Lineare Algebra II

Woche 07

27.05.2024 und 28.05.2024

Eigenwerte eines Endomorphismus bzw. einer Matrix

Lemma 24.10

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei $f \in \operatorname{End}(V)$ und $\lambda \in K$. Dann sind äquivalent:

1. λ ist ein Eigenwert von f.
2. $\det(\lambda \operatorname{id}_V - f) = 0$.

Beweis. λ ist EW $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Eig}(f, \lambda) = \operatorname{Kern}(\lambda \operatorname{id}_V - f) \neq \{0\}$
$\Leftrightarrow$ $\lambda \operatorname{id}_V - f$ ist nicht injektiv
$\Leftrightarrow$ $\det(\lambda \operatorname{id}_V - f) = 0$

Lemma 24.11

Es sei K ein Körper, $A \in K^{n \times n}$ und $\lambda \in K$. Dann sind äquivalent:

1. λ ist ein Eigenwert von A.
2. $\det(\lambda I - A) = 0$.

Der Ausdruck $\det(\lambda I - A)$

Unbekannte

Beispiel

1. Was ist $\det(\lambda I - A)$ für $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$?

$$\det\begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 \\ 1 & \lambda+3 \end{pmatrix} = (\lambda-2)(\lambda+3)+1$$
$$= \lambda^2 + \lambda - 5$$

$\boxed{\text{Polynom}}$

2. Was ist $\det(\lambda I - A)$ für $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_5^{2\times 2}$?

$$\det\begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 \\ 1 & \lambda+3 \end{pmatrix} = (\lambda-2)(\lambda+3)+1$$
$$= \lambda^2 + \lambda + 0$$

Charakteristisches Polynom einer Matrix

Definition 24.12

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

$$\det(\lambda I - A)$$

heißt das **charakteristische Polynom** der Matrix A, geschrieben χ_A.

Die Variable in diesem Polynom heißt i.d.R. λ.

$\chi_A \in K[\lambda]$

Lemma 24.13

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Dann sind äquivalent:

1. $\lambda \in K$ ist ein Eigenwert von A.
2. $\lambda \in K$ ist eine $\underbrace{\text{Nullstelle des charakteristischen Polynoms } \chi_A}$.

$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = 0$

Algebraische Vielfachheit eines Eigenwertes $s \in \mathbb{N}_0$

Satz 11.21:

$$\chi_A = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s} \cdot q$$

$q \in K[\lambda]$, keine Nullstellen

$\lambda_1, \dots, \lambda_s$ paarweise verschiedene Nullstellen, $n_1, \dots, n_s \in \mathbb{N}$

Definition 24.14

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Die Zahlen $n_i \in \mathbb{N}$ heißen die **algebraischen Vielfachheiten** der Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ von A. Wir schreiben $\mu^{\text{alg}}(A, \lambda_i) = n_i$.

Folgerung 11.22

$$\sum_{i=1}^{s} \mu^{\text{alg}}(A, \lambda_i) = \sum_{i=1}^{s} n_i = n - \deg(q) \le n$$

Lemma 24.15

Für die alg. Vielfachheit $\mu^{\text{alg}}(A, \lambda_i)$ eines Eigenwertes λ_i von A gilt

$$\mu^{\text{alg}}(A, \lambda_i) = \max\{k \in \mathbb{N} \mid (\lambda - \lambda_i)^k \mid \chi_A\}.$$

teilt

Charakteristisches Polynom einer Matrix

Beispiel 24.16

1. Die Darstellungsmatrix der Spiegelungsabbildung

$$A = \begin{bmatrix} \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) & 2\cos(\alpha)\sin(\alpha) \\ 2\cos(\alpha)\sin(\alpha) & \sin^2(\alpha) - \cos^2(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

besitzt das charakteristische Polynom

$$\chi_A = \det \begin{pmatrix} \lambda - \cos(2\alpha) & -\sin(2\alpha) \\ -\sin(2\alpha) & \lambda + \cos(2\alpha) \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda - \cos(2\alpha))(\lambda + \cos(2\alpha)) - \sin^2(2\alpha)$$

$$= \lambda^2 - \cos^2(2\alpha) - \sin^2(2\alpha) = \lambda^2 - 1 = (\lambda+1)(\lambda-1)$$

A hat die EW ± 1 jeweils mit alg. Vielfachheit 1.

