Lineare Algebra II

Woche 04

06.05.2024 und 07.05.2024

Multilineare Abbildungen

Definition 22.18 (vgl. Definition 22.1)

Es seien $V_1, \dots, V_N, W$ Vektorräume über dem Körper K für $\boxed{N \in \mathbb{N}_0.}$

1. Eine Abbildung
$$f\colon V_1 \times \dots \times V_N \to W$$
heißt **multilinear** oder genauer ***N*-linear**, wenn für jedes $i \in [\![1, N]\!]$ und alle fest gewählten $\overline{v}_j \in V_j$, $j \in [\![1, N]\!] \setminus \{i\}$, die Abbildung
$$V_i \ni v_i \mapsto f(\overline{v}_1, \dots, \overline{v}_{i-1}, v_i, \overline{v}_{i+1}, \dots, \overline{v}_N) \in W$$
linear ist.

2. Die Menge aller multilinearen Abbildungen $V_1 \times \dots \times V_N \to W$ bezeichnen wir mit $\mathrm{Mult}(V_1, \dots, V_N; W)$.

Multilineare Abbildungen

Definition 22.18 (vgl. Definition 22.1)

Es seien $V_1, \ldots, V_N$ Vektorräume über dem Körper K für $N \in \mathbb{N}_0$.

3. Eine multilineare Abbildung in den Vektorraum $\boxed{W = K}$ nennen wir eine **Multilinearform** auf $V_1 \times \cdots \times V_N$.

4. Die Menge aller Multilinearformen $V_1 \times \cdots \times V_N \to K$ bezeichnen wir mit $\operatorname{Mult}(V_1, \ldots, V_N)$ oder $\operatorname{Mult}(V_1, \ldots, V_N; K)$.

Die Fälle $N = 0$, $N = 1$ und $N = 2$

Bemerkung 22.19

1. $N = 0$:

   leeres Tupel

   $$\bigtimes_{i=1}^{0} V_i = V_1 \times \cdots \times V_N = \{(\ )\} \cong \{0\} \text{ (Nullraum)}$$

   Jede Abb. $\{(\ )\} \to W$ ist multilinear (0-linear).
   Sie kann identifiziert werden mit dem Bildel. in W.
   $\mathrm{Mult}(\{(\ )\}, W) \cong W$

2. $N = 1$:

   $$\mathrm{Mult}(V_1; W) = \mathrm{Hom}(V_1, W)$$

   1-Linearität ist Linearität.

3. $N = 2$:

   $$\mathrm{Mult}(V_1, V_2; W) = \mathrm{Bil}(V_1, V_2; W)$$

   2-Linearität ist Bilinearität.

Multilineare Abbildungen bilden einen Vektorraum

Lemma 22.20 (vgl. Lemma 22.3)

Es seien $V_1, \dots, V_N, W$ Vektorräume über dem Körper K für $N \in \mathbb{N}_0$.

Dann ist $\operatorname{Mult}(V_1, \dots, V_N; W)$ ein Unterraum des Vektorraumes

$$W^{V_1 \times \dots \times V_N} = \{f \colon V_1 \times \dots \times V_N \to W\}$$

aller Abbildungen $V_1 \times \dots \times V_N \to W$.

Existenz und Eindeutigkeit multilinearer Abbildungen

Satz 22.21 (vgl. Satz 22.4)

Es seien $V_1, \ldots, V_N, W$ Vektorräume über dem Körper K für $N \in \mathbb{N}_0$. Weiter seien

- $(v_{k,i_k})_{i_k \in I_k}$ Basen von V_k für $k = 1, \ldots, N$
- $(w_{i_1,\ldots,i_N})_{(i_1,\ldots,i_N) \in I_1 \times \cdots \times I_N}$ eine Familie von Vektoren in W.

