

Lineare Algebra II

Woche 04

06.05.2024 und 07.05.2024

Multilineare Abbildungen

Definition 22.18 (vgl. Definition 22.1)

Es seien V_1, \dots, V_N, W Vektorräume über dem Körper K für $N \in \mathbb{N}_0$.

- 1 Eine Abbildung

$$f: V_1 \times \dots \times V_N \rightarrow W$$

heißt **multilinear** oder genauer **N -linear**, wenn für jedes $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ und alle fest gewählten $\bar{v}_j \in V_j$, $j \in \llbracket 1, N \rrbracket \setminus \{i\}$, die Abbildung

$$V_i \ni v_i \mapsto f(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{i-1}, v_i, \bar{v}_{i+1}, \dots, \bar{v}_N) \in W$$

linear ist.

- 2 Die Menge aller multilinearen Abbildungen $V_1 \times \dots \times V_N \rightarrow W$ bezeichnen wir mit $\text{Mult}(V_1, \dots, V_N; W)$.

Multilineare Abbildungen

Definition 22.18 (vgl. Definition 22.1)

Es seien V_1, \dots, V_N Vektorräume über dem Körper K für $N \in \mathbb{N}_0$.

- ③ Eine multilineare Abbildung in den Vektorraum $W = K$ nennen wir eine **Multilinearform** auf $V_1 \times \dots \times V_N$.

- ④ Die Menge aller Multilinearformen $V_1 \times \dots \times V_N \rightarrow K$ bezeichnen wir mit $\text{Mult}(V_1, \dots, V_N)$ oder $\text{Mult}(V_1, \dots, V_N; K)$.

Die Fälle $N = 0$, $N = 1$ und $N = 2$

Bemerkung 22.19

① $N = 0$:

$$V_1 \times \cdots \times V_N$$

② $N = 1$:

$$\text{Mult}(V_1; W) = \text{Hom}(V_1, W)$$

③ $N = 2$:

$$\text{Mult}(V_1, V_2; W) = \text{Bil}(V_1, V_2; W)$$

Multilineare Abbildungen bilden einen Vektorraum

Lemma 22.20 (vgl. Lemma 22.3)

Es seien V_1, \dots, V_N, W Vektorräume über dem Körper K für $N \in \mathbb{N}_0$.

Dann ist $\text{Mult}(V_1, \dots, V_N; W)$ ein Unterraum des Vektorraumes

$$W^{V_1 \times \dots \times V_N} = \{f: V_1 \times \dots \times V_N \rightarrow W\}$$

aller Abbildungen $V_1 \times \dots \times V_N \rightarrow W$.

Existenz und Eindeutigkeit multilinearer Abbildungen

Satz 22.21 (vgl. Satz 22.4)

Es seien V_1, \dots, V_N, W Vektorräume über dem Körper K für $N \in \mathbb{N}_0$.
Weiter seien

- $(v_{k,i_k})_{i_k \in I_k}$ Basen von V_k für $k = 1, \dots, N$
- $(w_{i_1, \dots, i_N})_{(i_1, \dots, i_N) \in I_1 \times \dots \times I_N}$ eine Familie von Vektoren in W .

Dann gibt es genau eine multilineare Abbildung

$$f: V_1 \times \dots \times V_N \rightarrow W$$

mit der Eigenschaft

$$f(v_{i_1}, \dots, v_{i_N}) = w_{i_1, \dots, i_N} \quad \text{für alle } (i_1, \dots, i_N) \in I_1 \times \dots \times I_N.$$

Das Tensorprodukt $V_1 \otimes \cdots \otimes V_N$

Definition 22.22 (vgl. Definition 22.7)

Es seien V_1, \dots, V_N Vektorräume über dem Körper K für $N \in \mathbb{N}_0$.
Weiter seien $(v_{k,i_k})_{i_k \in I_k}$ Basen von V_k für $k = 1, \dots, N$.