Beispiel 24.16

2. Die Darstellungsmatrix der Drehabbildung

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

besitzt das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} \chi_A &= \det \begin{pmatrix} \lambda - \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \lambda - \cos(\alpha) \end{pmatrix} \\ &= \big(\lambda - \cos(\alpha)\big)\big(\lambda - \cos(\alpha)\big) + \sin^2(\alpha) \\ &= \lambda^2 - 2\,\lambda\,\cos(\alpha) + 1. \end{aligned}$$

$\lambda_{1,2} = \cos(\alpha) \pm \sqrt{\cos^2(\alpha) - 1} \in \mathbb{R} \iff \cos(\alpha) = 1$ od. $\cos(\alpha) = -1$

$\iff \alpha = 0$ od. $\alpha = \pi$ (im Int. $[0, 2\pi)$)

$\alpha = 0$: EW 1 mit alg. Vielf. 2

$\alpha = \pi$: EW -1 — " — 2

Dürfen wir Polynome in Matrizen einsetzen?

$$\det \begin{pmatrix} \overset{\in K[\lambda]}{\lambda} - 2 & \overset{\in K \subsetneq K[\lambda]}{-1} \\ 1 & \lambda + 3 \end{pmatrix}$$

$K[\lambda]$ ist kein Körper! (Lemma 11.12) Auch $K_1[\lambda]$ nicht!

Abhilfe: Körpererweiterung des Integritätsringes $K[\lambda]$ zu $K(\lambda)$ ← rationaler Funktionenkörper:

$\left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in K[\lambda], q \neq 0 \right\}$ mit Äq.relation

$$\frac{p_1}{q_1} \sim \frac{p_2}{q_2} :\iff p_1 q_2 = p_2 q_1.$$

$p \mapsto \left[\frac{p}{1}\right]$ bettet $K[\lambda]$ in $K(\lambda)$ als komm. Unterring ein und $K \subseteq K(\lambda)$ als Unterkörper.

Dürfen wir Polynome in Matrizen einsetzen?

$\in K[\lambda] \subsetneq K(\lambda)$

$\in K \subsetneq K(\lambda)$

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ 1 & \lambda + 3 \end{pmatrix} \quad \in K(\lambda)^{n \times n}$$

$\chi_A = \det(\lambda I - A) \in K(\lambda)$

in Wirklichkeit: $\in K[\lambda]$.

Spur einer Matrix

Definition 24.18

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Die **Spur** von A ist definiert als

$$\operatorname{Spur}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Summe der Hauptdiagonalelemente

$$\operatorname{Spur} \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{Z}_5^{2 \times 2}} = 1 .$$

Satz 24.19

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

$$\chi_A = \underbrace{\lambda^n}_{1} \underbrace{- \operatorname{Spur}(A)\,\lambda^{n-1}}_{\text{für } n \geq 1} \underbrace{+ \cdots +}_{\text{schwieriges}} \underbrace{(-1)^n \det(A)\,\lambda^0}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

$$\operatorname{Spur}(A) = -1 \qquad \chi_A = \lambda^2 + \lambda - 5$$

$$\det(A) = -5$$

Geometrische und algebraische Vielfachheit

Satz 24.20

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Für jeden Eigenwert $\lambda \in K$ von A gilt

$$1 \leqslant \mu^{\text{geo}}(A, \lambda) \leqslant \mu^{\text{alg}}(A, \lambda).$$

Beweis. Es sei $\lambda_i \in K$ ein EW von A. $1 \le \mu^{geo}(A, \lambda_i) =: g$

$= \dim(\operatorname{Eig}(A, \lambda_i))$ nach Lemma 24.8

Wähle eine Basis $\widehat{B}_V = (\underbrace{v_1, \ldots, v_g}_{\text{Basis von } \operatorname{Eig}(A,\lambda_i)}, v_{g+1}, \ldots, v_n)$ von K^n.

$$\widehat{A} = \mathcal{M}^{\widehat{B}_V}_{\widehat{B}_V}(f_A) = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|c} \lambda_i I_g & * \\ \hline 0 & B \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} g \\ n-g \end{array} \quad \text{ähnlich zu } A$$

$$\chi_{\widehat{A}} = \chi_A = (\lambda - \lambda_i)^g \cdot \chi_B$$

kann weitere Fakt. $(\lambda - \lambda_i)$

Ähnliche Matrizen haben dasselbe charakteristische Polynom

Lemma 24.21

Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_0$.

