Lineare Algebra II

Woche 08

04.06.2024 und 06.06.2024

Algebrahomomorphismen kommutieren mit Polynomen

Satz 25.12

Es seien A_1, A_2 zwei Algebren mit Eins über dem Körper K.
Weiter sei $f \colon A_1 \to A_2$ ein Homomorphismus von Algebren mit Eins.

Dann gilt für jedes $a \in A_1$ und jedes Polynom $p \in K[t]$:

$$\overbrace{f}^{\text{abbilden}}(\overbrace{\widetilde{p}(a)}^{\text{einsetzen}}) = \overbrace{\widetilde{p}}^{\text{einsetzen}}(\overbrace{f(a)}^{\text{abbilden}})$$

f ist additiv

Beweis. $f(\underbrace{\widetilde{p}(a)}_{\in A_1}) = f\left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i a^i\right) = \sum_{i=0}^{n} f(\alpha_i a^i)$

$= \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(a^i) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(a)^i = \widetilde{p}(f(a))$

f ist homogen

f ist verträglich mit $*$

<u>Beispiel:</u> $A = M_B^B(f)$, $A^2 - 3A + I = M_B^B(f^2 - 3f + \mathrm{id})$

Matrix eingesetzt in ihr eigenes charakt. Polynom ergibt die Nullmatrix.

Satz 26.1 (Version für Matrizen)

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Dann gilt $\widetilde{\chi_A}(A) = 0 \in K^{n\times n}$.

Beispiel 26.3

Für $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt $\chi_A = \underline{(\lambda - 2)(\lambda + 3)}\,\underline{+1} = \lambda^2 + \lambda - 5$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A - 2I \quad \cdot \quad A + 3I \quad + \; I \quad = \; 0$$

Satz 26.1 (Version für Matrizen)

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Dann gilt $\widetilde{\chi_A}(A) = 0 \in K^{n\times n}$.

$\chi_A = \det(\lambda I - A)$ $\in K(\lambda)^{n\times n}$

Beweis. $C := \lambda I - A \in K(\lambda)^{n\times n}$, $\operatorname{adj}(C)\, C = \det(C)\, I = \underbrace{\chi_A}_{\in K(\lambda)} I$

$\operatorname{adj}(C) \in K(\lambda)^{n\times n}$, in Wirklichkeit Einträge, die Polynome sind in $K_{n-1}[\lambda]$

$$\operatorname{adj}(C) = \sum_{j=0}^{n-1} \underbrace{\lambda^j}_{\in K(\lambda)} \underbrace{B_j}_{\in K^{n\times n} \subseteq K(\lambda)^{n\times n}}$$

$$\chi_A I = \operatorname{adj}(C)\, C = \Big(\sum_{j=0}^{n-1} \lambda^j B_j\Big) C = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^j B_j (\lambda I - A)$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^{j+1} B_j - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^j B_j A$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \lambda^j (B_{j-1} - B_j A) \quad \text{mit } B_{-1} = B_n := 0$$

Satz 26.1 (Version für Matrizen)

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Dann gilt $\widetilde{\chi_A}(A) = 0 \in K^{n\times n}$.

Fortsetzung des Beweises.

$$\chi_A = \sum_{j=0}^{n} c_j \lambda^j \quad \text{mit } c_n = 1.$$

$$\chi_A I = \Big(\sum_{j=0}^{n} c_j \lambda^j\Big) I = \sum_{j=0}^{n} c_j \lambda^j I = \sum_{j=0}^{n} \lambda^j (c_j I)$$

Folie 4 →

$$= \sum_{j=0}^{n} \lambda^j (B_{j-1} - B_j A) \quad \Rightarrow \quad c_j I = B_{j-1} - B_j A$$

$$\widetilde{\chi_A}(A) = \sum_{j=0}^{n} c_j A^j = \sum_{j=0}^{n} (c_j I) A^j$$

$$= \sum_{j=0}^{n} (B_{j-1} - B_j A) A^j = \sum_{j=0}^{n} B_{j-1} A^j - \sum_{j=0}^{n} B_j A^{j+1}$$

$$= B_{-1} A^0 - B_n A^{n+1} = 0.$$

A^{-1} ist ein Polynom in A

Folgerung 26.4

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. $\deg(p) = n-1$

Ist A invertierbar, dann gibt es ein Polynom $p \in K_{n-1}[t]$ mit der Eigenschaft $A^{-1} = \widetilde{p}(A)$.

