# Lineare Algebra II

## Woche 06

21.05.2024 und 23.05.2024

## Definition 23.21

Es sei $V$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem Körper $K$.

Die **Determinante** eines Endomorphismus $f \in \mathrm{End}(V)$ ist definiert als

$$\det(f) := \det(A),$$

wobei $A = \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f)$ die Darstellungsmatrix bzgl. irgendeiner Basis $B_V$ von $V$ ist.

Wohldefiniertheit:

ähnlich zu $A$

$$\hat{A} = \mathcal{M}_{\hat{B}_V}^{\hat{B}_V}(f) = T A T^{-1} \quad \text{mit } T = \mathcal{T}_{\hat{B}_V}^{B_V}$$

alt, neu

$$\det(\hat{A}) = \det(T) \det(A) \underbrace{\det(T^{-1})}_{= \frac{1}{\det(T)}}$$
$$= \det(A).$$

### Lemma 23.22, vgl. Lemma 23.8

Es sei $V$ ein Vektorraum über dem Körper $K$ und $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$. Weiter seien $f, g \in \operatorname{End}(f)$.

1. $\det(\alpha f) = \alpha^n \det(f)$ für alle $\alpha \in K$.
2. $\det(f) \neq 0 \Leftrightarrow f$ ist $\overbrace{\text{invertierbar}}^{\text{Automorphismus}}$ $\Leftrightarrow \operatorname{Rang}(f) = n \Leftrightarrow$ Jede Darstellungsmatrix von $f$ ist invertierbar.
3. $\det(\mathrm{id}_V) = 1$.
4. $\det(f \circ g) = \det(f) \det(g)$.
5. $\det(f^{-1}) = 1/\det(f)$, falls $f$ invertierbar ist.
6. $\det(f^*) = \det(f)$ für die zu $f$ duale Abbildung $f^* \in \operatorname{End}(V^*)$.

# Geordneter Körper

reflexiv, antisymm., transitiv

## Definition 23.23

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $\leqslant$ eine Totalordnung auf $K$.

1. Der Körper heißt **geordnet**, wenn für $\alpha, \beta, \gamma \in K$ gilt:

$$\alpha \leqslant \beta \quad \Rightarrow \quad \alpha + \gamma \leqslant \beta + \gamma$$

Kompatibilität von $\leq$, $+$

insbesondere $\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha - \beta \leq 0$

Die Totalordnung ist also durch die Elemente $\leq 0$ bereits bestimmt.

$$\alpha \geqslant 0 \text{ und } \beta \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha \cdot \beta \geqslant 0$$

Komp. von $\leq$, $\cdot$

# Geordneter Körper

## Definition 23.23

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $\leqslant$ eine Totalordnung auf $K$.

2. $\alpha \in K$ heißt **nichtnegativ**, wenn $\alpha \geqslant 0$ ist.
3. $\alpha \in K$ heißt **positiv**, wenn $\alpha \geqslant 0$ und $\alpha \neq 0$ ist.
4. $\alpha \in K$ heißt **nichtpositiv**, wenn $\alpha \leqslant 0$ ist.
5. $\alpha \in K$ heißt **negativ**, wenn $\alpha \leqslant 0$ und $\alpha \neq 0$ ist.

**Lemma 23.24**

Es sei $(K, +, \cdot)$ mit der Totalordnung $\leqslant$ ein geordneter Körper.

1. $\alpha \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\alpha \leqslant 0$ „gleich viele Elemente $\geq 0$ wie $\leq 0$"
2. $\alpha \leqslant \beta$ und $\gamma \leqslant \delta \quad \Rightarrow \quad \alpha + \gamma \leqslant \beta + \delta$

**Beweis.** ① $\alpha \geq 0 \Rightarrow 0 = \alpha + (-\alpha) \geq 0 + (-\alpha) = -\alpha$

$-\alpha \leq 0 \Rightarrow 0 = -\alpha + \alpha \leq 0 + \alpha = \alpha$

②
$$\left.\begin{aligned} \alpha \leq \beta &\Rightarrow \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma \\ \gamma \leq \delta &\Rightarrow \beta + \gamma \leq \beta + \delta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha + \gamma \leq \beta + \delta$$

## Lemma 23.24

Es sei $(K, +, \cdot)$ mit der Totalordnung $\leqslant$ ein geordneter Körper.