Dann gibt es genau eine multilineare Abbildung

$$f \colon V_1 \times \cdots \times V_N \to W$$

mit der Eigenschaft

$$f(\underbrace{v_{i_1}, \ldots, v_{i_N}}_{\text{Tupel von Basisvektoren}}) = w_{i_1,\ldots,i_N} \quad \text{für alle } (i_1, \ldots, i_N) \in I_1 \times \cdots \times I_N.$$

, kart. Produkt von Basen

Das Tensorprodukt $V_1 \otimes \cdots \otimes V_N$

Definition 22.22 (vgl. Definition 22.7)

Es seien $V_1, \ldots, V_N$ Vektorräume über dem Körper K für $N \in \mathbb{N}_0$. Weiter seien $(v_{k,i_k})_{i_k \in I_k}$ Basen von V_k für $k = 1, \ldots, N$.

1. Der Vektorraum

$$V_1 \otimes \cdots \otimes V_N = \bigotimes_{i=1}^{N} V_i$$
$$:= \left\{ T \colon I_1 \times \cdots \times I_N \to K \;\middle|\; \begin{array}{l} T(i_1, \ldots, i_N) \neq 0 \text{ nur für endlich viele} \\ (i_1, \ldots, i_N) \in I_1 \times \cdots \times I_N \end{array} \right\}$$

Unterraum von

heißt ein **Tensorproduktraum** $V_1 \otimes \cdots \otimes V_N$.

2. Elemente von $V_1 \otimes \cdots \otimes V_N$ heißen **Tensoren** der **Stufe** oder **Ordnung** N.

   Der Nullvektor in $V_1 \otimes \cdots \otimes V_N$, also die Nullabbildung $T \colon I_1 \times \cdots \times I_N \to K$, heißt der **Nulltensor**.

Definition 22.22 (vgl. Definition 22.7)

Es seien $V_1, \dots, V_N$ Vektorräume über dem Körper K für $N \in \mathbb{N}_0$.
Weiter seien $(v_{k,i_k})_{i_k \in I_k}$ Basen von V_k für $k = 1, \dots, N$.

multilinear

3. Die **universelle multilineare Abbildung** ist diejenige Abbildung

$$\otimes \colon V_1 \times \cdots \times V_N \ni (v_1, \dots, v_N) \mapsto v_1 \otimes \cdots \otimes v_N \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_N,$$

die durch die Bilder gemäß

$$v_{1,i_1} \otimes \cdots \otimes v_{N,i_N}$$

eindeutig definiert wird.

$$\underbrace{(v_{1,i_1} \otimes \cdots \otimes v_{N,i_N})}_{: I_1 \times \cdots \times I_N \to K}(k_1, \dots, k_N) = \begin{cases} 1, & \text{falls } i_j = k_j \ \forall j = 1, \dots, N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Das Tensorprodukt $V_1 \otimes \cdots \otimes V_N$

Definition 22.22 (vgl. Definition 22.7)

Es seien $V_1, \ldots, V_N$ Vektorräume über dem Körper K für $N \in \mathbb{N}_0$. Weiter seien $(v_{k,i_k})_{i_k \in I_k}$ Basen von V_k für $k = 1, \ldots, N$.

4. Das Paar $(V_1 \otimes \cdots \otimes V_N, \otimes)$ oder auch $\left(\bigotimes_{i=1}^N V_i, \otimes\right)$ heißt ein **Tensorprodukt** von $V_1, \ldots, V_N$.

5. Wir nennen $v_1 \otimes \cdots \otimes v_N$ oder auch $\bigotimes_{j=1}^N v_j$ das **Tensorprodukt** der Vektoren $v_1 \in V_1$ usw. bis $v_N \in V_N$.

6. Elemente von $V_1 \otimes \cdots \otimes V_N$ der Form $v_1 \otimes \cdots \otimes v_N$ mit $v_1, \ldots, v_N \neq 0$ heißen **Elementartensoren** oder **einfache Tensoren**.