1 Der Vektorraum

$$V_1 \otimes \cdots \otimes V_N = \bigotimes_{i=1}^N V_i$$
$$:= \left\{ T: I_1 \times \cdots \times I_N \rightarrow K \mid \begin{array}{l} T(i_1, \dots, i_N) \neq 0 \text{ nur für endlich viele} \\ (i_1, \dots, i_N) \in I_1 \times \cdots \times I_N \end{array} \right\}$$

heißt ein **Tensorproduktraum** $V_1 \otimes \cdots \otimes V_N$.

2 Elemente von $V_1 \otimes \cdots \otimes V_N$ heißen **Tensoren** der **Stufe** oder **Ordnung** N .

Der Nullvektor in $V_1 \otimes \cdots \otimes V_N$, also die Nullabbildung
 $T: I_1 \times \cdots \times I_N \rightarrow K$, heißt der **Nulltensor**.

Das Tensorprodukt $V_1 \otimes \cdots \otimes V_N$

Definition 22.22 (vgl. Definition 22.7)

Es seien V_1, \dots, V_N Vektorräume über dem Körper K für $N \in \mathbb{N}_0$.
Weiter seien $(v_{k,i_k})_{i_k \in I_k}$ Basen von V_k für $k = 1, \dots, N$.

③ Die **universelle multilineare Abbildung** ist diejenige Abbildung

$$\otimes: V_1 \times \cdots \times V_N \ni (v_1, \dots, v_N) \mapsto v_1 \otimes \cdots \otimes v_N \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_N,$$

die durch die Bilder gemäß

$$v_{1,i_1} \otimes \cdots \otimes v_{N,i_N}$$

eindeutig definiert wird.

Das Tensorprodukt $V_1 \otimes \cdots \otimes V_N$

Definition 22.22 (vgl. Definition 22.7)

Es seien V_1, \dots, V_N Vektorräume über dem Körper K für $N \in \mathbb{N}_0$.
Weiter seien $(v_{k,i_k})_{i_k \in I_k}$ Basen von V_k für $k = 1, \dots, N$.

- 4 Das Paar $(V_1 \otimes \cdots \otimes V_N, \otimes)$ oder auch $(\bigotimes_{i=1}^N V_i, \otimes)$ heißt ein **Tensorprodukt** von V_1, \dots, V_N .
- 5 Wir nennen $v_1 \otimes \cdots \otimes v_N$ oder auch $\bigotimes_{j=1}^N v_j$ das **Tensorprodukt** der Vektoren $v_1 \in V_1$ usw. bis $v_N \in V_N$.
- 6 Elemente von $V_1 \otimes \cdots \otimes V_N$ der Form $v_1 \otimes \cdots \otimes v_N$ mit $v_1, \dots, v_N \neq 0$ heißen **Elementartensoren** oder **einfache Tensoren**.

Der Rang eines Tensors

Jeder Tensor $T \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_N$ kann als Summe von Elementartensoren geschrieben werden:

$$T = \sum_{k=1}^n v_{1,k} \otimes \cdots \otimes v_{N,k}.$$

Definition

Es seien V_1, \dots, V_N Vektorräume über dem Körper K für $N \in \mathbb{N}_0$ und $(V_1 \otimes \cdots \otimes V_N, \otimes)$ ein Tensorprodukt von V_1, \dots, V_N .

Der **Rang** eines Tensors $T \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_N$ ist die minimale Anzahl von Summanden, mit denen eine Darstellung dieser Form möglich ist.

Für Tensoren der Stufe $N \geq 3$ ist die Bestimmung des Ranges eine NP-vollständige Aufgabe über endlichen Körpern und eine NP-schwere Aufgabe über den Körpern \mathbb{Q} , \mathbb{R} und \mathbb{C} .

Die universelle multilineare Abbildung \otimes

Satz 22.23 (vgl. Satz 22.12)

Es seien V_1, \dots, V_N, W Vektorräume über dem Körper K für $N \in \mathbb{N}_0$.
Weiter seien

- $(v_{k,i_k})_{i_k \in I_k}$ Basen von V_k für $k = 1, \dots, N$
- $(V_1 \otimes \dots \otimes V_N, \otimes)$ das zugehörige Tensorprodukt.