3. $\alpha \leqslant \beta$ und $\gamma \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha\,\gamma \leqslant \beta\,\gamma$
4. $\alpha \leqslant \beta$ und $\gamma \leqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \beta\,\gamma \leqslant \alpha\,\gamma$

Beweis. ③ $\alpha \le \beta \Rightarrow \beta - \alpha \geq 0 \Rightarrow (\beta - \alpha)\gamma \geq 0$

$\Rightarrow \beta\gamma - \alpha\gamma \geq 0 \Rightarrow \alpha\gamma \le \beta\gamma$

④ $-\gamma \geq 0$ wegen ①

$\alpha(-\gamma) \le \beta(-\gamma)$ wegen ③

$\Rightarrow \beta\gamma \le \alpha\gamma$

**Lemma 23.24**

Es sei $(K, +, \cdot)$ mit der Totalordnung $\leqslant$ ein geordneter Körper.

5. $\alpha^2 \geqslant 0$
6. $\alpha \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 > 0$

Beweis. (5) $\alpha \geq 0 \Rightarrow \alpha^2 = \alpha \cdot \alpha \geq 0$

$\alpha \leq 0 \Rightarrow \alpha^2 = (-\alpha) \cdot (-\alpha) \geq 0$

(6) K ist nullteilerfrei

## Lemma 23.24

Es sei $(K, +, \cdot)$ mit der Totalordnung $\leqslant$ ein geordneter Körper.

7. $\alpha > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\alpha} > 0$
8. $\beta > \alpha > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta} > 0$

**Beweis.** 7 $\alpha > 0$, also $\alpha \neq 0$ und damit multipl. invertierbar

$\alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha} \neq 0$

Falls $\frac{1}{\alpha} < 0$, dann $1 = \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} < 0$.

Es gilt aber $1 = 1 \cdot 1 > 0$ wegen 6 $\lightning$ Also ist $\frac{1}{\alpha} > 0$.

8 $\beta > \alpha$ und $\alpha > 0$, multipliziere mit $\frac{1}{\beta} > 0$ wg 7

$\Rightarrow 1 > \frac{\alpha}{\beta}$ und $\frac{\alpha}{\beta} > 0$, — " — mit $\frac{1}{\alpha} > 0$

$\Rightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$ und $\frac{1}{\beta} > 0$.

## Lemma 23.24

Es sei $(K, +, \cdot)$ mit der Totalordnung $\leqslant$ ein geordneter Körper.

9. $n1 > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, insbesondere hat $K$ notwendig $\operatorname{char}(K) = 0$.

**Beweis.** (6) $\Rightarrow 1 > 0$

$\Rightarrow 1 + 1 > 1 + 0 > 0$

$\vdots$

$\Rightarrow n1 > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

D.h. auch: $n1 \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, insbesondere: $\operatorname{char}(K) = 0$.

Endliche Körper können nicht angeordnet werden!

## Beispiel 23.25

1. $\mathbb{Q}$ mit der üblichen Totalordnung $\leq$ ist geord. Körper. Diese ist auch die einzige!
2. $\mathbb{R}$ mit der üblichen Totalordnung $\leq$ ist geord. Körper. Auch diese ist die einzige!
3. $\mathbb{C}$ sind mit keiner Totalordnung ein geordneter Körper: $i^2 = -1$ ↯ zu ⑥

Jeder geordnete Körper enthält ein isomorphes Bild von $\mathbb{Q}$.

