Lineare Algebra II

Woche 05

14.05.2024 und 16.05.2024

Vorschau

Wir betrachten einen endlich-dimensionalen Vektorraum V über dem Körper K mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$.

Die Determinante ist eine Maßzahl für Endomorphismen $f \in \operatorname{End}(V)$.

- Wir definieren Determinantenformen auf $V^n = V \times \cdots \times V$.
- Wir definieren die Determinante für Matrizen in $K^{n \times n}$.
- Wir übertragen den Begriff der Determinante mit Hilfe von Darstellungsmatrizen auf Endomorphismen $f \in \operatorname{End}(V)$.

Determinantenform

Definition 23.1

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$.

Eine Abbildung

$$\Delta \colon V^n \ni (v_1, \ldots, v_n) \mapsto \Delta(v_1, \ldots, v_n) \in K$$

heißt eine **Determinantenform** auf V^n, wenn folgende Eigenschaften gelten:

1. Δ ist eine n-lineare Form auf V^n.
2. Δ ist alternierend.
3. Δ ist nicht die Nullform.

Bedeutung der alternierenden Eigenschaft

Lemma 23.2

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$.

Dann sind äquivalent:

1. T ist alternierend.
2. Wenn $(v_1, \ldots, v_n)$ linear abhängig ist, dann gilt $T(v_1, \ldots, v_n) = 0$.

Beweis.

Gestalt von Determinantenformen

Lemma 23.3

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit Basis $(b_1, \ldots, b_n)$.

Ist Δ eine Determinantenform auf V^n, dann gilt:

$$\Delta(v_1, \ldots, v_n) = \Big(\sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) \, t_{\sigma(1),1} \cdots t_{\sigma(n),n} \Big) \, \Delta(b_1, \ldots, b_n)$$

für alle $(v_1, \ldots, v_n) \in V^n$, wobei T die durch

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} \, b_i$$

eindeutig definierte Matrix ist.

Gestalt von Determinantenformen

Lemma 23.3

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit Basis $(b_1, \ldots, b_n)$.

Ist Δ eine Determinantenform auf V^n, dann gilt:

$$\Delta(v_1, \ldots, v_n) = \Big(\sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma)\, t_{\sigma(1),1} \cdots t_{\sigma(n),n} \Big)\, \Delta(b_1, \ldots, b_n).$$

Beweis.

Determinantenformen erkennen Basen

Folgerung 23.4

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$.

Ist Δ eine Determinantenform auf V^n, dann sind äquivalent:

1. $\Delta(v_1, \ldots, v_n) \neq 0$.
2. $(v_1, \ldots, v_n)$ ist eine Basis von V.

Existenz von Determinantenformen

Satz 23.5

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit Basis $(b_1, \ldots, b_n)$.

Zu jedem $\alpha \in K \setminus \{0\}$ gibt es genau eine Determinantenform auf V^n mit der Eigenschaft $\Delta(b_1, \ldots, b_n) = \alpha$, und zwar

$$\Delta(v_1, \ldots, v_n) = \Big(\sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma)\, t_{\sigma(1),1} \cdots t_{\sigma(n),n} \Big)\, \Delta(b_1, \ldots, b_n),$$

wobei T die durch $v_j = \sum_{i=1}^n t_{ij}\, b_i$ eindeutig definierte Matrix ist.

Determinante einer Matrix

Es sei $V = K^n$ über dem Körper K mit Basis $(e_1, \dots, e_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad a_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, e_i .$$

Für eine Determinantenform Δ gilt dann

$$\Delta(\qquad\qquad) = \Big(\sum_{\sigma \in S_n} \qquad\qquad\qquad\qquad \Big) \, \Delta(e_1, \dots, e_n).$$

Definition 23.6

Die Determinante von $A \in K^{n \times n}$ ist

$$\det(A) := \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma)\, a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

Determinante einer Matrix

Beispiel 23.7

1. Im Fall $n = 1$ gilt für $A = (a)$

2. Im Fall $n = 2$ gilt

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} =$$

Determinante einer Matrix

Beispiel 23.7

3. Im Fall $n = 3$ gilt

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{aligned} & a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{21}\,a_{32}\,a_{13} + a_{31}\,a_{12}\,a_{23} \\ - & a_{31}\,a_{22}\,a_{13} - a_{21}\,a_{12}\,a_{33} - a_{11}\,a_{32}\,a_{23} \end{aligned}$$

Regel von Sarrus

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

Eigenschaften der Determinante

Lemma 23.8

Es sei K ein Körper und $A, B \in K^{n\times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

1. $\det(A)$ ist eine alternierende Multilinearform auf den Spaltenvektoren $(a_{\bullet 1}, \ldots, a_{\bullet n})$ von A.
2. $\det(\alpha\, A) = \alpha^n \det(A)$ für alle $\alpha \in K$.
3. $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ ist regulär $\Leftrightarrow \operatorname{Rang}(A) = n$ $\Leftrightarrow (a_{\bullet 1}, \ldots, a_{\bullet n})$ ist linear unabhängig.

Beweis.