1 Für jedes $g \in \text{Mult}(V_1 \times \dots \times V_N; W)$ gibt es ein eindeutig bestimmtes $f \in \text{Hom}(V_1 \otimes \dots \otimes V_N; W)$ mit der Eigenschaft $g = f \circ \otimes$.

$$\begin{array}{ccc} V_1 \times \dots \times V_N & & \\ \otimes \downarrow & \searrow g & \\ V_1 \otimes \dots \otimes V_N & \xrightarrow{f} & W \end{array}$$

2 Ist umgekehrt $f \in \text{Hom}(V_1 \otimes \dots \otimes V_N; W)$, dann ist $g := f \circ \otimes \in \text{Mult}(V_1 \times \dots \times V_N; W)$.

Die Zuordnung $g \mapsto f$ ist ein Vektorraumisomorphismus

Satz 22.24 (vgl. Satz 22.14)

Es seien V_1, \dots, V_N, W Vektorräume über dem Körper K für $N \in \mathbb{N}_0$ und $(V_1 \otimes \dots \otimes V_N, \otimes)$ ein Tensorprodukt von V_1, \dots, V_N .

Dann ist die Abbildung

$$\text{Mult}(V_1 \times \dots \times V_N; W) \ni g \mapsto f \in \text{Hom}(V_1 \otimes \dots \otimes V_N; W)$$

ein Isomorphismus von Vektorräumen.

Tensoren vom Typ (r, s) über einem Vektorraum

Definition 22.25

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und V^* sein Dualraum. Weiter seien $(r, s) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.

$$\mathcal{T}_s^r(V) := \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{r\text{-mal}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{s\text{-mal}}$$

heißen **Tensoren vom Typ (r, s)** über dem Vektorraum V .

Bemerkung 22.26

Es gelte $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$.

- Vektoren einer Basis des „ primalen “ Raumes V :
- Koordinaten von Vektoren in V bzgl. dieser Basis:
- Covektoren der dualen Basis von V^* :
- Koordinaten von Covektoren in V^* bzgl. dieser Basis:

Komponentendarstellung

Jeder Tensor in $\mathcal{T}_s^r(V)$ kann als Linearkombination

$$T = \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_r=1}^n \sum_{j_1=1}^n \cdots \sum_{j_s=1}^n T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_s}$$

der elementaren Basistensoren dargestellt werden.

Die Koeffizienten $T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r}$ heißen die **Komponenten** des Tensors T .

Die Zuordnung

$$\mathcal{T}_s^r(V) \ni T \mapsto T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} \in (K^n)^{r+s}$$

ist ein Vektorraumisomorphismus.

Interpretation von Tensoren

Tensorräume sind der natürliche Definitionsraum multilinearer Abbildungen

$$\begin{aligned} & \text{Mult}(V \times \cdots \times V \times V^* \times \cdots \times V^*; \cdot) \\ & \cong \text{Hom}(V \otimes \cdots \otimes V \otimes V^* \otimes \cdots \otimes V^*, \cdot) = \text{Hom}(\mathcal{T}_s^r(V), \cdot). \end{aligned}$$

Allerdings können auch die Elemente von $\mathcal{T}_s^r(V)$ selbst bereits als Abbildungen verstanden werden.

Lemma 22.28

Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem Körper K und V^* sein Dualraum. Weiter seien $(r, s) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.

Dann bestehen folgende Isomorphismen:

① Typ $(0, 0)$:

$$\mathcal{T}_0^0(V) = K \cong \text{Hom}(\{0\}, K)$$

② Typ $(0, 1)$:

$$\mathcal{T}_1^0(V) = V^* \cong \text{Hom}(V, K)$$

③ Typ $(1, 0)$:

$$\mathcal{T}_0^1(V) = V \cong \text{Hom}(V^*, K)$$

Lemma 22.28

Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem Körper K und V^* sein Dualraum. Weiter seien $(r, s) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.

