Lineare Algebra II

Woche 05

14.05.2024 und 16.05.2024

Vorschau

Wir betrachten einen endlich-dimensionalen Vektorraum V über dem Körper K mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$.

Die Determinante ist eine Maßzahl für Endomorphismen $f \in \operatorname{End}(V)$.

- Wir definieren Determinantenformen auf $V^n = V \times \cdots \times V$.
- Wir definieren die Determinante für Matrizen in $K^{n \times n}$.
- Wir übertragen den Begriff der Determinante mit Hilfe von Darstellungsmatrizen auf Endomorphismen $f \in \operatorname{End}(V)$.

Determinantenform

Definition 23.1

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$.

Eine Abbildung

$$\Delta\colon V^n \ni (v_1, \ldots, v_n) \mapsto \Delta(v_1, \ldots, v_n) \in K$$

heißt eine **Determinantenform** auf V^n, wenn folgende Eigenschaften gelten:

1. Δ ist eine n-lineare Form auf V^n.
2. Δ ist alternierend. (insbesondere schiefsymmetrisch)
3. Δ ist nicht die Nullform.

Bis auf Skalierung gibt es nur eine Det.-form auf V^n.

Lemma 23.2

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$.

Dann sind äquivalent: für $T \in \mathcal{T}^0_n(V) \cong \mathrm{Mult}(V \times \cdots \times V; K)$

1. T ist alternierend.
2. Wenn $(v_1, \ldots, v_n)$ linear abhängig ist, dann gilt $T(v_1, \ldots, v_n) = 0$.

Beweis. ① ⇒ ② $(v_1, \ldots, v_n)$ linear abhängig, dann gilt (Lemma 13.8)

$$v_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \alpha_j v_j \; ; \text{ OBdA } i=1.$$

$$T(v_1, \ldots, v_n) = T\Big(\sum_{j=2}^{n} \alpha_j v_j, v_2, \ldots, v_n\Big) =$$

$$= \sum_{j=2}^{n} \alpha_j \underbrace{T(v_j, v_2, \ldots, v_n)}_{=0} = 0.$$

② ⇒ ①: $(v_1, \ldots, v_n)$ mit zwei id. Vektoren ⇒ $(v_1, \ldots, v_n)$ ist linear abhängig, also $T(v_1, \ldots, v_n) = 0$, d.h. T alternierend.

Lemma 23.3 $(n \in \mathbb{N}_0)$

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit Basis $(b_1, \ldots, b_n)$.

Ist Δ eine Determinantenform auf V^n, dann gilt:

$$\Delta(v_1, \ldots, v_n) = \Big(\underbrace{\sum_{\sigma \in S_n}}_{\text{Permutationen von } \{1,\ldots,n\}} \overbrace{(\operatorname{sgn} \sigma)}^{\pm 1} \, t_{\sigma(1),1} \cdots t_{\sigma(n),n} \Big) \, \underbrace{\Delta(b_1, \ldots, b_n)}_{\text{Normierung}}$$

für alle $(v_1, \ldots, v_n) \in V^n$, wobei T die durch

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} \, b_i$$

spaltenweise Koordinaten von $v_1, \ldots, v_n$ bzgl. der Basis $(b_1, \ldots, b_n)$

eindeutig definierte Matrix ist.

Lemma 23.3

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit Basis $(b_1, \ldots, b_n)$.

Ist Δ eine Determinantenform auf V^n, dann gilt:

$$\Delta(v_1, \ldots, v_n) = \Big(\sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma)\, t_{\sigma(1),1} \cdots t_{\sigma(n),n} \Big)\, \Delta(b_1, \ldots, b_n).$$

Beweis.

$$\Delta(v_1, \ldots, v_n) = \Delta\Big(\sum_{i_1=1}^{n} t_{i_1 1} b_{i_1}, \sum_{i_2}^{n} t_{i_2 2} b_{i_2}, \ldots, \sum_{i_n}^{n} t_{i_n n} b_{i_n} \Big)$$

$$= \sum_{i_1=1}^{n} t_{i_1 1}\, \Delta\Big(b_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{n} t_{i_2 2} b_{i_2}, \ldots \Big) = \ldots$$

$$= \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} t_{i_1 1} \cdots t_{i_n n}\, \underbrace{\Delta(b_{i_1}, \ldots, b_{i_n})}_{\neq 0 \text{ nur, wenn alle verschieden!}} \qquad n^n \text{ Summ!}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} t_{\sigma(1),1} \cdots t_{\sigma(n),n}\, \underbrace{\Delta(b_{\sigma(1)}, \ldots, b_{\sigma(n)})}_{= (\operatorname{sgn} \sigma)\, \Delta(b_1, \ldots, b_n)}$$

Determinantenformen erkennen Basen

Folgerung 23.4

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$.