Eigenschaften der Determinante

Lemma 23.8

Es sei K ein Körper und $A, B \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

4. $\det(I) = 1$.
5. $\det(A\,B) = \det(A)\,\det(B)$.

Beweis.

Eigenschaften der Determinante

Lemma 23.8

Es sei K ein Körper und $A, B \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

6. $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$, falls A invertierbar ist.
7. $\det(A^\mathsf{T}) = \det(A)$.

Beweis.

Ähnliche Matrizen haben dieselbe Determinante

Lemma 23.9

Es sei K ein Körper und $A, \widehat{A} \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Sind A und $\widehat{A}$ ähnlich, dann gilt $\det(A) = \det(\widehat{A})$.

Beweis.

Determinante einer Dreiecksmatrix

Lemma 23.10

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

1. Ist A eine obere oder untere Dreiecksmatrix, dann gilt
$$\det(A) = a_{11} \cdots a_{nn}.$$
2. Ist A eine obere oder untere Blockdreiecksmatrix, also
$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix},$$
dann gilt
$$\det(A) = \det(A_{11}) \det(A_{22}).$$

Beweis. Übung

Determinante bei elementaren Zeilenoperationen

Typ I

$$\text{Für } D := \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \alpha & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \text{ gilt } \det(D) =$$

Determinante bei elementaren Zeilenoperationen

Typ II

$$\text{Für } S := \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & {\color{red}\alpha} \quad 1 & \\ & & \ddots \\ & & & 1 \end{bmatrix} \text{ gilt } \det(S) =$$

Determinante bei elementaren Zeilenoperationen

Typ III

$$\text{Für } T := \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 0 & & & 1 & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & 1 & & & 0 & \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \text{ gilt } \det(T) =$$

Berechnung der Determinante durch Zeilenoperationen

Beispiel 23.11

Wir bestimmen die Determinante der folgenden Matrix über $\mathbb{Z}_5$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Streichungsmatrix

Definition 23.12

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

1. Die **Streichungsmatrix** von A bzgl. (i, j) ist

$$(A)_{\neq i, \neq j} := \begin{bmatrix} a_{1,1} & \text{———} & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \text{———} & a_{1,n} \\ | & & | & | & & | \\ a_{i-1,1} & \text{———} & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \text{———} & a_{i-1,n} \\ & & & & & \\ a_{i+1,1} & \text{———} & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \text{———} & a_{i+1,n} \\ | & & | & | & & | \\ a_{n,1} & \text{———} & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \text{———} & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Minor

Definition 23.12

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

2. Der **Minor** oder die **Unterdeterminante** von A bzgl. des Index (i,j) ist die Determinante der zugehörigen Streichungsmatrix, also

$$[A]_{ij} := \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \text{———} & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \text{———} & a_{1,n} \\ | & & | & | & & | \\ a_{i-1,1} & \text{———} & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \text{———} & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \text{———} & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \text{———} & a_{i+1,n} \\ | & & | & | & & | \\ a_{n,1} & \text{———} & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \text{———} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Kofaktormatrix und Adjunkte

Definition 23.12

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

3. Die Größe
$$\widetilde{a}_{ij} := (-1)^{i+j} \, [A]_{ij}$$
heißt der **Kofaktor** der Matrix A bzgl. des Index (i, j).

   Die Matrix $\operatorname{cof}(A) := (\widetilde{a}_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ heißt die **Kofaktormatrix** von A.

4. Die **Adjunkte** von A oder die zu A **komplementäre Matrix** ist die Transponierte der Kofaktormatrix:
$$\operatorname{adj}(A) := \operatorname{cof}(A)^{\mathsf{T}}.$$

Alternative Definition der Kofaktoren

Lemma 23.13

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

$$\widetilde{a}_{ij} = \det \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & 1 & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \uparrow j\text{-te Spalte} & \end{array}$$

Beispiel 23.14

Was sind die Kofaktoren der Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$?

Bedeutung der Adjunkten

Lemma 23.15

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Dann gilt
$$\operatorname{adj}(A)\, A = A \operatorname{adj}(A) = \det(A)\, I.$$

Beweis.

Entwicklungssatz von Laplace

Satz 23.17

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Dan gillt:

Entwicklung nach der i-ten Zeile:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \, a_{ij} \, [A]_{ij}$$

Entwicklung nach der j-ten Spalte:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \, a_{ij} \, [A]_{ij}$$

Entwicklungssatz von Laplace

Beispiel 23.18

Wir entwickeln die Determinante von

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$$

nach der zweiten Spalte:

Cramersche Regel

Satz 23.19

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Ist A invertierbar und $b \in K^n$, dann gilt für die Lösung von $A\,x = b$:

$$x_i = \frac{\det(a_{\bullet 1}, \ldots, a_{\bullet i-1}, b, a_{\bullet i+1}, \ldots, a_{\bullet n})}{\det(A)} \quad \text{für } i = 1, \ldots, n.$$

Beispiel 23.20

Wir betrachten das lineare Gleichungssystem $A\,x = b$ über $\mathbb{Q}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$