Dann bestehen folgende Isomorphismen:

④ Typ $(0, 2)$:

$$\mathcal{T}_2^0(V) = V^* \otimes V^* \cong \text{Hom}(V \otimes V, K) \cong \text{Hom}(V, V^*)$$

⑤ Typ $(1, 1)$:

$$\mathcal{T}_1^1(V) = V \otimes V^* \cong \text{Hom}(V^* \otimes V, K) \cong \text{Hom}(V, V)$$

⑥ Typ $(2, 0)$:

$$\mathcal{T}_0^2(V) = V \otimes V \cong \text{Hom}(V^* \otimes V^*, K) \cong \text{Hom}(V^*, V)$$

Definition 22.29

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und $r \in \mathbb{N}_0$.

Ein Tensor $T \in \mathcal{T}_0^r(V) \cong \text{Mult}(V^* \times \cdots \times V^*; K)$ heißt ...

- ① **(total) symmetrisch**, wenn für alle $\omega^1, \dots, \omega^r \in V^*$ und jede Permutation $\sigma \in S_r$ gilt:

$$T(\omega^1, \dots, \omega^r) = T(\omega^{\sigma(1)}, \dots, \omega^{\sigma(r)}).$$

Die Menge aller symmetrischen Tensoren in $\mathcal{T}_0^r(V)$ bezeichnen wir mit $\mathcal{T}_0^r(V)_{\text{sym}}$.

Definition 22.29

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und $r \in \mathbb{N}_0$.

Ein Tensor $T \in \mathcal{T}_0^r(V) \cong \text{Mult}(V^* \times \cdots \times V^*; K)$ heißt ...

- ② **(total) schiefsymmetrisch**, wenn für alle $\omega^1, \dots, \omega^r \in V^*$ und jede Permutation $\sigma \in S_r$ gilt:

$$T(\omega^1, \dots, \omega^r) = (\text{sgn } \sigma) T(\omega^{\sigma(1)}, \dots, \omega^{\sigma(r)}).$$

Die Menge aller schiefsymmetrischen Tensoren in $\mathcal{T}_0^r(V)$ bezeichnen wir mit $\mathcal{T}_0^r(V)_{\text{skew}}$.

Definition 22.29

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und $r \in \mathbb{N}_0$.

Ein Tensor $T \in \mathcal{T}_0^r(V) \cong \text{Mult}(V^* \times \cdots \times V^*; K)$ heißt ...

③ **alternierend**, wenn für $\omega^1, \dots, \omega^r \in V^*$ gilt:

$$i_k = i_\ell \text{ für ein } k \neq \ell \quad \Rightarrow \quad T(\omega^1, \dots, \omega^r) = 0.$$

Die Menge aller alternierenden Tensoren in $\mathcal{T}_0^r(V)$ bezeichnen wir mit $\mathcal{T}_0^r(V)_{\text{alt}}$.

Zusammenhang zw. schiefsymmetrisch und alternierend

Lemma 22.30

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und $r \in \mathbb{N}_0$.

④ Ist $T \in \mathcal{T}_0^r(V)$ alternierend, dann ist T auch schiefsymmetrisch.

Beweis. Fall $r = 0$ und $r = 1$: Jeder Tensor ist alternierend und schiefsymmetrisch.

Ab jetzt sei $r \geq 2$. Für jeden Tensor $T \in \mathcal{T}_0^r(V)$ gilt:

$$\begin{aligned} T(\omega_1 + \bar{\omega}_1, \omega_2 + \bar{\omega}_2, \dots, \omega_r) &= T(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r) + T(\bar{\omega}_1, \omega_2, \dots, \omega_r) \\ &\quad + T(\omega_1, \bar{\omega}_2, \dots, \omega_r) + T(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots, \omega_r). \end{aligned}$$

Zusammenhang zw. schiefsymmetrisch und alternierend

Lemma 22.30

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und $r \in \mathbb{N}_0$.

② Im Fall $\text{char}(K) \neq 2$ gilt auch die Umkehrung.

Beweis. Fall $r = 0$ und $r = 1$: Jeder Tensor ist alternierend und schiefsymmetrisch.