Ist Δ eine Determinantenform auf V^n, dann sind äquivalent:

1. $\Delta(v_1, \ldots, v_n) \neq 0$.
2. $(v_1, \ldots, v_n)$ ist eine Basis von V.

Satz 23.5

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit Basis $(b_1, \dots, b_n)$.

Zu jedem $\alpha \in K \setminus \{0\}$ gibt es genau eine Determinantenform auf V^n mit der Eigenschaft $\Delta(b_1, \dots, b_n) = \alpha$, und zwar

unabh. von der Normierung

$$\Delta(v_1, \dots, v_n) = \boxed{\left(\sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma)\, t_{\sigma(1),1} \cdots t_{\sigma(n),n} \right)} \underbrace{\Delta(b_1, \dots, b_n)}_{= \alpha \neq 0 \quad \text{Normierung}},$$

wobei T die durch $v_j = \sum_{i=1}^{n} t_{ij}\, b_i$ eindeutig definierte Matrix ist.

Leibniz-Formel

Determinante einer Matrix

Es sei $V = K^n$ über dem Körper K mit Basis $(e_1, \dots, e_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad a_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, e_i .$$

Für eine Determinantenform Δ gilt dann

$$\underbrace{\Delta(a_1, \dots, a_n)}_{\rightsquigarrow \text{ heißt \underline{die} Determinante}} = \Big(\sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma)\, a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} \Big) \underbrace{\Delta(e_1, \dots, e_n)}_{\text{wenn} \dots \text{ auf 1 normiert wird}} .$$

Definition 23.6

Die Determinante von $A \in K^{n \times n}$ ist

Leibniz-Formel

$$\det(A) := \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma)\, a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

Beispiel 23.7

1. Im Fall $n = 1$ gilt für $A = (a)$

   $\det(A) = a$

2. Im Fall $n = 2$ gilt

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = +a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Beispiel 23.7

3. Im Fall $n = 3$ gilt

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{matrix} & a_{11}\,a_{22}\,a_{33} & + & a_{21}\,a_{32}\,a_{13} & + & a_{31}\,a_{12}\,a_{23} \\ - & a_{31}\,a_{22}\,a_{13} & - & a_{21}\,a_{12}\,a_{33} & - & a_{11}\,a_{32}\,a_{23} \end{matrix}$$

Regel von Sarrus nur für 3x3-Matrizen

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Eigenschaften der Determinante

Lemma 23.8

Es sei K ein Körper und $A, B \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

1. $\det(A)$ ist eine alternierende Multilinearform auf den Spaltenvektoren $(a_{\bullet 1}, \ldots, a_{\bullet n})$ von A.
2. $\det(\alpha\, A) = \alpha^n \det(A)$ für alle $\alpha \in K$.
3. $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ ist regulär $\Leftrightarrow \operatorname{Rang}(A) = n$ $\Leftrightarrow (a_{\bullet 1}, \ldots, a_{\bullet n})$ ist linear unabhängig.

Beweis. ① siehe Beweis von Satz 23.5

② folgt aus der Multilinearität

③ $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow (a_{\cdot 1}, \ldots, a_{\cdot n})$ linear unabh. (Folg. 23.4)
$\Leftrightarrow \operatorname{Rang}(A) = n$ (Satz 15.12)
$\Leftrightarrow A$ ist regulär (Satz 15.40)

Eigenschaften der Determinante

$I = (\delta_{ij})$

Lemma 23.8

Es sei K ein Körper und $A, B \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

4. $\det(I) = 1$.
5. $\det(A\,B) = \det(A)\,\det(B)$.

Beweis. (4) $\det(I) = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) \; \delta_{\sigma(1),1} \cdots \delta_{\sigma(n),n}$

$= (\operatorname{sgn} \mathrm{id})\, 1 \cdots 1 = 1.$

(5) $A \neq 0$, sonst ist $\underbrace{\det(\overbrace{AB}^{=0})}_{=0} = \underbrace{\det(A)}_{=0} \det(B)$ klar.