Beweis. $0 = \widetilde{\chi_A}(A) = \underbrace{\alpha_n}_{=1} A^n + \dots + \alpha_1 A + \alpha_0 I$

mit $\alpha_0 = (-1)^n \det(A) \neq 0$!

$$\alpha_0 I = -\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot A^j = \left(-\sum_{j=1}^{n} \alpha_j A^{j-1}\right) A$$

$$\Rightarrow \quad I = \underbrace{\left(-\alpha_0^{-1} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j A^{j-1}\right)}_{= A^{-1}} A$$

A^{-1} ist ein Polynom in A

Beispiel 26.5

Für $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ gilt $\chi_A = (\lambda - 2)\,(\lambda + 3) + 1 = \lambda^2 + \lambda - 5.$

$$\chi_A(A) = A^2 + A - 5I = 0$$

$$5I = A^2 + A \Rightarrow I = \frac{1}{5}A^2 + \frac{1}{5}A$$

$$= \left(\frac{1}{5}A + \frac{1}{5}I\right)A$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{5}A + \frac{1}{5}I.$$

Ideale in Ringen (Analogon zu Normalteilern in Gruppen → Faktorringe)

Definition 27.1

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. $JJ \subseteq J$ → $(J,+)$ ist Untergruppe, J ist abgeschlossen bzgl. $\cdot$

1. $J \subseteq R$ heißt ein **Ideal** von $(R, +, \cdot)$, wenn J ein $\boxed{\text{Unterring}}$ von R ist und zusätzlich gilt:

$$R\,J \subseteq J \quad \text{und} \quad J\,R \subseteq J$$

$$a \in R,\, j \in J \Rightarrow aj \in J \text{ und } ja \in J$$

Es reicht zu prüfen:

- $(J,+)$ ist Untergruppe von $(R,+)$
- $RJ \subseteq J$ und $JR \subseteq J$ (das impliziert $JJ \subseteq J$)

2. Ein Ideal $(J, +, \cdot)$ von $(R, +, \cdot)$ heißt **echt**, wenn $J \subsetneq R$ gilt.

Kerne von Ringhomomorphismen sind Ideale

Lemma 27.2

Es seien R_1 und R_2 Ringe und $f\colon R_1 \to R_2$ ein Homomorphismus.

Dann gilt:

$$\operatorname{Kern}(f) = \{a \in R_1 \mid f(a) = 0\}$$

ist ein Ideal von R_1.

Beweis: Kern(f) ist Untergruppe von $(R_1, +)$ ✓

$a \in R_1$, $j \in \operatorname{Kern}(f)$

- $f(aj) = f(a) f(j) = f(a) \cdot 0 = 0$
- $f(ja) = f(j) f(a) = 0 \cdot f(a) = 0$

Kerne von Ringhomomorphismen sind Ideale

Beispiel 27.3

Nullring

1. In jedem Ring R sind $\{0\}$ (das **Nullideal**) und R (das **Einsideal**) Ideale. Diese heißen die **trivialen Ideale**.

2. Für $m \in \mathbb{N}$ ist $(m\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ein Ideal von $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

   $(m\mathbb{Z}, +)$ ist Untergruppe

   $= j \cdot a$ (kommutativ)

   $a \in \mathbb{Z}$, $j \in m\mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ $a \cdot j \in m\mathbb{Z}$

3. Es sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring. Für $m \in \mathbb{N}_0$ ist $\{p \in R[t] \mid \cancel{\deg(p) \in m\mathbb{N}_0}\}$ ein Ideal von $(R[t], +, \cdot)$.

   $\underbrace{\text{die niedrigsten Koeffizienten } \alpha_0 = \dots = \alpha_{m-1} = 0}_{= t^m K[t]}$

Durchschnitt von Idealen

Lemma 27.4

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring und $(J_i, +, \cdot)_{i \in I}$ eine Familie von Idealen mit der nichtleeren Indexmenge I. Dann ist auch $\bigcap_{i \in I} J_i$ ein Ideal in J.

<u>Beweis</u>: Übung

Erzeugtes Ideal und Hauptideal

Definition 27.5

Es sei R ein Ring und $E \subseteq R$.

1. Dann heißt
$$(E) := \bigcap \{ J \mid J \text{ ist Ideal von } R \text{ und } E \subseteq J \}$$
das von E **erzeugte Ideal** in R.