Der Rang eines Tensors

Jeder Tensor $T \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_N$ kann als Summe von Elementartensoren geschrieben werden:

$$T = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{v_{1,k}}_{\neq 0,\ \in V_1} \otimes \cdots \otimes \underbrace{v_{N,k}}_{\neq 0,\ \in V_N}.$$

beliebig, nicht notwendig aus der Basis von $V_1, \ldots, V_N$

Definition

Es seien $V_1, \ldots, V_N$ Vektorräume über dem Körper K für $N \in \mathbb{N}_0$ und $(V_1 \otimes \cdots \otimes V_N, \otimes)$ ein Tensorprodukt von $V_1, \ldots, V_N$.

Der **Rang** eines Tensors $T \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_N$ ist die minimale Anzahl von Summanden, mit denen eine Darstellung dieser Form möglich ist.

Für Tensoren der Stufe $N \geqslant 3$ ist die Bestimmung des Ranges eine NP-vollständige Aufgabe über endlichen Körpern und eine NP-schwere Aufgabe über den Körpern $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$.

Satz 22.23 (vgl. Satz 22.12)

Es seien $V_1, \ldots, V_N, W$ Vektorräume über dem Körper K für $N \in \mathbb{N}_0$. Weiter seien

unabh. vom K-Vektorraum W

- $(v_{k,i_k})_{i_k \in I_k}$ Basen von V_k für $k = 1, \ldots, N$
- $(V_1 \otimes \cdots \otimes V_N, \otimes)$ das zugehörige Tensorprodukt.

1. Für jedes $g \in \mathrm{Mult}(V_1 \times \cdots \times V_N; W)$ gibt es ein eindeutig bestimmtes $f \in \mathrm{Hom}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_N; W)$ mit der Eigenschaft $\boxed{g = f \circ \otimes}$.
   $g(v_1, \ldots, v_N) = f(v_1 \otimes \cdots \otimes v_N)$
2. Ist umgekehrt $f \in \mathrm{Hom}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_N; W)$, dann ist $g := f \circ \otimes \in \mathrm{Mult}(V_1 \times \cdots \times V_N; W)$.

$$
\begin{tikzcd}
V_1 \times \cdots \times V_N \arrow[d, "\otimes"'] \arrow[dr, "g"] & \\
V_1 \otimes \cdots \otimes V_N \arrow[r, "f"'] & W
\end{tikzcd}
$$

Die Zuordnung $g \mapsto f$ ist ein Vektorraumisomorphismus

Satz 22.24 (vgl. Satz 22.14)

Es seien $V_1, \ldots, V_N, W$ Vektorräume über dem Körper K für $N \in \mathbb{N}_0$ und $(V_1 \otimes \cdots \otimes V_N, \otimes)$ ein Tensorprodukt von $V_1, \ldots, V_N$.

Dann ist die Abbildung

$$\operatorname{Mult}(V_1 \times \cdots \times V_N; W) \ni g \mapsto f \in \operatorname{Hom}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_N; W)$$

ein Isomorphismus von Vektorräumen.

Multilineare Abb. auf $V_1 \times \cdots \times V_N$
und lineare Abb. auf $V_1 \otimes \cdots \otimes V_N$ sind
zwei verschiedene Ansichten derselben Sache!

Tensoren vom Typ (r, s) über einem Vektorraum

Definition 22.25

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und V^* sein Dualraum. Weiter seien $(r, s) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.

Notation in der Lit. nicht einheitlich

Elemente von $$\mathcal{T}_s^r(V) := \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{r\text{-mal}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{s\text{-mal}}$$

heißen **Tensoren vom Typ** (r, s) über dem Vektorraum V.

Namenskonventionen

Bemerkung 22.26

Es gelte $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$.

- Vektoren einer Basis des „primalen“ Raumes V:

  $e_1, \dots, e_n$ Index ↓

- Koordinaten von Vektoren in V bzgl. dieser Basis:

  $v = \sum_{i=1}^{n} v^i e_i = v^i e_i$ Index ↑

  Einstein

- Covektoren der dualen Basis von V^*:

  $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n$, d.h. $\langle \varepsilon^i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ Index ↑

- Koordinaten von Covektoren in V^* bzgl. dieser Basis:

  $\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \varepsilon^i = \omega_i \varepsilon^i$ Index ↓

  Einstein

Jeder Tensor in $\mathcal{T}_s^r(V)$ kann als Linearkombination

n^{r+s} viele

$$T = \overbrace{\sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_r=1}^{n}}^{r \text{ Summen}} \overbrace{\sum_{j_1=1}^{n} \cdots \sum_{j_s=1}^{n}}^{s \text{ Summen}} T^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s} \, e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{j_s}$$

der elementaren Basistensoren dargestellt werden.

