Lineare Algebra II

Woche 07

27.05.2024 und 28.05.2024

Eigenwerte eines Endomorphismus bzw. einer Matrix

Lemma 24.10

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$.
Weiter sei $f \in \operatorname{End}(V)$ und $\lambda \in K$. Dann sind äquivalent:

1. λ ist ein Eigenwert von f.
2. $\det(\lambda \operatorname{id}_V - f) = 0$.

Beweis.

Lemma 24.11

Es sei K ein Körper, $A \in K^{n \times n}$ und $\lambda \in K$. Dann sind äquivalent:

1. λ ist ein Eigenwert von A.
2. $\det(\lambda I - A) = 0$.

Der Ausdruck $\det(\lambda I - A)$

Beispiel

1. Was ist $\det(\lambda I - A)$ für $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$?

2. Was ist $\det(\lambda I - A)$ für $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^{2 \times 2}$?

Charakteristisches Polynom einer Matrix

Definition 24.12

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

$$\det(\lambda\, I - A)$$

heißt das **charakteristische Polynom** der Matrix A, geschrieben χ_A.

Lemma 24.13

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Dann sind äquivalent:

1. $\lambda \in K$ ist ein Eigenwert von A.
2. $\lambda \in K$ ist eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms χ_A.

Algebraische Vielfachheit eines Eigenwertes

Definition 24.14

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Die Zahlen $n_i \in \mathbb{N}$ heißen die **algebraischen Vielfachheiten** der Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ von A. Wir schreiben $\mu^{\text{alg}}(A, \lambda_i) = n_i$.

Lemma 24.15

Für die alg. Vielfachheit $\mu^{\text{alg}}(A, \lambda_i)$ eines Eigenwertes λ_i von A gilt

$$\mu^{\text{alg}}(A, \lambda_i) = \max\big\{k \in \mathbb{N} \,\big|\, (\lambda - \lambda_i)^k \mid \chi_A\big\}.$$

Beispiel 24.16

1. Die Darstellungsmatrix der Spiegelungsabbildung

$$A = \begin{bmatrix} \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) & 2\cos(\alpha)\,\sin(\alpha) \\ 2\cos(\alpha)\,\sin(\alpha) & \sin^2(\alpha) - \cos^2(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{bmatrix}$$

besitzt das charakteristische Polynom

$$\chi_A = \det \begin{pmatrix} \lambda - \cos(2\alpha) & -\sin(2\alpha) \\ -\sin(2\alpha) & \lambda + \cos(2\alpha) \end{pmatrix}$$

Charakteristisches Polynom einer Matrix

Beispiel 24.16

2. Die Darstellungsmatrix der Drehabbildung

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

besitzt das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} \chi_A &= \det \begin{pmatrix} \lambda - \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \lambda - \cos(\alpha) \end{pmatrix} \\ &= \big(\lambda - \cos(\alpha)\big)\big(\lambda - \cos(\alpha)\big) + \sin^2(\alpha) \\ &= \lambda^2 - 2\,\lambda\,\cos(\alpha) + 1. \end{aligned}$$

Dürfen wir Polynome in Matrizen einsetzen?

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ 1 & \lambda + 3 \end{pmatrix}$$

Dürfen wir Polynome in Matrizen einsetzen?

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ 1 & \lambda + 3 \end{pmatrix}$$

Spur einer Matrix

Definition 24.18

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Die **Spur** von A ist definiert als

$$\operatorname{Spur}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Satz 24.19

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

$$\chi_A = \lambda^n - \operatorname{Spur}(A)\,\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)\,\lambda^0.$$

Geometrische und algebraische Vielfachheit

Satz 24.20

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Für jeden Eigenwert $\lambda \in K$ von A gilt

$$1 \leqslant \mu^{\text{geo}}(A, \lambda) \leqslant \mu^{\text{alg}}(A, \lambda).$$

Beweis.

Ähnliche Matrizen haben dasselbe charakteristische Polynom

Lemma 24.21

Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_0$.

Sind $A, \widehat{A} \in K^{n \times n}$ ähnlich, dann gilt $\chi_A = \chi_{\widehat{A}}$.

Beweis.

Charakteristisches Polynom eines Endomorphismus

Definition 24.22

Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem Körper K.

Das **charakteristische Polynom** eines Endomorphismus $f \in \operatorname{End}(V)$ ist definert als

$$\chi_f \coloneqq \chi_A$$

für die Darstellungsmatrix $A = \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f)$ bzgl. irgendeiner Basis B_V.

Eigenwerte sind Nullstellen des charakteristischen Polynoms

Lemma 24.23

Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem Körper K. Weiter sei $f \in \operatorname{End}(V)$. Dann sind äquivalent:

1. $\lambda \in K$ ist ein Eigenwert von f.
2. $\lambda \in K$ ist eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms χ_f.

Spur eines Endomorphismus

Lemma 24.24

Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_0$.