Sind $A, \widehat{A} \in K^{n \times n}$ ähnlich, dann gilt $\chi_A = \chi_{\widehat{A}}$.

Beweis. $\hat{A} = T A T^{-1}$

Alle Matrizen liegen in $K(\lambda)^{n \times n}$!

$I, \lambda I, A, T, \hat{A}, T^{-1}$

$$\lambda I - \hat{A} = \lambda T T^{-1} - T A T^{-1}$$
$$= T(\lambda I) T^{-1} - T A T^{-1}$$
$$= T[\lambda I - A] T^{-1}$$

$$\Rightarrow \chi_{\hat{A}} = \det(\lambda I - \hat{A}) = \det(T) \det(\lambda I - A) \det(T^{-1})$$
$$= \det(\lambda I - A) = \chi_A.$$

Definition 24.22

Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem Körper K.

Das **charakteristische Polynom** eines Endomorphismus $f \in \operatorname{End}(V)$ ist definert als

$$\chi_f \coloneqq \chi_A$$

für die Darstellungsmatrix $A = \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f)$ bzgl. irgendeiner Basis B_V.

Damit können wir auch $\mu^{als}(f, \lambda)$ definieren.

Eigenwerte sind Nullstellen des charakteristischen Polynoms

Lemma 24.23

Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem Körper K. Weiter sei $f \in \operatorname{End}(V)$. Dann sind äquivalent:

1. $\lambda \in K$ ist ein Eigenwert von f.
2. $\lambda \in K$ ist eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms χ_f.

$\mu^{\text{alg}}(A, \lambda) = \mu^{\text{alg}}(f, \lambda)$ für jede Darst. matrix A von f.

Spur eines Endomorphismus

Lemma 24.24

Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_0$.

Sind $A, \widehat{A} \in K^{n \times n}$ ähnlich, dann gilt $\operatorname{Spur}(A) = \operatorname{Spur}(\widehat{A})$.

denn: – Spur(A) ist ein Koeff. in $\chi_A = \chi_{\widehat{A}}$.

Definition 24.25

Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem Körper K.

Die **Spur** eines Endomorphismus $f \in \operatorname{End}(V)$ ist definert als

$$\operatorname{Spur}(f) := \operatorname{Spur}(A)$$

für die Darstellungsmatrix $A = \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f)$ bzgl. irgendeiner Basis B_V.

Notwendiges Kriterium für Diagonalisierbarkeit

Lemma 24.26

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$.

Ist $f \in \operatorname{End}(V)$ diagonalisierbar, dann zerfällt das charakteristische Polynom χ_f in Linearfaktoren:

Einspolynom

$$\chi_f = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s} \quad \cdot q$$

mit den paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in K$ und deren algebraischen Vielfachheiten $n_1, \ldots, n_s \in \mathbb{N}$ mit $n_1 + \cdots + n_s = n$.

Mögliche Ursachen fehlender $\underbrace{\text{Diagonalisierbarkeit}}_{\text{es ex. Basis aus lauter EV}}$

Beispiel 24.27

1. Ursache 1: $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ pw. verschieden

   χ_A zerfällt nicht vollständig in Linearfaktoren, es gilt also

$$\chi_A = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s} \cdot q$$

$q \in K[\lambda]$, $\deg(q) \geq 2$ ohne Nullst.

$$\dim\Big(\bigoplus_{i=1}^{s} \operatorname{Eig}(A, \lambda_i) \Big) = \sum_{i=1}^{s} \mu^{geo}(A, \lambda_i)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{s} \mu^{alg}(A, \lambda_i) = \sum_{i=1}^{s} n_i = \underbrace{n - \deg(q)}_{\leq n-2}$$

Beispiel 24.27

2. Ursache 2:

   Für mind. einen Eigenwert λ_i von f gilt $\mu^{\text{geo}}(A, \lambda_i) \overset{1 \le}{<} \mu^{\text{alg}}(A, \lambda_i)$.