# Orientierungstreuer ~~Endo~~morphismus
Auto

## Definition 23.26

Es sei $V$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem geordneten Körper $K$. Ein Automorphismus $f \in \operatorname{Aut}(V)$ heißt

- **orientierungstreu** im Fall $\det(f) > 0$ und
  erhaltend
- **orientierungsuntreu** im Fall $\det(f) < 0$.
  umkehrend

# Orientierungstreuer ~~Endo~~morphismus

Auto

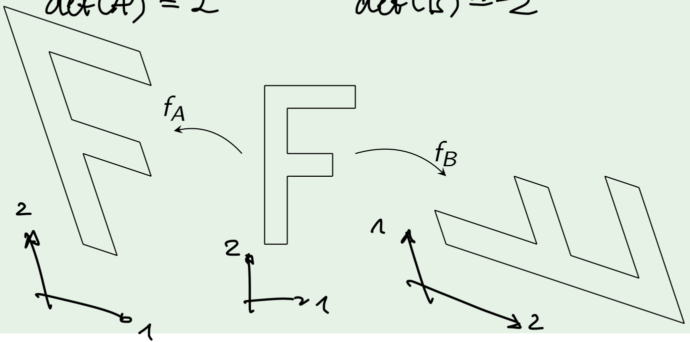
## Beispiel 23.27

Darst. bzgl. $(e_1, e_2)$

oder $\mathbb{Q}^{2\times 2}$

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{in } \mathbb{R}^{2\times 2}$$

$\det(A) = 2$ $\qquad$ $\det(B) = -2$



# Gleichorientierte Basen

## Definition 23.28

Es sei $V$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem geordneten Körper $K$.

1. Zwei Basen $B_V$ und $\widehat{B}_V$ heißen **gleich orientiert**, wenn die Transformationsmatrix $T = \mathcal{T}_{\widehat{B}_V}^{B_V}$ die Bedingung $\det(T) > 0$ erfüllt.
2. Zwei Basen $B_V$ und $\widehat{B}_V$ heißen **umgekehrt orientiert**, wenn die Transformationsmatrix $T = \mathcal{T}_{\widehat{B}_V}^{B_V}$ die Bedingung $\det(T) < 0$ erfüllt.

# Gleichorientierung ist Äquivalenzrelation

## Lemma 23.29

Es sei $V$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem geordneten Körper $K$.

Gleichorientierung ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Basen von $V$.

Für $\dim(V) = n \geq 1$ gibt es genau zwei Äquivalenzklassen. Jede Äq.klasse heißt eine Orientierung von $V$. Oft nennt man diese (willkürlich!) die pos. und neg. Orientierung.

Beispiel: Orientierung der Standardbasis $(e_1, \ldots, e_n)$ in $K^n$ wird als positiv festgelegt.

## Erinnerung an §20

- Bei Darstellungsmatrizen $A = \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f)$ von $f \in \operatorname{End}(V)$ wählen wir beide Basen gleich. Konseq.: $g \circ f$ wird dargestellt durch $BA$
- Ist $U$ ein $f$-invarianter Unterraum und wählen wir $f(U) \subseteq U$
  $B_V = (\underbrace{v_1, \dots, v_k}_{\text{Basis von } U}, \underbrace{v_{k+1}, \dots, v_n}_{\text{Basis von } W})$, dann gilt

  $V = U \oplus W$

$$\mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} k & n-k \end{array} & \\ \left[\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right] & \begin{array}{c} k \\ n-k \end{array} \end{array}$$

- Ist zusätzlich auch $W$ ein $f$-invarianter Unterraum, dann gilt

$$\mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f) = \left[\begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline 0 & * \end{array}\right]$$

$f(U) \subseteq U$
$f(W) \subseteq W$

## Erinnerung an §20

- $f \in \mathrm{End}(V)$ heißt **diagonalisierbar**, wenn

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n \qquad \mathcal{M}^{\mathcal{B}_V}_{\mathcal{B}_V}(f) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

gilt mit lauter eindimensionalen, $f$-invarianten Unterräumen.