Die Koeffizienten $T^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s}$ heißen die **Komponenten** des Tensors T.

Die Zuordnung

$$\mathcal{T}_s^r(V) \ni T \mapsto T^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s} \in \underbrace{(K^n)^{r+s}}_{r+s \text{ Kopien von } K^n}$$

ist ein Vektorraumisomorphismus.

Interpretation von Tensoren

Tensorräume sind der natürliche Definitionsraum multilinearer Abbildungen

irgendein Vektorraum

$$\begin{aligned} &\operatorname{Mult}(V \times \cdots \times V \times V^* \times \cdots \times V^*; \cdot) \\ \cong\ &\operatorname{Hom}(V \otimes \cdots \otimes V \otimes V^* \otimes \cdots \otimes V^*, \cdot) = \operatorname{Hom}(\mathcal{T}^r_s(V), \cdot). \end{aligned}$$

Allerdings können auch die Elemente von $\mathcal{T}^r_s(V)$ selbst bereits als Abbildungen verstanden werden.

Lemma 22.28

Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem Körper K und V^* sein Dualraum. Weiter seien $(r, s) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.

Dann bestehen folgende Isomorphismen:

1. Typ $(0, 0)$:

Dimension 0

$$\underbrace{T_0^0(V)} \overset{\sim}{=} K \cancel{\cong \mathrm{Hom}(\{0\}, K)}$$

nach unserer Konstruktion: Abbildungen $\{1\} \to K$

2. Typ $(0, 1)$:

klar   sogar =

$$T_1^0(V) = V^* \cong \mathrm{Hom}(V, K)$$

3. Typ $(1, 0)$:

klar   Satz 21.42

$$T_0^1(V) = V \cong \underbrace{\mathrm{Hom}(V^*, K)}_{=V^{**}}$$

Lemma 22.28

Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem Körper K und V^* sein Dualraum. Weiter seien $(r, s) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.

Dann bestehen folgende Isomorphismen:

4. Typ $(0, 2)$:

klar

$$\cong \mathrm{Bil}(V \times V, K)$$

$$\mathcal{T}_2^0(V) = V^* \otimes V^* \cong \mathrm{Hom}(V \otimes V, K) \cong \mathrm{Hom}(V, V^*)$$

$$(\varepsilon^{j_1} \otimes \varepsilon^{j_2})(v, \cdot\ ) := \langle \varepsilon^{j_1}, v \rangle\, \varepsilon^{j_2} \in V^*$$

5. Typ $(1, 1)$:

$$\mathcal{T}_1^1(V) = V \otimes V^* \cong \mathrm{Hom}(V^* \otimes V, K) \cong \mathrm{Hom}(V, V)$$

$$(e_{i_1} \otimes \varepsilon^{j_1})(\cdot, v) := \langle \varepsilon^{j_1}, v \rangle\, e_{i_1} \in V$$

6. Typ $(2, 0)$:

$$\mathcal{T}_0^2(V) = V \otimes V \cong \mathrm{Hom}(V^* \otimes V^*, K) \cong \mathrm{Hom}(V^*, V)$$

Definition 22.29

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und $r \in \mathbb{N}_0$.

Ein Tensor $T \in \mathcal{T}_0^r(V) \cong \operatorname{Mult}(V^* \times \cdots \times V^*; K)$ heißt ...

1. **(total) symmetrisch**, wenn für alle $\omega^1, \ldots, \omega^r \in V^*$ und jede Permutation $\sigma \in S_r$ gilt:

   Reihenfolge der Argumente

   Symm. Gruppe auf $[\![1, r]\!]$
   $$T(\omega^1, \ldots, \omega^r) = T(\omega^{\sigma(1)}, \ldots, \omega^{\sigma(r)}).$$
   unerheblich

   Die Menge aller symmetrischen Tensoren in $\mathcal{T}_0^r(V)$ bezeichnen wir mit $\mathcal{T}_0^r(V)_{\text{sym}}$.

