Lineare Algebra II

Woche 08

04.06.2024 und 06.06.2024

Algebrahomomorphismen kommutieren mit Polynomen

Satz 25.12

Es seien A_1, A_2 zwei Algebren mit Eins über dem Körper K.
Weiter sei $f : A_1 \to A_2$ ein Homomorphismus von Algebren mit Eins.

Dann gilt für jedes $a \in A_1$ und jedes Polynom $p \in K[t]$:

$$f(\widetilde{p}(a)) = \widetilde{p}(f(a))$$

Beweis.

Der Satz von Cayley-Hamilton

Satz 26.1 (Version für Matrizen)

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Dann gilt $\widetilde{\chi_A}(A) = 0 \in K^{n \times n}$.

Beispiel 26.3

$$\text{Für } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \text{ gilt } \chi_A = (\lambda - 2)\,(\lambda + 3) + 1 = \lambda^2 + \lambda - 5.$$

Der Satz von Cayley-Hamilton

Satz 26.1 (Version für Matrizen)

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Dann gilt $\widetilde{\chi_A}(A) = 0 \in K^{n \times n}$.

Beweis.

Der Satz von Cayley-Hamilton

Satz 26.1 (Version für Matrizen)

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Dann gilt $\widetilde{\chi_A}(A) = 0 \in K^{n \times n}$.

Fortsetzung des Beweises.

A^{-1} ist ein Polynom in A

Folgerung 26.4

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Ist A invertierbar, dann gibt es ein Polynom $p \in K_{n-1}[t]$ mit der Eigenschaft $A^{-1} = \widetilde{p}(A)$.

Beweis.

A^{-1} ist ein Polynom in A

Beispiel 26.5

Für $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ gilt $\chi_A = (\lambda - 2)\,(\lambda + 3) + 1 = \lambda^2 + \lambda - 5$.

Ideale in Ringen

Definition 27.1

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring.

1. $J \subseteq R$ heißt ein **Ideal** von $(R, +, \cdot)$, wenn J ein Unterring von R ist und zusätzlich gilt:

$$R\,J \subseteq J \quad \text{und} \quad J\,R \subseteq J$$

2. Ein Ideal $(J, +, \cdot)$ von $(R, +, \cdot)$ heißt **echt**, wenn $J \subsetneq R$ gilt.

Kerne von Ringhomomorphismen sind Ideale

Lemma 27.2

Es seien R_1 und R_2 Ringe und $f\colon R_1 \to R_2$ ein Homomorphismus.

Dann gilt:

$$\operatorname{Kern}(f) = \{a \in R_1 \mid f(a) = 0\}$$

ist ein Ideal von R_1.

Beispiel 27.3

1. In jedem Ring R sind $\{0\}$ (das **Nullideal**) und R (das **Einsideal**) Ideale. Diese heißen die **trivialen Ideale**.

2. Für $m \in \mathbb{N}$ ist $(m\,\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ein Ideal von $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

3. Es sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring. Für $m \in \mathbb{N}_0$ ist $\big\{p \in R[t] \,\big|\, p = \alpha_m\, t^m + \alpha_{m+1}\, t^{m+1} + \cdots\big\} = t^m\, R[t]$ ein Ideal von $(R[t], +, \cdot)$.

Durchschnitt von Idealen

Lemma 27.4

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring und $(J_i, +, \cdot)_{i \in I}$ eine Familie von Idealen mit der nichtleeren Indexmenge I. Dann ist auch $\bigcap_{i \in I} J_i$ ein Ideal in J.

Erzeugtes Ideal und Hauptideal

Definition 27.5

Es sei R ein Ring und $E \subseteq R$.

1. Dann heißt

$$(E) := \bigcap \big\{ J \,\big|\, J \text{ ist Ideal von } R \text{ und } E \subseteq J \big\}$$

   das von E **erzeugte Ideal** in R.

2. Ist speziell $E = \{a\}$ für ein $a \in R$, so schreiben wir auch (a) statt $(\{a\})$ und nennen (a) das **von a erzeugte Hauptideal**.

3. Ein Ideal $(J, +, \cdot)$ heißt ein **Hauptideal**, wenn es ein $a \in R$ gibt, sodass gilt: $(a) = J$.

Darstellung des erzeugten Ideals

Satz 27.6

1. Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring, $E \subseteq R$ und $a \in R$. Dann gilt

$$(E) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \,\middle|\, a_i \in E \cup -E \cup R\,E \cup E\,R \cup R\,E\,R \right\}$$

$$(a) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \,\middle|\, a_i \in \{\pm a\} \cup R\,a \cup a\,R \cup R\,a\,R \right\}$$

Darstellung des erzeugten Ideals

Satz 27.6

2. Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit Eins, $E \subseteq R$ und $a \in R$. Dann gilt

$$(E) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \,\middle|\, a_i \in R\,E\,R \right\}$$

$$(a) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \,\middle|\, a_i \in R\,a\,R \right\}$$

Insbesondere ist $(1) = R$.

Satz 27.6

3. Es sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring, $E \subseteq R$ und $a \in R$. Dann gilt

$$(E) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \,\middle|\, a_i \in E \;\cup\; -E \;\cup\; R\,E \right\}$$

$$(a) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \,\middle|\, a_i \in \{\pm a\} \;\cup\; R\,a \right\}$$

Darstellung des erzeugten Ideals

Satz 27.6

4. Es sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit Eins, $E \subseteq R$ und $a \in R$. Dann gilt

$$(E) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \,\middle|\, a_i \in R\,E \right\}$$

$$(a) = R\,a$$

Insbesondere ist $(1) = R$.