$\Leftrightarrow$ Es gibt eine Basis von $V$ aus Eigenvektoren

- Die eindimensionalen, $f$-invarianten Unterräume werden durch Eigenvektoren aufgespannt: $U_i = \langle v_i \rangle$.

- $v_i$ $\neq 0$ heißt **Eigenvektor** zum **Eigenwert** $\lambda_i \in K$ von $f$, wenn gilt:

$$f(v_i) = \lambda_i v_i$$

# Paarweise verschiedene Eigenwerte

## Satz 24.1

$k \in \mathbb{N}_0$

Es sei $V$ ein Vektorraum über dem Körper $K$ und $f \in \mathrm{End}(V)$.

1. Sind $(v_1, \ldots, v_k)$ EV von $f$ zu paarweise verschiedenen EW $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$, dann ist $(v_1, \ldots, v_k)$ linear unabhängig.
2. $f$ hat höchstens $\dim(V)$ viele paarweise verschiedene Eigenwerte. $k \le \infty$

Beweis. ① Induktion nach $k \in \mathbb{N}_0$, $k=0$ ✓ $k=1$: $(v_1)$ ist linear unabhängig, da $v_1 \neq 0$. Es seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}$ paarweise verschiedene EW mit EV $v_1, \ldots, v_{k+1}$.

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} = 0 \qquad (*)$$

$$\Rightarrow f(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1}) = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \ldots + \alpha_k \lambda_k v_k + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} v_{k+1} = 0$$

subtrahiere $\lambda_{k+1} \cdot (*)$:

$$0 = \alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_{k+1}) v_1 + \ldots + \alpha_k (\lambda_k - \lambda_{k+1}) v_k + \alpha_k \underbrace{(\lambda_{k+1} - \lambda_{k+1})}_{=0} v_{k+1}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_{k+1})}_{\neq 0} = \ldots = \alpha_k \underbrace{(\lambda_k - \lambda_{k+1})}_{\neq 0} = 0. \Rightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0 \text{ und } \alpha_{k+1} = 0.$$

# Paarweise verschiedene Eigenwerte

hinreichende Bed. für Diagonalisierbarkeit

## Folgerung 24.2

Es sei $V$ ein Vektorraum über dem Körper $K$ und $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$.

Besitzt $f \in \operatorname{End}(V)$ $n$ paarweise verschiedene Eigenwerte, dann ist $f$ diagonalisierbar.

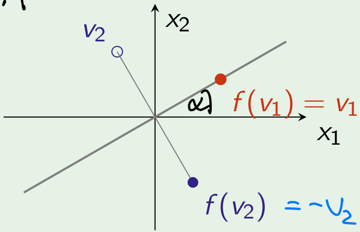
**Beweis.** $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ pw. verschiedene EW
mit EV $v_1, \ldots, v_n$ $\Rightarrow$ $(v_1, \ldots, v_n)$ ist linear unabhängig,
d.h. $(v_1, \ldots, v_n)$ bildet eine Basis von $V$ aus lauter EV, also ist $f$ diagonalisierbar (Satz 20.24).

# Paarweise verschiedene Eigenwerte

Spiegelung an einer Achse

## Beispiel 24.3

$$\begin{bmatrix} \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) & 2\cos(\alpha)\sin(\alpha) \\ 2\cos(\alpha)\sin(\alpha) & \sin^2(\alpha) - \cos^2(\alpha) \end{bmatrix} = A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$




$$A v_1 = A \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} = 1 \cdot v_1$$

$$A v_2 = A \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix} = -1 \cdot v_2$$

$$\mathcal{B}_V = (v_1, v_2)$$

$$M^{\mathcal{B}_V}_{\mathcal{B}_V}(f_A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