Sind $A, \widehat{A} \in K^{n \times n}$ ähnlich, dann gilt $\operatorname{Spur}(A) = \operatorname{Spur}(\widehat{A})$.

Definition 24.25

Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem Körper K.

Die **Spur** eines Endomorphismus $f \in \operatorname{End}(V)$ ist definert als

$$\operatorname{Spur}(f) := \operatorname{Spur}(A)$$

für die Darstellungsmatrix $A = \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f)$ bzgl. irgendeiner Basis B_V.

Notwendiges Kriterium für Diagonalisierbarkeit

Lemma 24.26

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$.

Ist $f \in \operatorname{End}(V)$ diagonalisierbar, dann zerfällt das charakteristische Polynom χ_f in Linearfaktoren:

$$\chi_f = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}$$

mit den paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in K$ und deren algebraischen Vielfachheiten $n_1, \ldots, n_s \in \mathbb{N}$ mit $n_1 + \cdots + n_s = n$.

Mögliche Ursachen fehlender Diagonalisierbarkeit

Beispiel 24.27

1. Ursache 1:

   χ_A zerfällt nicht vollständig in Linearfaktoren, es gilt also

$$\chi_A = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s} \cdot q$$

Beispiel 24.27

2. Ursache 2:

   Für mind. einen Eigenwert λ_i von f gilt $\mu^{\text{geo}}(A, \lambda_i) < \mu^{\text{alg}}(A, \lambda_i)$.

Einsetzen in Polynome

Bisher haben wir in ein Polynom $K[t]$ über einem Körper K nur Elemente von K eingesetzt:

$$p = a_n \, t^n \quad + \quad a_{n-1} \, t^{n-1} \quad + \cdots + \quad a_1 \, t \quad + \quad a_0 \, t^0 \in K[t]$$

$$\widetilde{p}(\quad) = a_n \quad + \quad a_{n-1} \quad + \cdots + \quad a_1 \quad + \quad a_0$$

Wir brauchen folgende Verknüpfungen:

-
-
-

Algebra über einem Körper

Definition 25.1

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper.

Eine **Algebra** $(A, +, \cdot, \star)$ **über** K ist eine Menge A mit zwei inneren Verknüpfung $+\colon A \times A \to A$ und $\star\colon A \times A \to A$ sowie einer äußeren Verknüpfung $\cdot\colon K \times A \to A$, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

1. $(A, +, \cdot)$ ist ein K-Vektorraum.
2. $(A, +, \star)$ ist ein Ring.
3. Die Verknüpfung $\star$ ist verträglich mit der S-Multiplikation:

$$(\alpha \cdot a) \star b = \alpha \cdot (a \star b) = a \star (\alpha \cdot b)$$

für alle $\alpha \in K$ und $a, b \in A$.

Definition 25.1

- Eine Algebra A heißt **kommutativ**, wenn $\star$ kommutativ ist.

- Eine Algebra A heißt eine **Algebra mit Eins**, wenn es in A ein neutrales Element bzgl. $\star$ gibt.

  Existiert dann zu $a \in A$ bzgl. $\star$ ein inverses Element, so bezeichnen wir dieses mit a^{-1}.

Multiplikation in einer Algebra ist bilinear

Lemma 25.2

Es sei $(A, +, \cdot, \star)$ eine Algebra über dem Körper K.

Dann ist die Multiplikation $\star$ bilinear, d. h.,

$$\begin{aligned}(\alpha\, a + \beta\, b) \star c &= \alpha\,(a \star c) + \beta\,(b \star c) \\ a \star (\beta\, b + \gamma\, c) &= \beta\,(a \star b) + \gamma\,(a \star c)\end{aligned}$$

für alle $a, b, c \in$ und alle $\alpha, \beta, \gamma \in K$.

Algebra über einem Körper

Beispiel 25.3

1. Für jeden Körper $(K, +, \cdot)$ ist $(K, +, \cdot, \cdot)$ eine kommutative Algebra mit Einselement 1 über sich selbst.

2. Für jeden Körper $(K, +, \cdot)$ ist $(K, +, \cdot_U, \cdot)$ eine kommutative Algebra mit Einselement 1 über jedem Unterkörper $(U, +, \cdot)$.

Beispiel 25.3

3. Für jeden Körper K ist $(K^{n \times n}, +, \cdot, \cdot)$ eine Algebra über K mit Einselement I_n.

4. Für jeden Körper K und K-Vektorraum $(V, +, \cdot)$ ist $(\operatorname{End}(V), +, \cdot, \circ)$ eine Algebra über K mit Einselement id_V.

Beispiel 25.3

5. Für jeden Körper K ist $(K[t], +, \cdot, \cdot)$ eine Algebra über K mit Einselement 1.

Algebra über einem Körper

Beispiel 25.3

6. Für jede Menge X und Algebra $(A, +, \cdot, \star)$ über einem Körper K ist

$$A^X = \{f\colon X \to A\}$$

eine Algebra über K.