2. Ist speziell $E = \{a\}$ für ein $a \in R$, so schreiben wir auch (a) statt $(\{a\})$ und nennen (a) das **von a erzeugte Hauptideal**.

   erzeugt von einem einzigen Element

3. Ein Ideal $(J, +, \cdot)$ heißt ein **Hauptideal**, wenn es ein $a \in R$ gibt, sodass gilt: $(a) = J$.

~~??~~ Satz 27.6 $n \in \mathbb{N}_0$

1. Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring, $E \subseteq R$ und $a \in R$. Dann gilt

$$(E) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \,\middle|\, a_i \in E \,\cup\, -E \,\cup\, R\,E \,\cup\, E\,R \,\cup\, R\,E\,R \right\}$$

$$(a) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \,\middle|\, a_i \in \{\pm a\} \,\cup\, R\,a \,\cup\, a\,R \,\cup\, R\,a\,R \right\}$$

Beweis:

Darstellung des erzeugten Ideals

??

2. Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit Eins, $E \subseteq R$ und $a \in R$. Dann gilt

$$(E) = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \,\Big|\, a_i \in R\,E\,R \Big\}$$

$$(a) = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \,\Big|\, a_i \in R\,a\,R \Big\}$$

Insbesondere ist $(1) = R$.

Darstellung des erzeugten Ideals

??

3. Es sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring, $E \subseteq R$ und $a \in R$. Dann gilt

$$(E) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \;\middle|\; a_i \in E \,\cup\, -E \,\cup\, R\,E \right\}$$

$$(a) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \;\middle|\; a_i \in \{\pm a\} \,\cup\, R\,a \right\}$$

Darstellung des erzeugten Ideals

??

4. Es sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit Eins, $E \subseteq R$ und $a \in R$. Dann gilt

$$(E) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \,\middle|\, a_i \in R\, E \right\}$$

$$(a) = R\, a$$

Insbesondere ist $(1) = R$.

Polynomringe über Körpern sind $\underbrace{\text{Hauptidealringe}}$

Jedes Ideal ist Hauptideal

Satz 27.7

Es sei K in Körper. Dann gilt:

1. Zu jedem Ideal J in $K[t]$ existiert ein $p \in K[t]$ mit der Eigenschaft $J = (p)$.

Beweis. $J = \{0\}$, wähle $p = 0 \Rightarrow J = (p)$.

$J \neq \{0\}$, wähle aus $J \setminus \{0\}$ ein Polynom p minimalen Grades.

- $(p) \subseteq J$, denn $p \in J \Rightarrow (p) \subseteq (J) = J$, da J ideal ist
- $J \subseteq (p)$: Es sei $\bar{p} \in J$. Es ex. $q, r \in K[t]$ mit $\deg(r) < \deg(p)$ und $\bar{p} = qp + r$ (Satz 11.14).

$\Rightarrow r = \underbrace{\bar{p}}_{\in J} - \underbrace{\underbrace{q}_{\in K[t]} \underbrace{p}_{\in J}}_{\in J} \in J$. p ist gradminimal in $J \setminus \{0\}$

$\Rightarrow r = 0 \Rightarrow \bar{p} = \underbrace{q}_{\in K[t]} p \overset{\text{Satz 27.6}}{\Rightarrow} \bar{p} \in (p)$.

Polynomringe über Körpern sind Hauptidealringe

Satz 27.7

Es sei K in Körper. Dann gilt:

2. Gilt $J = (p)$, dann ist p ist also bis auf einen Faktor $\alpha \in K$ eindeutig bestimmt. $J = (p_1) = (p_2) \Rightarrow \exists \alpha \in K$ mit $p_1 = \alpha p_2$.

Beweis. $J = (p_1) = (p_2)$. Nach Satz 27.6 gilt

$(p_1) = K[t]\, p_1$ und $(p_2) = K[t]\, p_2$.

$$\left.\begin{array}{ll} p_1 \in J = (p_2) & \Rightarrow p_1 = q_1 p_2 \\ p_2 \in J = (p_1) & \Rightarrow p_2 = q_2 p_1 \end{array}\right\} \text{ mit } q_1, q_2 \in K[t]$$

$\Rightarrow p_1 = q_1 p_2 = q_1 q_2 p_1 \Rightarrow p_1 (q_1 q_2 - 1) = 0$.