   Kann nur bei mehrfachen EW passieren!

$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{2\times 2}}$, $\chi_A = (\lambda - 1)^2$, $\mu^{\text{alg}}(A, 1) = 2$

$\text{Eig}(A, 1) = \text{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

(hat Dim 1)

$\mu^{\text{geo}}(A, 1) = 1$

Einsetzen in Polynome

Bisher haben wir in ein Polynom $K[t]$ über einem Körper K nur Elemente von K eingesetzt:

$$p = \overset{\in K}{a_n}\, t^n + \overset{\in K}{a_{n-1}}\, t^{n-1} + \cdots + a_1\, t + \overset{\in K}{a_0}\, t^0 \in K[t]$$

Bauplan

$$\widetilde{p}(\overset{\in A}{B}) = a_n \underbrace{B^n}_{B * \cdots * B} + a_{n-1}\, B^{n-1} + \cdots + a_1\, B + a_0 \underbrace{B^0}_{\substack{\text{neutral}\\ \text{bzgl. } *}} \in A$$

Wir brauchen folgende Verknüpfungen:

- innere Verknüpfung $* : A \times A \to A$ für $B^n = B * \cdots * B$
- äußere Verknüpfung $\cdot : K \times A \to A$ für $a_n \cdot B^n$
- innere Verknüpfung $+ : A \times A \to A$ für $a_n \cdot B^n + a_{n-1} \cdot B^{n-1}$

(assoziative)

Definition 25.1

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper.

Eine **Algebra** $(A, +, \cdot, \star)$ **über** K ist eine Menge A mit zwei inneren Verknüpfung $+\colon A \times A \to A$ und $\star\colon A \times A \to A$ sowie einer äußeren Verknüpfung $\cdot\colon K \times A \to A$, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

1. $(A, +, \cdot)$ ist ein K-Vektorraum.

   insbesondere assoziativ

2. $(A, +, \star)$ ist ein Ring.
3. Die Verknüpfung $\star$ ist verträglich mit der S-Multiplikation:

$$(\alpha \cdot a) \star b = \alpha \cdot (a \star b) = a \star (\alpha \cdot b)$$

für alle $\alpha \in K$ und $a, b \in A$.

Algebra über einem Körper

Definition 25.1

- Eine Algebra A heißt **kommutativ**, wenn $\star$ kommutativ ist.

  oder unitäre Algebra

- Eine Algebra A heißt eine **Algebra mit Eins**, wenn es in A ein neutrales Element bzgl. $\star$ gibt.

  Existiert dann zu $a \in A$ bzgl. $\star$ ein inverses Element, so bezeichnen wir dieses mit a^{-1}.

Multiplikation in einer Algebra ist bilinear

$(A,+,\cdot) \times (A,+,\cdot) \to (A,+,\cdot)$

Lemma 25.2

Es sei $(A,+,\cdot,\star)$ eine Algebra über dem Körper K.

Dann ist die Multiplikation $\star$ bilinear, d. h.,

$$(\alpha\, a + \beta\, b) \star c = \alpha\,(a \star c) + \beta\,(b \star c)$$
$$a \star (\beta\, b + \gamma\, c) = \beta\,(a \star b) + \gamma\,(a \star c)$$

für alle $a, b, c \in$ und alle $\alpha, \beta, \gamma \in K$.

Beweis: $(\alpha a + \beta b) * c = (\alpha a) * c + (\beta b) * c$

Distr.gesetz im Ring $(A,+,*)$

$= \alpha(a * c) + \beta(b * c)$

Verträglichkeit $\cdot$ und $*$

2. Aussage analog

Algebra über einem Körper

Beispiel 25.3

identisch: $* = \cdot$

1. Für jeden Körper $(K, +, \cdot)$ ist $(K, +, \cdot, \cdot)$ eine kommutative Algebra mit Einselement 1 über sich selbst.

