Lineare Algebra II

Woche 06

21.05.2024 und 23.05.2024

Determinante eines Endomorphismus

Definition 23.21

Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem Körper K.

Die **Determinante** eines Endomorphismus $f \in \operatorname{End}(V)$ ist definiert als

$$\det(f) := \det(A),$$

wobei $A = \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f)$ die Darstellungsmatrix bzgl. irgendeiner Basis B_V von V ist.

Eigenschaften der Determinante

Lemma 23.22, vgl. Lemma 23.8

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$. Weiter seien $f, g \in \operatorname{End}(f)$.

1. $\det(\alpha f) = \alpha^n \det(f)$ für alle $\alpha \in K$.
2. $\det(f) \neq 0 \Leftrightarrow f$ ist invertierbar $\Leftrightarrow \operatorname{Rang}(f) = n \Leftrightarrow$ Jede Darstellungsmatrix von f ist invertierbar.
3. $\det(\mathrm{id}_V) = 1$.
4. $\det(f \circ g) = \det(f) \det(g)$.
5. $\det(f^{-1}) = 1/\det(f)$, falls f invertierbar ist.
6. $\det(f^*) = \det(f)$ für die zu f duale Abbildung $f^* \in \operatorname{End}(V^*)$.

Geordneter Körper

Definition 23.23

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $\leqslant$ eine Totalordnung auf K.

1. Der Körper heißt **geordnet**, wenn für $\alpha, \beta, \gamma \in K$ gilt:

$$\alpha \leqslant \beta \quad \Rightarrow \quad \alpha + \gamma \leqslant \beta + \gamma$$

$$\alpha \geqslant 0 \text{ und } \beta \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha \cdot \beta \geqslant 0$$

Geordneter Körper

Definition 23.23

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $\leqslant$ eine Totalordnung auf K.

2. $\alpha \in K$ heißt **nichtnegativ**, wenn $\alpha \geqslant 0$ ist.

3. $\alpha \in K$ heißt **positiv**, wenn $\alpha \geqslant 0$ und $\alpha \neq 0$ ist.

4. $\alpha \in K$ heißt **nichtpositiv**, wenn $\alpha \leqslant 0$ ist.

5. $\alpha \in K$ heißt **negativ**, wenn $\alpha \leqslant 0$ und $\alpha \neq 0$ ist.

Rechenregeln in geordneten Körpern

Lemma 23.24

Es sei $(K, +, \cdot)$ mit der Totalordnung $\leqslant$ ein geordneter Körper.

1. $\alpha \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\alpha \leqslant 0$
2. $\alpha \leqslant \beta$ und $\gamma \leqslant \delta \quad \Rightarrow \quad \alpha + \gamma \leqslant \beta + \delta$

Beweis.

Rechenregeln in geordneten Körpern

Lemma 23.24

Es sei $(K, +, \cdot)$ mit der Totalordnung $\leqslant$ ein geordneter Körper.

3. $\alpha \leqslant \beta$ und $\gamma \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha\,\gamma \leqslant \beta\,\gamma$
4. $\alpha \leqslant \beta$ und $\gamma \leqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \beta\,\gamma \leqslant \alpha\,\gamma$

Beweis.

Rechenregeln in geordneten Körpern

Lemma 23.24

Es sei $(K, +, \cdot)$ mit der Totalordnung $\leqslant$ ein geordneter Körper.

5. $\alpha^2 \geqslant 0$
6. $\alpha \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 > 0$

Beweis.

Rechenregeln in geordneten Körpern

Lemma 23.24

Es sei $(K, +, \cdot)$ mit der Totalordnung $\leqslant$ ein geordneter Körper.

7. $\alpha > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\alpha} > 0$
8. $\beta > \alpha > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta} > 0$

Beweis.

Lemma 23.24

Es sei $(K, +, \cdot)$ mit der Totalordnung $\leqslant$ ein geordneter Körper.

9. $n1 > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, insbesondere hat K notwendig $\operatorname{char}(K) = 0$.

Beweis.

Geordneter Körper

Beispiel 23.25

1.

2.

3.