$K[t]$ ist nullteilerfrei

- $p_1 = 0 \Rightarrow J = (0) = \{0\} \Rightarrow p_2 = 0$
- $q_1 q_2 = 1$, $\deg(q_1 q_2) = \deg(q_1) + \deg(q_2) = \deg(1) = 0$

$\Rightarrow q_1 = \alpha \in K \setminus \{0\}$, $q_2 = \alpha^{-1}$

Satz 27.7

Es sei K in Körper. Dann gilt:

3. Ist $\{0\} \neq J = (p)$, dann ist p eines der Polynome minimalen Grades in $J \setminus \{0\}$.

4. Ist $\{0\} = J = (p)$, dann gilt $p = 0$.

Beweis. ③ ✓

④ ✓

Annullierende Polynome bilden ein Ideal

Lemma 28.1

Es sei K ein Körper.

„p annulliert A"

1. Es sei $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Die Menge

$$J_A := \{p \in K[\lambda] \mid \widetilde{p}(A) = 0\}$$

χ_A ist hier drin (Cayley-Ham.)

ist ein Ideal in $K[\lambda]$ ungleich dem Nullideal.

2. Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K und $f \in \mathrm{End}(V)$. Die Menge

„p annulliert f"

$$J_f := \{p \in K[\lambda] \mid \widetilde{p}(f) = 0\}$$

ist ein Ideal in $K[\lambda]$ ungleich dem Nullideal.

Minimalpolynom

Definition 28.2

Es sei K ein Körper.

1. Es sei $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

   höchster Koeff. = 1

   Das eindeutig bestimmte normierte Polynom μ_A geringsten Grades mit der Eigenschaft $\underbrace{\mu_A \in J_A}_{\tilde{\mu}_A(A) = 0}$ heißt das **Minimalpolynom von A**.

2. Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem Körper K. Weiter sei $f \in \operatorname{End}(V)$.

   Das eindeutig bestimmte normierte Polynom μ_f geringsten Grades mit der Eigenschaft $\underbrace{\mu_{\cancel{A}}^{f} \in J_{\cancel{A}}^{f}}_{\tilde{\mu}_f(f) = 0}$ heißt das **Minimalpolynom von f**.

Zusammenhang der Minimalpolynome

Satz 28.3

Es sei K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K. Weiter sei $f \in \operatorname{End}(V)$. Dann gilt $\mu_f = \mu_A$ für die Darstellungsmatrix $A = \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f)$ bzgl. irgendeiner Basis B_V.

Beweis. Algebraisomorphismus $\Phi\colon \operatorname{End}(V) \to K^{n \times n}$

$\Phi(f) = \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f) = A$ bzgl. beliebiger, fest gewählter Basis.

Satz 25.12: $\Phi(\tilde{p}(f)) = \tilde{p}(\Phi(f)) = \tilde{p}(A)$ für alle $p \in K[t]$.

$\tilde{p}(f) = 0 \Rightarrow \Phi(\tilde{p}(f)) = \tilde{p}(A) = 0$.

p annulliert f $\Rightarrow$ p annulliert A $\qquad J_f \subseteq J_A$

Da Φ injektiv $\Rightarrow$ $\tilde{p}(A) = \Phi(\tilde{p}(f)) = 0 \Rightarrow \tilde{p}(f) = 0$

$J_A \subseteq J_f$

$J_f = J_A \Rightarrow \mu_f = \mu_A$.

χ_A hat Grad 3

Beispiel 28.5

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad A^2 = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{bmatrix} \quad A^3 = \begin{bmatrix} -18 & 9 & 9 \\ 9 & -18 & 9 \\ 9 & 9 & -18 \end{bmatrix}$$

$$A^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{p}(A) = \alpha_0 A^0 + \alpha_1 A^1 + \alpha_2 A^2 + \alpha_3 A^3 = 0$$

$$\cancel{\operatorname{vec}\left(\begin{bmatrix} A^0 & A^1 & A^2 & A^3 \end{bmatrix}\right)} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A^0 & A^1 & A^2 & A^3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \cancel{0}\,1 & -2 & 6 & -18 \\ 0 & 1 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & 6 & -18 \\ 0 & 1 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & 6 & -18 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} \operatorname{vec}(A^0) & \operatorname{vec}(A^1) & \operatorname{vec}(A^2) & \operatorname{vec}(A^3) \end{bmatrix}$$

linear unabhängig

linear abh.

$$0 \cdot A^0 + 3 \cdot A^1 + 1 \cdot A^2 = 0$$

$$\boxed{\mu_A = \lambda^2 + 3\lambda}$$

Lemma 28.6

Es sei K ein Körper.