# Berechnung von Eigenvektoren zu gegebenem Eigenwert

$\lambda \in K$

$$f(v) = \lambda v$$

$\Leftrightarrow -f(v) + \lambda v = 0$

$\Leftrightarrow (\lambda \, id_V - f)(v) = 0$

$\Leftrightarrow v \in \operatorname{Ker}(\lambda \, id_V - f)$

$v^{\neq 0}$ ist also EV zum EW $\lambda$

$\Leftrightarrow v^{\neq 0} \in \operatorname{Ker}(\lambda \, id_V - f)$

$$A x = \lambda x$$

$\Leftrightarrow \lambda x - Ax = 0$

$\Leftrightarrow (\lambda I - A) x = 0$

$\Leftrightarrow x \in \operatorname{Ker}(\lambda I - A)$

$x^{\neq 0}$ ist also EV zum EW $\lambda$

$\Leftrightarrow 0 \neq x \in \operatorname{Ker}(\lambda I - A)$

Zu EW $\lambda \in K$ ist also $\operatorname{Ker}(\lambda I - A)$ mehr als $\{0\}$, also $\lambda I - A$ ist singulär!

### Lemma 24.~~5~~ 4

Es sei $V$ ein Vektorraum über dem Körper $K$ und $f \in \operatorname{End}(V)$.

1. $f$ ist injektiv $\Leftrightarrow$ 0 ist kein Eigenwert von $f$.
2. Ist $V$ endlich-dimensional, dann gilt sogar:
   $f$ ist bijektiv $\Leftrightarrow$ 0 ist kein Eigenwert von $f$.

### Lemma 24.5

Es sei $K$ ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

$A$ ist regulär $\Leftrightarrow$ 0 ist kein Eigenwert von $A$.

# Eigenraum, geometrische Vielfachheit

## Definition 24.6

Es sei $V$ ein Vektorraum über dem Körper $K$.

1. Ist $f \in \mathrm{End}(V)$ und $\lambda \in K$, dann heißen

$$\mathrm{Eig}(f,\lambda) := \{v \in V \mid f(v) = \lambda\, v\} \quad \text{und} \quad \mu^{\text{geo}}(f,\lambda) := \dim(\mathrm{Eig}(f,\lambda))$$

$= \mathrm{Ker}(\lambda \, \mathrm{id}_V - f)$

   der **Eigenraum** von $f$ zu $\lambda$ bzw. die **geometrische Vielfachheit** von $\lambda$.

2. Ist $A \in K^{n\times n}$ und $\lambda \in K$, dann heißt

$$\mathrm{Eig}(A,\lambda) := \{v \in V \mid A\, v = \lambda\, v\} \quad \text{und} \quad \mu^{\text{geo}}(A,\lambda) := \dim(\mathrm{Eig}(A,\lambda))$$

$= \mathrm{Ker}(\lambda I - A)$

   der **Eigenraum** von $A$ zu $\lambda$ bzw. die **geometrische Vielfachheit** von $\lambda$.

### Lemma 24.7

Es sei $V$ ein Vektorraum über dem Körper $K$, $f \in \operatorname{End}(V)$ sowie $\lambda \in K$.

1. $\operatorname{Eig}(f, \lambda)$ ist ein Unterraum von $V$.
2. $\operatorname{Eig}(f, \lambda) \overset{?}{\neq} \{0\} \Leftrightarrow \lambda$ ist ein Eigenwert von $f$.
3. $\operatorname{Eig}(f, \lambda) \setminus \{0\}$ ist die Menge der zu $\lambda$ gehörenden Eigenvektoren von $f$.
4. $\operatorname{Eig}(f, \lambda) = \operatorname{Kern}(\lambda \operatorname{id}_V - f)$.
5. Ist $\lambda_1 \neq \lambda_2$, dann gilt $\operatorname{Eig}(f, \lambda_1) \cap \operatorname{Eig}(f, \lambda_2) = \{0\}$.

# Eigenschaften von Eigenräumen von Matrizen

## Lemma 24.8

Es sei $K$ ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ sowie $\lambda \in K$.