Orientierungstreuer Endomorphismus

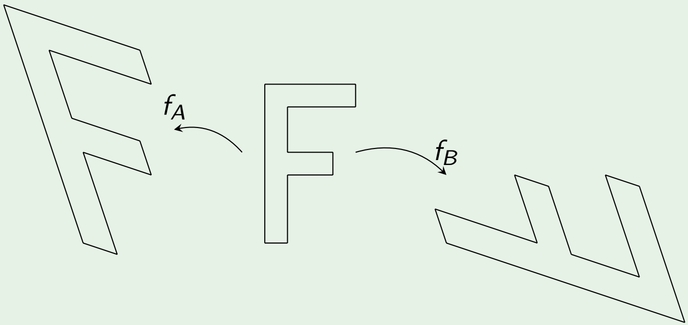
Definition 23.26

Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem geordneten Körper K. Ein Automorphismus $f \in \operatorname{Aut}(V)$ heißt

- **orientierungstreu** im Fall $\det(f) > 0$ und
- **orientierungsuntreu** im Fall $\det(f) < 0$.

Beispiel 23.27

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{in } \mathbb{R}^{2\times 2}$$



Gleichorientierte Basen

Definition 23.28

Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem geordneten Körper K.

1. Zwei Basen B_V und $\widehat{B}_V$ heißen **gleich orientiert**, wenn die Transformationsmatrix $T = \mathcal{T}_{\widehat{B}_V}^{B_V}$ die Bedingung $\det(T) > 0$ erfüllt.
2. Zwei Basen B_V und $\widehat{B}_V$ heißen **umgekehrt orientiert**, wenn die Transformationsmatrix $T = \mathcal{T}_{\widehat{B}_V}^{B_V}$ die Bedingung $\det(T) < 0$ erfüllt.

Gleichorientierung ist Äquivalenzrelation

Lemma 23.29

Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem geordneten Körper K.

Gleichorientierung ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Basen von V.

Erinnerung an §20

- Bei Darstellungsmatrizen $A = \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f)$ von $f \in \operatorname{End}(V)$ wählen wir beide Basen gleich.
- Ist U ein f-invarianter Unterraum und wählen wir $B_V = (v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n)$, dann gilt

$$\mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f) = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}$$

- Ist zusätzlich auch W ein f-invarianter Unterraum, dann gilt

$$\mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f) = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}$$

Erinnerung an §20

- $f \in \operatorname{End}(V)$ heißt **diagonalisierbar**, wenn

  $$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$$

  gilt mit lauter eindimensionalen, f-invarianten Unterräumen.

- Die eindimensionalen, f-invarianten Unterräume werden durch Eigenvektoren aufgespannt: $U_i = \langle v_i \rangle$.

- v_i heißt **Eigenvektor** zum **Eigenwert** $\lambda_i \in K$ von f, wenn gilt:

Paarweise verschiedene Eigenwerte

Satz 24.1

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und $f \in \operatorname{End}(V)$.

1. Sind $(v_1, \ldots, v_k)$ EV von f zu paarweise verschiedenen EW $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$, dann ist $(v_1, \ldots, v_k)$ linear unabhängig.
2. f hat höchstens $\dim(V)$ viele paarweise verschiedene Eigenwerte.

Beweis.

Paarweise verschiedene Eigenwerte

Folgerung 24.2

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$.

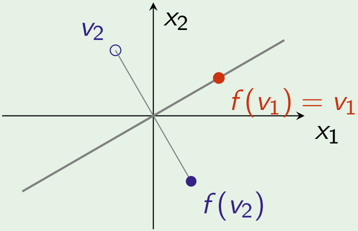
Besitzt $f \in \operatorname{End}(V)$ n paarweise verschiedene Eigenwerte, dann ist f diagonalisierbar.

Beweis.

Paarweise verschiedene Eigenwerte

Beispiel 24.3

$$\begin{bmatrix} \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) & 2\cos(\alpha)\sin(\alpha) \\ 2\cos(\alpha)\sin(\alpha) & \sin^2(\alpha) - \cos^2(\alpha) \end{bmatrix}$$



Berechnung von Eigenvektoren zu gegebenem Eigenwert

$$f(v) = \lambda\, v$$

$$A\,x = \lambda\, x$$

Invertierbarkeitskriterien

Lemma 24.5

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und $f \in \mathrm{End}(V)$.

1. f ist injektiv $\Leftrightarrow$ 0 ist kein Eigenwert von f.
2. Ist V endlich-dimensional, dann gilt sogar:
   f ist bijektiv $\Leftrightarrow$ 0 ist kein Eigenwert von f.