1. Es sei $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Dann teilt das Minimalpolynom μ_A jedes Polynom mit der Eigenschaft $\underbrace{\widetilde{p}(A) = 0}$. $p \in \mathcal{J}_A$
2. Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K und $f \in \operatorname{End}(V)$. Dann teilt das Minimalpolynom μ_f jedes Polynom mit der Eigenschaft $\widetilde{p}(f) = 0$.

Beweis. ① μ_A erzeugt das Ideal $\mathcal{J}_A$ von $K[t]$.
$K[t]$ ist komm. Ring mit 1 $\Rightarrow$ $\mathcal{J}_A = (\mu_A) = K[t]\,\mu_A$
nach Satz 22.6. Also: Für $p \in \mathcal{J}_A$ gibt es $q \in K[t]$
mit $p = q\,\mu_A$, d.h. $\mu_A \mid p$.

Das Minimalpolynom teilt das charakteristische Polynom

Folgerung 28.7

Es sei K ein Körper.

1. Es sei $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Dann teilt das Minimalpolynom μ_A das charakteristische Polynom χ_A.
2. Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K und $f \in \operatorname{End}(V)$. Dann teilt das Minimalpolynom μ_f das charakteristische Polynom χ_f.

Das Minimalpolynom teilt das charakteristische Polynom

Alternative Bestimmung zu Beispiel 28.7:

Beispiel 28.8

1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 2} \text{ mit } \chi_A = (\lambda - 1)^2$$

Gilt $\boxed{\mu_A = (\lambda - 1)}$ oder $\mu_A = (\lambda - 1)^2$?

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 2} \text{ mit } \chi_A = (\lambda - 1)\,(\lambda + 1)$$

$\boxed{\mu_A = \chi_A}$

Wir müssen beide Nullst. behalten und $\mu_A \mid \chi_A$ beachten.

Beispiel 28.8

3.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -8 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \text{ mit } \chi_A = (\lambda+1)^2\,(\lambda-3)$$

Gilt $\mu_A = (\lambda+1)\,(\lambda-3)$ oder $\boxed{\mu_A = \chi_A = (\lambda+1)^2\,(\lambda-3)?}$

$$(A+I)\,(A-3\,I) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -8 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -8 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$$\neq 0$$

Beispiel 28.8

4.
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -6 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \text{ mit } \chi_A = (\lambda+1)^2\,(\lambda-3)$$

Gilt $\boxed{\mu_A = (\lambda+1)\,(\lambda-3)}$ oder $\mu_A = \chi_A = (\lambda+1)^2\,(\lambda-3)$?

$$(A+I)\,(A-3\,I) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -6 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -6 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Lemma 28.9 (Version für Matrizen)

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Dann sind äquivalent:

1. $\lambda \in K$ ist eine Nullstelle des Minimalpolynoms μ_A.
2. $\lambda \in K$ ist eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms χ_A.

Beweis. ① ⇒ ② $\mu_A \mid \chi_A$, d.h. $\exists\, q \in K[t]$ mit $\chi_A = q\,\mu_A$.

$\Rightarrow \tilde{\chi}_A(\lambda) = \tilde{q}(\lambda)\,\tilde{\mu}_A(\lambda) = \tilde{q}(\lambda) \cdot 0 = 0$.

② ⇒ ① Nullstelle $\lambda \in K$ von χ_A ist EW von A

Es sei $v \in V$ ein zugehöriger EV. $\mu_A = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i t^i$.

$$\underset{\in K^n}{0} = \underset{\in K^{n\times n}}{0} \cdot v \underset{\mu_A \in J_A}{=} \tilde{\mu}_A(A) \cdot v = \Big(\sum_{i=0}^{m} \alpha_i A^i\Big) v = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \underbrace{A^i v}_{= \lambda^i v} = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \lambda^i v$$

$$= \Big(\sum_{i=0}^{m} \alpha_i \lambda^i\Big) v = \underbrace{\tilde{\mu}_A(\lambda)}_{\in K}\ \underbrace{v}_{\in K^n}$$

$v \neq 0$ als EV $\Rightarrow \tilde{\mu}_A(\lambda) = 0$

Folgerung 28.10 (Version für Matrizen)

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Dann sind äquivalent:

1. λ ist ein Eigenwert von A.
2. λ ist eine Nullstelle des Minimalpolynoms $\cancel{\chi_A}$ μ_A.