1} \alpha_j A^j x = -A^d x$ $\uparrow \in U_x$

Lokale Minimalpolynome maximalen Grades

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ eine Matrix.

1. Für verschiedene $x \in K^n$ haben die lokalen Minimalpolynome von A bzgl. x verschiedene Grade.
   im Allgemeinen

2. x heißt ein **maximaler Vektor bzgl. A**, wenn das lokale Minimalpolynom $\mu_{A,x}$ den maximal möglichen Grad

$$d = \max\{\deg(\mu_{A,y}) \,|\, y \in K^n\} \le \deg(\mu_A)$$

   über alle lokalen Minimalpolynome von A besitzt.

3. Es ist natürlich immer möglich, einen solchen maximalen Vektor $x \in K^n$ zu wählen, da die Menge der möglichen Grade der lokalen Minimalpolynome nach oben durch $\deg(\mu_A)$ beschränkt ist.

Lokale Minimalpolynome maximalen Grades

Lemma 29.7

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ eine Matrix. Weiter sei $x \in K^n$ ein maximaler Vektor bzgl. A mit $d := \deg(\mu_{A,x})$.

Dann gilt: Ergänzen wir die Basis B_x von U_x zu irgendeiner Basis

$$B = (\underbrace{x_1, \ldots, x_d}_{\text{Basis von } U_x}, x_{d+1}, \ldots, x_n) \qquad x_1 = x \quad x_2 = Ax \quad x_3 = A^2 x \quad ---$$

von K^n und definieren die Linearform ξ durch $\xi^\mathsf{T} x_j = \delta_{jd}$, dann ist

↳ d-tes Element der dualen Basis B^*

$$^0Y = W := \{w \in K^n \,|\, \underbrace{\xi^\mathsf{T} A^j}_{((A^j)^T \xi)^T} w = 0 \text{ für alle } j = 0, \ldots, d-1\}$$

A-invarianter Unterraum der Dimension $\dim(W) = n - d$ und erfüllt

$$\boxed{K^n = U_x \oplus W.}$$

$$Y := \langle \xi, A^T \xi, (A^T)^2 \xi, ---, (A^T)^{d-1} \xi \rangle \subseteq (K^n)^*$$

Lokale Minimalpolynome maximalen Grades

Beweis. $W := \{ w \in K^n \,|\, \xi^\mathsf{T} A^j w = 0 \text{ für alle } j = 0, \ldots, d-1 \}$ ist A-invariant:

Es sei $w \in W$. $Aw \in W \iff \underbrace{\xi^T A^j (Aw)}_{= \xi^T A^{j+1} w} = 0 \quad \forall j = 0, \ldots, d-1$.

Diese Bed. sind erfüllt für $j = 0, \ldots, d-2$.

Für $j = d-1$: Setze $d' := \deg(\mu_{A,w}) \leq d$

$\Rightarrow A^d w \in U_w = \langle w, Aw, \ldots, A^{d'-1} w \rangle$

$A^d w$ kann als LK von $w, Aw, \ldots A^{d'-1} w$ geschrieben werden

$\Rightarrow \xi^T \underbrace{A^d w}_{\text{LK von } w, Aw, \ldots, A^{d'-1} w} = 0$.

Beweis. $W := \{ w \in K^n \,|\, \xi^\mathsf{T} A^j w = 0 \text{ für alle } j = 0, \ldots, d-1 \}$ hat $\dim(W) \geqslant n - d$:

$$\Upsilon := \langle \xi, A^\mathsf{T} \xi, \ldots, (A^\mathsf{T})^{d-1} \xi \rangle$$

$$W = {}^{0}\Upsilon = \{ w \in K^n : \xi^\mathsf{T} w = 0 \;\; \forall \xi \in \Upsilon \}$$

$$\dim(\Upsilon) \le d$$

$$\Rightarrow \dim(W) \underset{\uparrow}{=} n - \dim(\Upsilon) \geq n - d$$

Satz 21.23

Beweis. $U_x \cap W = \{0\}$:

$$x_i = A^{i-1} x$$

$$\underbrace{w \in U_x \cap W}_{w \in U_x} \Rightarrow w = \sum_{i=1}^{d} \beta_i x_i$$

Wegen $w \in W$ gilt $\xi^T A^j w = 0$ für $j = 0, \ldots, d-1$.

$$j = 0: \quad 0 = \xi^T w = \sum_{i=1}^{d} \beta_i \underbrace{\xi^T x_i}_{= \delta_{id}} = \beta_d$$

$$j = 1: \quad 0 = \xi^T A^1 w = \xi^T \sum_{i=1}^{d-1} \beta_i \underbrace{A x_i}_{x_{i+1}} = \sum_{i=1}^{d-1} \beta_i \underbrace{\xi^T x_{i+1}}_{= \delta_{i+1,d}} = \beta_{d-1}$$

$\vdots$

alle $\beta_i = 0 \quad \forall i = d, \ldots, 1$

$\Rightarrow w = 0$

Beweis. $\dim(W) = n - d$ und $K^n = U \oplus W$:

$$\begin{aligned}\dim(U_x + W) &= \dim(U_x) + \dim(W) - \underbrace{\dim(U_x \cap W)}_{=0} \\ &\geq d + n - d \\ &= n\end{aligned}$$

Jeder UR von K^n hat Dim. $\leq n$, also gilt $\dim(U_x + W) = n$, also $U_x + W = K^n$ und $\dim(W) = n - d$.