   - $(K, +, \cdot)$ ist K-Vektorraum ✓
   - $(K, +, \cdot)$ ist komm. Ring mit Eins ✓
   - $(\alpha a) b = \alpha (ab) = a (\alpha b)$, alles in K ✓

2. Für jeden Körper $(K, +, \cdot)$ ist $(K, +, \cdot_U, \cdot)$ eine kommutative Algebra mit Einselement 1 über jedem Unterkörper $(U, +, \cdot)$.

   z.B. $\mathbb{C}$ ist eine $\mathbb{R}$-Algebra

   $\mathbb{R}$ ist eine $\mathbb{Q}$-Algebra

   $\cdot_U : U \times K \to K$

Beispiel 25.3

Matrixalgebra über K $n \in \mathbb{N}_0$

3. Für jeden Körper K ist $(K^{n \times n}, +, \cdot, \cdot)$ eine Algebra über K mit Einselement I_n.
   - $(K^{n \times n}, +, \cdot)$ ist K-Vektorraum
   - $(K^{n \times n}, +, \cdot)$ ist Ring, nicht komm. für $n \geq 2$

     Matrix-Multiplikation

   $(\alpha A) B = \alpha (AB) = A (\alpha B)$

4. Für jeden Körper K und K-Vektorraum $(V, +, \cdot)$ ist $(\mathrm{End}(V), +, \cdot, \circ)$ eine Algebra über K mit Einselement id_V. Endomorphismen-Algebra von V

   Komposition

   i.A. nicht kommutativ

Algebra über einem Körper

Beispiel 25.3 Polynomalgebra über K

5. Für jeden Körper K ist $(K[t], +, \cdot, \cdot)$ eine kommutative Algebra über K mit Einselement 1. ← Einspolynom

- $(K[t], +, \cdot)$ ist K-Vektorraum (Beispiel 12.3)
- $(K[t], +, \cdot)$ ist Ring mit Eins
- $(\alpha p) \cdot q = \alpha (p \cdot q) = p \cdot (\alpha q)$

$K_n[t]$ für $n \geq 1$ ist keine Algebra,
da $*$ in $K_n[t]$ nicht abgeschlossen ist.

Beispiel 25.3

6. Für jede Menge X und Algebra $(A, +, \cdot, \star)$ über einem Körper K ist

$$A^X = \{f : X \to A\}$$

eine Algebra über K. Definiere $+, \cdot, \star$ jeweils punktweise, z.B. $(f \star g)(x) := f(x) \star g(x)$

7. Insbesondere bildet also die Menge der Funktionen $K^X = \{f : X \to K\}$ eine kommutative Algebra mit Eins über K. Spezialfall mit $A = K$ von 6

Homomorphismus von Algebren

Definition 25.5

Es seien $(A_1, +_1, \cdot_1, \star)$ und $(A_2, +_2, \cdot_2, \Box)$ zwei Algebren über demselben Körper K.

1. Eine Abbildung $f\colon A_1 \to A_2$ heißt **strukturverträglich** oder ein **Homomorphismus** von $(A_1, +_1, \cdot_1, \star)$ in $(A_2, +_2, \cdot_2, \Box)$, wenn gilt:
$$\begin{aligned} f(a +_1 b) &= f(a) +_2 f(b) && \text{für alle } a, b \in A_1, \\ f(\alpha \cdot_1 a) &= \alpha \cdot_2 f(a) && \text{für alle } \alpha \in K \text{ und } a \in A_1. \\ f(a \star b) &= f(a) \mathbin{\Box} f(b) && \text{für alle } a, b \in A_1. \end{aligned}$$
2. Besitzen beide Algebren ein Einselement e_{A_1} bzw. e_{A_2} und fordern wir zusätzlich $f(e_{A_1}) = e_{A_2}$, dann nennen wir f einen **Homomorphismus von Algebren mit Eins**.