7. Insbesondere bildet also die Menge der Funktionen $K^X = \{f\colon X \to K\}$ eine kommutative Algebra mit Eins über K.

Homomorphismus von Algebren

Definition 25.5

Es seien $(A_1, +_1, \cdot_1, \star)$ und $(A_2, +_2, \cdot_2, \square)$ zwei Algebren über demselben Körper K.

1. Eine Abbildung $f\colon A_1 \to A_2$ heißt **strukturverträglich** oder ein **Homomorphismus** von $(A_1, +_1, \cdot_1, \star)$ in $(A_2, +_2, \cdot_2, \square)$, wenn gilt:

$$\begin{aligned} f(a +_1 b) &= f(a) +_2 f(b) && \text{für alle } a, b \in A_1, \\ f(\alpha \cdot_1 a) &= \alpha \cdot_2 f(a) && \text{für alle } \alpha \in K \text{ und } a \in A_1. \\ f(a \star b) &= f(a) \, \square \, f(b) && \text{für alle } a, b \in A_1. \end{aligned}$$

2. Besitzen beide Algebren ein Einselement e_{A_1} bzw. e_{A_2} und fordern wir zusätzlich $f(e_{A_1}) = e_{A_2}$, dann nennen wir f einen **Homomorphismus von Algebren mit Eins**.

Definition 25.5

3. Ist zudem $f\colon A_1 \to A_2$ bijektiv, so heißt f auch **strukturerhaltend** oder ein **Isomorphismus**.

   In diesem Fall nennen wir $(A_1, +_1, \cdot_1, \star)$ und $(A_2, +_2, \cdot_2, \Box)$ auch zueinander **isomorphe Algebren** und schreiben

   $$(A_1, +_1, \cdot_1, \star) \cong (A_2, +_2, \cdot_2, \Box).$$

4. Im Fall $(A_1, +_1, \cdot_1, \star) = (A_2, +_2, \cdot_2, \Box)$ sprechen wir von einem **Endomorphismus**.

5. Ist zudem $f\colon A_1 \to A_2$ bijektiv, so sprechen wir auch von einem **Automorphismus**.

Beispiel 25.6

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$.

Dann sind

- die Algebra der Endomorphismen von V $(\operatorname{End}(V), +, \cdot, \circ)$ und
- die Algebra der Matrizen $(K^{n \times n}, +, \cdot, \cdot)$

isomorph als Algebren mit Eins.

Einsetzungshomomorphismus

Definition 25.7

Es sei $(A, +, \cdot, \star)$ eine Algebra über dem Körper K mit Eins.

Die Abbildung

$$p = a_n\, t^n \quad + \quad a_{n-1}\, t^{n-1} \quad + \cdots + \quad a_1\, t \quad + \quad a_0\, t^0 \in K[t]$$

$$\widetilde{p}(a) = a_n\, a^n \quad + \quad a_{n-1}\, a^{n-1} \quad + \cdots + \quad a_1\, a \quad + \quad a_0\, e \ \in A$$

heißt der **Einsetzungs-** oder der **Auswertungshomomorphismus zu** a.

Lemma 25.8

Es sei $(A, +, \cdot, \star)$ eine Algebra über dem Körper K mit Eins.

Für jedes $a \in A$ ist der Einsetzungshomomorphismus $\varphi_a \colon K[t] \to A$ ein Homomorphismus von Algebren mit Eins.

Induzierte Polynomfunktion

Durch $p = \sum_{i=0}^{n} a_i \, t^n$ induzierte **Polynomfunktion** $\widetilde{p}_A \colon A \to A$:

$$\widetilde{p}_A(a) := a_0 \, e + a_1 \, a + \cdots + a_{n-1} \, a^{n-1} + a_n \, a^n \in A$$

Bemerkung 25.10

Es sei $(A, +, \cdot, \star)$ eine Algebra über dem Körper K mit Eins.

Die Abbildung

$$\Phi \colon (K[t], +, \cdot, \cdot) \ni p \mapsto \widetilde{p}_A \in (A^A, +, \cdot, \star)$$

ist ein Homomorphismus zwischen zwei Algebren mit Eins.

Einsetzen in Polynome

Beispiel 25.11

1. Wir betrachten die Algebra mit Eins $(K^{n \times n}, +, \cdot, \cdot)$ über einem Körper K.

   Einsetzen einer Matrix $A \in K^{n \times n}$ in das Polynom $p = t^2 - 1$:

   $$\widetilde{p}(A)$$

Beispiel 25.11

2. Wir betrachten die Algebra mit Eins $(\operatorname{End}(V), +, \cdot, \circ)$ über einem Körper K.

   Einsetzen eines Endomorphismus einer Matrix $f \in \operatorname{End}(V)$ in das Polynom $p = t^2 - 1$:

   $$\widetilde{p}(f)$$