Polynomringe über Körpern sind Hauptidealringe

Satz 27.7

Es sei K in Körper. Dann gilt:

1. Zu jedem Ideal J in $K[t]$ existiert ein $p \in K[t]$ mit der Eigenschaft $J = (p)$.

Beweis.

Satz 27.7

Es sei K in Körper. Dann gilt:

2. Gilt $J = (p)$, dann ist p ist also bis auf einen Faktor $\alpha \in K$ eindeutig bestimmt.

Beweis.

Satz 27.7

Es sei K in Körper. Dann gilt:

3. Ist $\{0\} \neq J = (p)$, dann ist p eines der Polynome minimalen Grades in $J \setminus \{0\}$.

4. Ist $\{0\} = J = (p)$, dann gilt $p = 0$.

Beweis.

Annullierende Polynome bilden ein Ideal

Lemma 28.1

Es sei K ein Körper.

1. Es sei $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Die Menge

$$J_A := \{ p \in K[\lambda] \,|\, \widetilde{p}(A) = 0 \}$$

ist ein Ideal in $K[\lambda]$ ungleich dem Nullideal.

2. Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K und $f \in \operatorname{End}(V)$. Die Menge

$$J_f := \{ p \in K[\lambda] \,|\, \widetilde{p}(f) = 0 \}$$

ist ein Ideal in $K[\lambda]$ ungleich dem Nullideal.

Minimalpolynom

Definition 28.2

Es sei K ein Körper.

1. Es sei $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

   Das eindeutig bestimmte normierte Polynom μ_A geringsten Grades mit der Eigenschaft $\mu_A \in J_A$ heißt das **Minimalpolynom von A**.

2. Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem Körper K. Weiter sei $f \in \operatorname{End}(V)$.

   Das eindeutig bestimmte normierte Polynom μ_f geringsten Grades mit der Eigenschaft $\mu_f \in J_f$ heißt das **Minimalpolynom von f**.

Zusammenhang der Minimalpolynome

Satz 28.3

Es sei K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K. Weiter sei $f \in \operatorname{End}(V)$. Dann gilt $\mu_f = \mu_A$ für die Darstellungsmatrix $A = \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f)$ bzgl. irgendeiner Basis B_V.

Beweis.

Beispiel 28.5

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad A^2 = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{bmatrix} \quad A^3 = \begin{bmatrix} -18 & 9 & 9 \\ 9 & -18 & 9 \\ 9 & 9 & -18 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \operatorname{vec}(A^0) & \operatorname{vec}(A^1) & \operatorname{vec}(A^2) & \operatorname{vec}(A^3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 & -18 \\ 0 & 1 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & 6 & -18 \\ 0 & 1 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & 6 & -18 \end{bmatrix}$$

Lemma 28.6

Es sei K ein Körper.

1. Es sei $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Dann teilt das Minimalpolynom μ_A jedes Polynom mit der Eigenschaft $\widetilde{p}(A) = 0$.

2. Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K und $f \in \operatorname{End}(V)$. Dann teilt das Minimalpolynom μ_f jedes Polynom mit der Eigenschaft $\widetilde{p}(f) = 0$.

Beweis.

Das Minimalpolynom teilt das charakteristische Polynom

Folgerung 28.7

Es sei K ein Körper.

1. Es sei $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Dann teilt das Minimalpolynom μ_A das charakteristische Polynom χ_A.
2. Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K und $f \in \operatorname{End}(V)$. Dann teilt das Minimalpolynom μ_f das charakteristische Polynom χ_f.

Das Minimalpolynom teilt das charakteristische Polynom

Beispiel 28.8

1.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 2} \text{ mit } \chi_A = (\lambda - 1)^2$$

Gilt $\mu_A = (\lambda - 1)$ oder $\mu_A = (\lambda - 1)^2$?

2.
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 2} \text{ mit } \chi_A = (\lambda - 1)\,(\lambda + 1)$$

Beispiel 28.8

3.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -8 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \text{ mit } \chi_A = (\lambda+1)^2\,(\lambda-3)$$

Gilt $\mu_A = (\lambda+1)\,(\lambda-3)$ oder $\mu_A = \chi_A = (\lambda+1)^2\,(\lambda-3)$?

$$(A+I)\,(A-3\,I) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -8 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -8 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & -4 \end{bmatrix} =$$

Das Minimalpolynom teilt das charakteristische Polynom

Beispiel 28.8

4.
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -6 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \text{ mit } \chi_A = (\lambda+1)^2\,(\lambda-3)$$

Gilt $\mu_A = (\lambda+1)\,(\lambda-3)$ oder $\mu_A = \chi_A = (\lambda+1)^2\,(\lambda-3)$?

$$(A+I)\,(A-3\,I) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -6 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -6 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nullstellen des charakteristischen und des Minimalpolynoms

Lemma 28.9 (Version für Matrizen)

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Dann sind äquivalent:

1. $\lambda \in K$ ist eine Nullstelle des Minimalpolynoms μ_A.
2. $\lambda \in K$ ist eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms χ_A.

Beweis.

Eigenwerte sind Nullstellen des Minimalpolynoms

Folgerung 28.10 (Version für Matrizen)

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Dann sind äquivalent:

1. λ ist ein Eigenwert von A.
2. λ ist eine Nullstelle des Minimalpolynoms χ_A.