Ab jetzt sei $A \neq 0$.

$AB = [A b_{\cdot 1} \cdots A b_{\cdot n}]$, det ist multilinear auf den Spalten von B, alternierend und nicht die Nullform.

$\Rightarrow$ $(b_{\cdot 1}, \ldots, b_{\cdot n}) \mapsto \det(AB)$ ist eine Detform auf $(K^n)^n$, ebenso wie $(b_{\cdot 1}, \ldots, b_{\cdot n}) \mapsto \det(A) \det(B)$. $A = I$ zeigt Ergebnis.

Eigenschaften der Determinante

Lemma 23.8

Es sei K ein Körper und $A, B \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

6. $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$, falls A invertierbar ist.
7. $\det(A^\mathsf{T}) = \det(A)$.

Beweis. (6) $1 = \det(I) = \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1})$

(7) aus Leibniz-Formel, siehe Skript

Ähnliche Matrizen haben dieselbe Determinante

Lemma 23.9

Es sei K ein Körper und $A, \widehat{A} \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Sind A und $\widehat{A}$ ähnlich, dann gilt $\det(A) = \det(\widehat{A})$.

Beweis. $\hat{A} = T A T^{-1}$

$$\det(\hat{A}) = \det(T)\det(A)\underbrace{\det(T^{-1})}_{= \frac{1}{\det(T)}}$$

$$= \det(A).$$

Determinante einer Dreiecksmatrix

Lemma 23.10

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

1. Ist A eine obere oder untere Dreiecksmatrix, dann gilt

$$\det(A) = a_{11} \cdots a_{nn}.$$

2. Ist A eine obere oder untere Blockdreiecksmatrix, also

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix},$$

dann gilt

$$\det(A) = \det(A_{11}) \det(A_{22}).$$

Beweis. Übung

Determinante bei elementaren Zeilenoperationen

bzw. Spaltenoperationen

Typ I (nur für reduzierte ZSF)

$$\text{Für } D := \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \alpha & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \text{ gilt } \det(D) = \alpha$$

$\alpha \in K$

Folie 16

Determinante bei elementaren Zeilenoperationen

Typ II

$$\text{Für } S := \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & \alpha & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \text{ gilt } \det(S) = 1$$

Determinante bei elementaren Zeilenoperationen

Typ III

$$\text{Für } T := \begin{array}{cc} & \begin{matrix} & & i & & j & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ \\ i \rightarrow \\ \\ j \rightarrow \\ \\ \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots\ 1 & & & & \\ & & \color{red}{0} & & \color{red}{1} & \\ & & & 1\ \ddots\ 1 & & \\ & & \color{red}{1} & & \color{red}{0} & \\ & & & & & 1\ \ddots\ 1 \end{bmatrix} \end{array} \text{ gilt } \det(T) = -1$$

$$\det T = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma)\, t_{\sigma(1),1} \cdots t_{\sigma(n),n} = (\underbrace{\operatorname{sgn} \tau(i,j)}_{=-1}) \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1$$

Berechnung der Determinante durch Zeilenoperationen

Bringe die Matrix auf ZSF (oder ∇)

Beispiel 23.11

Wir bestimmen die Determinante der folgenden Matrix über $\mathbb{Z}_5$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad (\cdot 2) \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = (-1) \cdot 0 = 0$$

Sarrus: $\det(A) = 0 + 0 + 3 - [3 + 0 + 0] = 0$

Definition 23.12

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

1. Die **Streichungsmatrix** von A bzgl. (i, j) ist

$$(A)_{\neq i,\neq j} := \begin{bmatrix} a_{1,1} & \text{——} & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \text{——} & a_{1,n} \\ | & & | & | & & | \\ a_{i-1,1} & \text{——} & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \text{——} & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \text{——} & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \text{——} & a_{i+1,n} \\ | & & | & | & & | \\ a_{n,1} & \text{——} & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \text{——} & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