Ab jetzt sei $r \geq 2$. Für jeden Tensor $T \in \mathcal{T}_0^r(V)$ gilt:

$$\begin{aligned} T(\omega_1 + \bar{\omega}_1, \omega_1 + \bar{\omega}_1, \dots, \omega_r) &= T(\omega_1, \omega_1, \dots, \omega_r) + T(\bar{\omega}_1, \omega_1, \dots, \omega_r) \\ &\quad + T(\omega_1, \bar{\omega}_1, \dots, \omega_r) + T(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_1, \dots, \omega_r). \end{aligned}$$

Zusammenhang zw. schiefsymmetrisch und alternierend

Lemma 22.30

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und $r \in \mathbb{N}_0$.

③ Im Fall $\text{char}(K) = 2$ gilt $\mathcal{T}_0^r(V)_{\text{sym}} = \mathcal{T}_0^r(V)_{\text{skew}}$.

④ Im Fall $r = 0$ und $r = 1$ gilt

$$\mathcal{T}_0^r(V)_{\text{sym}} = \mathcal{T}_0^r(V)_{\text{skew}} = \mathcal{T}_0^r(V)_{\text{alt}} = \mathcal{T}_0^r(V).$$

Beweis.

(Schief-)Symmetrie von Tensoren und Komponenten

Lemma 22.31

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit Basis (e_1, \dots, e_n) und dualer Basis $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$. Weiter sei $r \in \mathbb{N}_0$.

Dann sind äquivalent:

- 1 $T \in \mathcal{T}_0^r(V)$ ist symmetrisch.
- 2 Die Komponenten erfüllen $T^{i_1, \dots, i_r} = T^{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(r)}}$ für alle $1 \leq i_1, \dots, i_r \leq n$ und alle Permutationen $\sigma \in S_r$.

Weiter sind äquivalent:

- 1 $T \in \mathcal{T}_0^r(V)$ ist schief-symmetrisch.
- 2 Die Komponenten erfüllen $T^{i_1, \dots, i_r} = (\operatorname{sgn} \sigma) T^{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(r)}}$ für alle $1 \leq i_1, \dots, i_r \leq n$ und alle Permutationen $\sigma \in S_r$.

(Schief-)symmetrische Tensoren bilden Unterräume

Lemma 22.32

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und $r \in \mathbb{N}_0$.

Die Mengen der symmetrischen bzw. der schief-symmetrischen Tensoren $\mathcal{T}_0^r(V)_{\text{sym}}$ bzw. $\mathcal{T}_0^r(V)_{\text{skew}}$ bilden Unterräume von $\mathcal{T}_0^r(V)$.

Definition 22.33

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K .

Ein Endomorphismus $P \in \text{End}(V)$ heißt eine **Projektion** oder ein **Projektor**, wenn er idempotent ist, wenn also gilt:

$$P \circ P = P.$$

Projektionen auf (schief-)symmetrische Tensoren

Satz 22.34

Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K und $r \in \mathbb{N}_0$.

1

$$\mathcal{T}_0^r(V) \ni T \mapsto \text{proj}_{\text{sym}}(T) := \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_r} \sigma(T) \in \mathcal{T}_0^r(V)$$

ist eine Projektion auf die symmetrischen Tensoren $\mathcal{T}_0^r(V)_{\text{sym}}$.

2

$$\mathcal{T}_0^r(V) \ni T \mapsto \text{proj}_{\text{skew}}(T) := \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_r} (\text{sgn } \sigma) \sigma(T) \in \mathcal{T}_0^r(V)$$

ist eine Projektion auf die schiefsymm. Tensoren $\mathcal{T}_0^r(V)_{\text{skew}}$.

Dimension des Unterraumes $\mathcal{T}_0^r(V)_{\text{skew}}$

Lemma 22.35

Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K mit $\text{char}(K) \neq 2$ und $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei $r \in \mathbb{N}_0$.

Dann gilt

$$\dim(\mathcal{T}_0^r(V)_{\text{skew}}) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Folgerung

Es gibt — bis auf Skalierung —

- nur einen einzigen schiefsymmetrischen Tensor in $\mathcal{T}_0^n(V)_{\text{skew}}$,
- nur einen einzigen schiefsymmetrischen Tensor in $\mathcal{T}_n^0(V)_{\text{skew}}$,
- nur eine einzige schiefsymmetrische Multilinearform $V \times \cdots \times V \rightarrow K$.