1. $\operatorname{Eig}(A, \lambda)$ ist ein Unterraum von $V$.
2. $\operatorname{Eig}(A, \lambda) \overset{?}{\neq} \{0\} \Leftrightarrow \lambda$ ist ein Eigenwert von $A$.
3. $\operatorname{Eig}(A, \lambda) \setminus \{0\}$ ist die Menge der zu $\lambda$ gehörenden Eigenvektoren von $A$.
4. $\operatorname{Eig}(A, \lambda) = \operatorname{Kern}(\lambda\, I - A)$.
5. Ist $\lambda_1 \neq \lambda_2$, dann gilt $\operatorname{Eig}(A, \lambda_1) \cap \operatorname{Eig}(A, \lambda_2) = \{0\}$.

$P \circ P = P = \mathrm{id} \circ P$
(idempotent)

## Lemma 24.9

Es sei $V$ ein Vektorraum über dem Körper $K$ und $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei $P \in \mathrm{End}(V)$ ein Projektor und $r := \mathrm{Rang}(P)$.

1. $V = \mathrm{Kern}(P) \oplus \mathrm{Bild}(P)$.
2. Für die Eigenwerte von $P$ gilt $\Lambda(P) \subseteq \{0, 1\}$.

Menge der EW von P

**Beweis.** ① $\dim(V) = \dim(\mathrm{Bild}(P)) + \dim(\mathrm{Kern}(P))$.
nach Dim.-Satz für lineare Abbildungen
Es sei $v \in \mathrm{Kern}(P) \cap \mathrm{Bild}(P)$, also $v = P(u)$ für ein $u \in V$.
Außerdem $P(v) = 0$. $\Rightarrow v = P(u) = P(P(u)) = P(v) = 0$
$\Rightarrow$ (Satz 14.7) $V = \mathrm{Kern}(P) \oplus \mathrm{Bild}(P)$.
② Es sei $v \neq 0$ ein EV von $P$ zu $\lambda \in K$.
$P(v) = \lambda v$ und $P(v) = P(P(v)) = P(\lambda v) = \lambda P(v) = \lambda^2 v$
$\Rightarrow \lambda = \lambda^2 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ oder $\lambda = 1$.

# Projektoren sind diagonalisierbar

## Lemma 24.9

Es sei $V$ ein Vektorraum über dem Körper $K$ und $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei $P \in \operatorname{End}(V)$ ein Projektor und $r := \operatorname{Rang}(P)$.

3. Jedes $v \in \operatorname{Bild}(P) \setminus \{0\}$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert 1. Es gilt $\mu^{\text{geo}}(f, 1) = r = \operatorname{Rang}(P) = \dim(\operatorname{Bild}(P))$.
4. Jedes $v \in \operatorname{Kern}(P) \setminus \{0\}$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert 0. Es gilt $\mu^{\text{geo}}(f, 0) = n - r = \operatorname{Defekt}(P) = \dim(\operatorname{Kern}(P))$.

Beweis.

# Projektoren sind diagonalisierbar

## Lemma 24.9

Es sei $V$ ein Vektorraum über dem Körper $K$ und $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei $P \in \operatorname{End}(V)$ ein Projektor und $r := \operatorname{Rang}(P)$.

5. Wählen wir eine Basis als $B_V = (\underbrace{v_1, \ldots, v_r}_{\text{Bild}(P)}, \underbrace{v_{r+1}, \ldots, v_n}_{\text{Kern}(P)})$, dann hat $A = \mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(P)$ die Diagonalgestalt

$$A = \left[\begin{array}{cccccc} 1 &&&&& \\ & \ddots &&&& \\ && 1 &&& \\ &&& 0 && \\ &&&& \ddots & \\ &&&&& 0 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow r\text{-te Zeile} \\ \leftarrow (r+1)\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \end{array}$$

**Beweis.**