$\leftarrow i$

$\uparrow j$

Minor / Unterdeterminante

Definition 23.12

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

2. Der **Minor** oder die $\boxed{\textbf{Unterdeterminante}}$ von A bzgl. des Index (i, j) ist die Determinante der zugehörigen Streichungsmatrix, also

$$[A]_{ij} := \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \text{———} & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \text{———} & a_{1,n} \\ | & & | & | & & | \\ a_{i-1,1} & \text{———} & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \text{———} & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \text{———} & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \text{———} & a_{i+1,n} \\ | & & | & | & & | \\ a_{n,1} & \text{———} & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \text{———} & a_{n,n} \end{pmatrix} \leftarrow i$$

$$\uparrow j$$

$\det((A)_{\neq i, \neq j})$

Kofaktormatrix und Adjunkte

Definition 23.12

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

3. Die Größe
$$\widetilde{a}_{ij} := (-1)^{i+j} \, [A]_{ij}$$
Unterdeterminanten mit Vorzeichen

heißt der **Kofaktor** der Matrix A bzgl. des Index (i, j).

Die Matrix $\operatorname{cof}(A) := (\widetilde{a}_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ heißt die **Kofaktormatrix** von A.

4. Die **Adjunkte** von A oder die zu A **komplementäre Matrix** ist die Transponierte der Kofaktormatrix:
$$\operatorname{adj}(A) := \operatorname{cof}(A)^\mathsf{T}.$$

Alternative Definition der Kofaktoren ohne Streichung

Lemma 23.13

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

$$\widetilde{a}_{ij} = \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & 1 & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$\uparrow j$-te Spalte

ersetzt durch e_i

Beispiel 23.14

Was sind die Kofaktoren der Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$?

$$\tilde{a}_{11} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 4$$

$$\tilde{a}_{12} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = -3$$

$$\tilde{a}_{21} = \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = -2$$

$$\tilde{a}_{22} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\operatorname{cof}(A) = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \det(A)\, I$$

Bedeutung der Adjunkten

Lemma 23.15

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Dann gilt

$$\operatorname{adj}(A)\, A = A \operatorname{adj}(A) = \det(A)\, I.$$

Beweis. $B := \operatorname{adj}(A) A$

$$b_{ik} = \sum_{j=1}^{n} [\operatorname{adj}(A)]_{ij}\, a_{jk} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ji}\, a_{jk}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{jk} \det(a_{\cdot 1}, \ldots, a_{\cdot i-1}, e_j, a_{\cdot i+1}, \ldots, a_{\cdot n})$$

$$= \underbrace{\det\Big(a_{\cdot 1}, \ldots, a_{\cdot i-1}, \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{jk} e_j}_{= a_{\cdot k}}, a_{\cdot i+1}, \ldots, a_{\cdot n}\Big)}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{wenn } i \neq k \\ \det(A), & \text{wenn } i = k \end{cases} \qquad \Rightarrow B = \operatorname{adj}(A) A = \det(A)\, I.$$

Entwicklungssatz von Laplace

bietet sich an, wenn A Nulleinträge hat

Satz 23.17

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Dan gillt:

Entwicklung nach der i-ten Zeile: ⤳ Nullen in dieser Zeile

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ij}\, [A]_{ij}$$

Entwicklung nach der j-ten Spalte: ⤳ Nullen in dieser Spalte

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ij}\, [A]_{ij}$$

Entwicklungssatz von Laplace

Beispiel 23.18

Wir entwickeln die Determinante von

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix} \qquad A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$$

nach der zweiten Spalte:

$$\det(A) = (-1)\cdot 2 \cdot \det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} + (+1)\, 1 \cdot \det\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -2\cdot(3) + 1 \cdot 10 = 4$$

Cramersche Regel

$\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

Satz 23.19

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Ist A invertierbar und $b \in K^n$, dann gilt für die Lösung von $A\,x = b$:

$$x_i = \frac{\det(a_{\bullet 1}, \ldots, a_{\bullet i-1}, b, a_{\bullet i+1}, \ldots, a_{\bullet n})}{\det(A)} \quad \text{für } i = 1, \ldots, n.$$

Cramersche Regel

Beispiel 23.20

Wir betrachten das lineare Gleichungssystem $A\,x = b$ über $\mathbb{Q}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\det(A) = 4 \neq 0$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{4} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{3}{4} \\ x_2 &= \frac{1}{4} \det \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{17}{4} \\ x_3 &= \frac{1}{4} \det \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{12}{4} \end{aligned}\right\} \; x = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 \\ 17 \\ -12 \end{pmatrix}$$