Lemma 24.5

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

A ist regulär $\Leftrightarrow$ 0 ist kein Eigenwert von A.

Eigenraum, geometrische Vielfachheit

Definition 24.6

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K.

1. Ist $f \in \operatorname{End}(V)$ und $\lambda \in K$, dann heißen

$$\operatorname{Eig}(f,\lambda) \coloneqq \{v \in V \mid f(v) = \lambda\, v\} \quad \text{und} \quad \mu^{\text{geo}}(f,\lambda) \coloneqq \dim(\operatorname{Eig}(f,\lambda))$$

   der **Eigenraum** von f zu λ bzw. die **geometrische Vielfachheit** von λ.

2. Ist $A \in K^{n \times n}$ und $\lambda \in K$, dann heißt

$$\operatorname{Eig}(A,\lambda) \coloneqq \{v \in V \mid A\, v = \lambda\, v\} \quad \text{und} \quad \mu^{\text{geo}}(A,\lambda) \coloneqq \dim(\operatorname{Eig}(A,\lambda))$$

   der **Eigenraum** von A zu λ bzw. die **geometrische Vielfachheit** von λ.

Eigenschaften von Eigenräumen von Endomorphismen

Lemma 24.7

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K, $f \in \operatorname{End}(V)$ sowie $\lambda \in K$.

1. $\operatorname{Eig}(f, \lambda)$ ist ein Unterraum von V.
2. $\operatorname{Eig}(f, \lambda) \neq \{0\} \Leftrightarrow \lambda$ ist ein Eigenwert von f.
3. $\operatorname{Eig}(f, \lambda) \setminus \{0\}$ ist die Menge der zu λ gehörenden Eigenvektoren von f.
4. $\operatorname{Eig}(f, \lambda) = \operatorname{Kern}(\lambda \operatorname{id}_V - f)$.
5. Ist $\lambda_1 \neq \lambda_2$, dann gilt $\operatorname{Eig}(f, \lambda_1) \cap \operatorname{Eig}(f, \lambda_2) = \{0\}$.

Eigenschaften von Eigenräumen von Matrizen

Lemma 24.8

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ sowie $\lambda \in K$.

1. $\operatorname{Eig}(A, \lambda)$ ist ein Unterraum von V.
2. $\operatorname{Eig}(A, \lambda) \neq \{0\} \Leftrightarrow \lambda$ ist ein Eigenwert von A.
3. $\operatorname{Eig}(A, \lambda) \setminus \{0\}$ ist die Menge der zu λ gehörenden Eigenvektoren von A.
4. $\operatorname{Eig}(A, \lambda) = \operatorname{Kern}(\lambda I - A)$.
5. Ist $\lambda_1 \neq \lambda_2$, dann gilt $\operatorname{Eig}(A, \lambda_1) \cap \operatorname{Eig}(A, \lambda_2) = \{0\}$.

Projektoren sind diagonalisierbar

Lemma 24.9

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei $P \in \operatorname{End}(V)$ ein Projektor und $r := \operatorname{Rang}(P)$.

1. $V = \operatorname{Kern}(P) \oplus \operatorname{Bild}(P)$.
2. Für die Eigenwerte von P gilt $\Lambda(P) \subseteq \{0, 1\}$.

Beweis.

Projektoren sind diagonalisierbar

Lemma 24.9

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei $P \in \operatorname{End}(V)$ ein Projektor und $r := \operatorname{Rang}(P)$.

3. Jedes $v \in \operatorname{Bild}(P) \setminus \{0\}$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert 1. Es gilt $\mu^{\text{geo}}(f, 1) = r = \operatorname{Rang}(P) = \dim(\operatorname{Bild}(P))$.
4. Jedes $v \in \operatorname{Kern}(P) \setminus \{0\}$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert 0. Es gilt $\mu^{\text{geo}}(f, 0) = n - r = \operatorname{Defekt}(P) = \dim(\operatorname{Kern}(P))$.

Beweis.

Projektoren sind diagonalisierbar

Lemma 24.9

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$.
Weiter sei $P \in \operatorname{End}(V)$ ein Projektor und $r := \operatorname{Rang}(P)$.

5. Wählen wir eine Basis als $B_V = (v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n)$, dann hat $A = \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(P)$ die Diagonalgestalt

$$A = \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow r\text{-te Zeile} \\ \leftarrow (r+1)\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \end{array}$$

Beweis.