Also: $\boxed{K^n = U_x \oplus W}$

Das Minimalpolynom ist ein lokales Minimalpolynom

Lemma 29.8 (Version für Matrizen)

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Für jedes $x \in K^n$, für das $\mu_{A,x}$ maximalen Grad besitzt, gilt $\boxed{\mu_{A,x} = \mu_A}$.

Frobenius-Normalform

Satz 29.9 (Version für Matrizen)

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Dann existieren normierte, nicht-konstante Polynome $p_1, \ldots, p_k$, $k \in \mathbb{N}$, die folgende Eigenschaften haben:

1. $p_1 = \mu_A$ und $p_{j+1} \mid p_j$ für $j = 1, \ldots, k-1$.
2. A ist ähnlich zu der Blockdiagonalmatrix aus Begleitmatrizen

$$\underbrace{C_p = \begin{bmatrix} 0 & & & * \\ 1 & \ddots & & * \\ & \ddots & 0 & * \\ & & 1 & * \end{bmatrix}}_{\text{Begleitmatrix}} \qquad \begin{bmatrix} \boxed{C_{p_1}} & & & \\ & \boxed{C_{p_2}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{C_{p_k}} \end{bmatrix}$$

3. Sowohl die Polynome p_j also auch die Matrix sind eindeutig.

Frobenius-Normalform

der Bauart $\langle x_1, Ax_1, \dots, A^{m-1}x_1 \rangle$

Beweis. Wir spalten einen A-invarianten Unterraum U_1 maximaler Dimension ab:

x_1 sei ein maximaler Vektor

Lemma 29.8 $\Rightarrow$ $\mu_{A,x} = \mu_A =: p_1$

$U_1 := \langle \underbrace{x_1, Ax_1, \dots, A^{m-1}x_1}_{\text{Basis } B_1} \rangle$ hat $\dim(U_1) = m$, ist A-invariant. Wir können $f_A\big|_{U_1}^{U_1}$ betrachten.

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{B_1}^{B_1}\left(f_A\big|_{U_1}^{U_1}\right) = C_{p_1} \in K^{m \times m}$$

Falls $m = n$ ist sind wir fertig.

Sonst:

Beweis. Wir konstruieren einen zu U_1 komplementären, ebenfalls A-invarianten Unterraum W_1, also $K^n = U_1 \oplus W_1$ mit $A \cdot W_1 \subseteq W_1$:

Lemma 29.7: Dabei nutzen wir, dass x_1 maximal war!

$\dim(U_1) = m = \deg(\mu_A) \geq 1$

$\dim(W_1) = n - m \leq n-1$

Ergänze $\mathcal{B}_1$ durch eine Basis $\tilde{\mathcal{B}}_1$ von W_1 zu Basis $\mathcal{B}$ von K^n!

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{bmatrix} C_{p_1} & \\ & \mathcal{M}_{\tilde{\mathcal{B}}_1}^{\tilde{\mathcal{B}}_1}(f_A|_{W_1}^{W_1}) \end{bmatrix}$$

Beweis. ~~Wir wiederholen die Konstruktion~~:

$$0 = \tilde{\mu}_A\left(\mu_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_A)\right) = \begin{bmatrix} \tilde{\mu}_A(C_{p_1}) & \\ & \tilde{\mu}_A\left(\quad \right) \end{bmatrix}$$

$$\mu_{\tilde{\mathcal{B}}_1}^{\tilde{\mathcal{B}}_1}\left(f_A|_{W_1}^{W_1}\right)$$

Das Min.polynom p_2 von $f_A|_{W_1}^{W_1}$ teilt $\mu_A = p_1$

Wiederholung für $f_A|_{W_1}^{W_1}$:

$\ldots \quad p_{j+1} \mid p_j$

Stop bei $V \hat{=} U_1 \oplus \cdots \oplus U_k$ und $W_k = \{0\}$.

Beweis. Wir zeigen die Eindeutigkeit:

$$A_1 = \begin{bmatrix} C_{p_1} & & \\ & \ddots & \\ & & C_{p_k} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad A_2 = \begin{bmatrix} C_{q_1} & & \\ & \ddots & \\ & & C_{q_\ell} \end{bmatrix}$$

$$p_2(A_1) = \begin{bmatrix} p_2(C_{p_1}) & & & \\ & p_2(C_{p_2}) & & \\ & & \ddots & \\ & & & p_2(C_{p_k}) \end{bmatrix} = p_2(T\,A_2\,T^{-1})$$

$$= \qquad\qquad = T \begin{bmatrix} \quad & & \\ & \quad & \\ & & \quad \end{bmatrix} T^{-1}$$

Beispiel 29.11

1.
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -4 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$$

$$\mu_A = (\lambda-2)^3 = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 =: p_1$$

$$A \text{ ähnlich zu } C_{p_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & -12 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Die EW sieht man nicht!

Beispiel 29.11

2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$$

$\mu_A = (\lambda-2)^2 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 =: p_1$

p_2 hat also Grad 1 und $p_2 \mid p_1 \Rightarrow p_2 = \lambda - 2$

A ist ähnlich zu $\left[\begin{array}{cc|c} 0 & -4 & 0 \\ 1 & 4 & \\ \hline & 0 & 2 \end{array}\right]$

Frobenius-Normalform

Beispiel 29.11

3.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & 3 \\ -1 & 5 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$$

$\mu_A = (\lambda-3)^2(\lambda-2) = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 21\lambda - 18 =: p_1$

Als p_2 kommen $\boxed{p_2 = \lambda - 3}$ und $p_2 = \lambda - 2$ in Frage.

A ist ähnlich zu $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 18 & \\ 1 & 0 & -21 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & \\ \hline & 0 & & 3 \end{array}\right]$