Homomorphismus von Algebren

Definition 25.5

3. Ist zudem $f\colon A_1 \to A_2$ bijektiv, so heißt f auch **strukturerhaltend** oder ein **Isomorphismus**.

   In diesem Fall nennen wir $(A_1, +_1, \cdot_1, \star)$ und $(A_2, +_2, \cdot_2, \Box)$ auch zueinander **isomorphe Algebren** und schreiben

   $$(A_1, +_1, \cdot_1, \star) \cong (A_2, +_2, \cdot_2, \Box).$$

4. Im Fall $(A_1, +_1, \cdot_1, \star) = (A_2, +_2, \cdot_2, \Box)$ sprechen wir von einem **Endomorphismus**.

5. Ist zudem $f\colon A_1 \to A_2$ bijektiv, so sprechen wir auch von einem **Automorphismus**.

Homomorphismus von Algebren

Beispiel 25.6

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$.

Dann sind

- die Algebra der Endomorphismen von V $(\operatorname{End}(V), +, \cdot, \circ)$ und
- die Algebra der Matrizen $(K^{n \times n}, +, \cdot, \cdot)$

isomorph als Algebren mit Eins.

Beide sind nicht kommutativ für $n \geq 2$.

Definition 25.7

Es sei $(A, +, \cdot, \star)$ eine Algebra über dem Körper K $\boxed{\text{mit Eins.}}$ $e \in A$

Die Abbildung

$$\varphi_a(p) \quad p = a_n\, t^n \quad + \quad a_{n-1}\, t^{n-1} \quad + \cdots + \quad a_1\, t \quad + \quad a_0\, t^0 \in K[t]$$

$$\widetilde{p}(\underset{\in A}{a}) = a_n\, \underbrace{a^n}_{a \star \cdots \star a} \quad + \quad a_{n-1}\, a^{n-1} \quad + \cdots + \quad a_1\, a \quad + \quad a_0\, \underbrace{e}_{= a^0} \in A$$

heißt der **Einsetzungs-** oder der **Auswertungshomomorphismus zu** a.

Kommutativität von $\star$ wird nicht benötigt!

$\varphi_a : K[t] \to A$

Lemma 25.8

Es sei $(A, +, \cdot, \star)$ eine Algebra über dem Körper K mit Eins.

Für jedes $a \in A$ ist der Einsetzungshomomorphismus $\varphi_a \colon K[t] \to A$ ein Homomorphismus von Algebren mit Eins.

$$\varphi_a(p \underset{\text{in } K[t]}{+} q) = \varphi_a(p) \underset{\text{in } A}{+} \varphi_a(q)$$

$$\varphi_a(\alpha p) = \alpha \, \varphi_a(p)$$

$$\varphi_a(p \underset{\text{in } K[t]}{\cdot} q) = \varphi_a(p) \underset{\text{in } A}{\cdot} \varphi_a(q)$$

Induzierte Polynomfunktion

Kein festes $a \in A$, sondern beliebiges $a \in A$ einsetzen:

Durch $p = \sum_{i=0}^{n} a_i \, t^n$ induzierte **Polynomfunktion** $\widetilde{p}_A \colon A \to A$:

$$\varphi_a(p) = \widetilde{p}_A(a) := a_0 \, e + a_1 \, a + \cdots + a_{n-1} \, a^{n-1} + a_n \, a^n \in A$$

Bemerkung 25.10

Es sei $(A, +, \cdot, \star)$ eine Algebra über dem Körper K mit Eins.

Die Abbildung

$$\Phi \colon (K[t], +, \cdot, \cdot) \ni p \mapsto \widetilde{p}_A \in (A^A, +, \cdot, \star)$$

ist ein Homomorphismus zwischen zwei Algebren mit Eins.

Einsetzen in Polynome

Beispiel 25.11

1. Wir betrachten die Algebra mit Eins $(K^{n\times n}, +, \cdot, \cdot)$ über einem Körper K.

   Einsetzen einer Matrix $A \in K^{n\times n}$ in das Polynom $p = t^2 - 1$:

   $$\widetilde{p}(A) = A^2 - A^0$$
   $$= A \cdot A - I$$

Einsetzen in Polynome

Beispiel 25.11

über einem Vektorraum V

2. Wir betrachten die Algebra mit Eins $(\mathrm{End}(V), +, \cdot, \circ)$ über einem Körper K.

   Einsetzen eines Endomorphismus einer Matrix $f \in \mathrm{End}(V)$ in das Polynom $p = t^2 - 1$:

$$\widetilde{p}(f) = f^2 - f^0$$

$$= f \circ f - \mathrm{id}_V$$