Definition 22.29

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und $r \in \mathbb{N}_0$.

Ein Tensor $T \in \mathcal{T}_0^r(V) \cong \text{Mult}(V^* \times \cdots \times V^*; K)$ heißt ...

2. **(total) schiefsymmetrisch**, wenn für alle $\omega^1, \ldots, \omega^r \in V^*$ und jede Permutation $\sigma \in S_r$ gilt: Tausch zweier Argumente ändert das Vorzeichen

$$T(\omega^1, \ldots, \omega^r) = (\operatorname{sgn} \sigma)\, T(\omega^{\sigma(1)}, \ldots, \omega^{\sigma(r)}).$$

Die Menge aller schiefsymmetrischen Tensoren in $\mathcal{T}_0^r(V)$ bezeichnen wir mit $\mathcal{T}_0^r(V)_{\text{skew}}$.

Definition 22.29

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und $r \in \mathbb{N}_0$.

Ein Tensor $T \in \mathcal{T}_0^r(V) \cong \operatorname{Mult}(V^* \times \cdots \times V^*; K)$ heißt ...

3. **alternierend**, wenn für $\omega^1, \ldots, \omega^r \in V^*$ gilt:

$\omega^k = \omega^\ell$

$$\cancel{i_k = i_\ell} \text{ für ein } k \neq \ell \quad \Rightarrow \quad T(\omega^1, \ldots, \omega^r) = 0.$$

Die Menge aller alternierenden Tensoren in $\mathcal{T}_0^r(V)$ bezeichnen wir mit $\mathcal{T}_0^r(V)_{\text{alt}}$.

Zusammenhang zw. schiefsymmetrisch und alternierend

Lemma 22.30

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und $r \in \mathbb{N}_0$.

1. Ist $T \in \mathcal{T}_0^r(V)$ alternierend, dann ist T auch schiefsymmetrisch.

Beweis. Fall $r = 0$ und $r = 1$: Jeder Tensor ist alternierend und schiefsymmetrisch.

Ab jetzt sei $r \geqslant 2$. Für jeden Tensor $T \in \mathcal{T}_0^r(V)$ gilt:

$$\underbrace{T(\omega_1 + \overline{\omega}_1, \omega_2 + \overline{\omega}_2, \ldots, \omega_r)}_{=0} = \underbrace{T(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r)}_{=0} + T(\overline{\omega}_1, \omega_2, \ldots, \omega_r)$$

$$+ T(\omega_1, \overline{\omega}_2, \ldots, \omega_r) + \underbrace{T(\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \ldots, \omega_r)}_{=0}.$$

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_2 \\ \overline{\omega}_1 &= \overline{\omega}_2 \end{aligned}}$$

$$0 = T(\overline{\omega}_1, \underbrace{\omega_2}_{=\omega_1}, \ldots) + T(\omega_1, \underbrace{\overline{\omega}_2}_{=\overline{\omega}_1}, \ldots)$$

$\Rightarrow$ Schiefsymmetrie

Lemma 22.30

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und $r \in \mathbb{N}_0$.

2. Im Fall $\operatorname{char}(K) \neq 2$ gilt auch die Umkehrung.

Beweis. Fall $r = 0$ und $r = 1$: Jeder Tensor ist alternierend und schiefsymmetrisch.

Ab jetzt sei $r \geqslant 2$. Für jeden Tensor $T \in \mathcal{T}_0^r(V)$ gilt:

$$\underbrace{T(\omega_1 + \overline{\omega}_1, \omega_1 + \overline{\omega}_1, \ldots, \omega_r)}_{} = T(\omega_1, \omega_1, \ldots, \omega_r) + \underbrace{T(\overline{\omega}_1, \omega_1, \ldots, \omega_r)}_{}$$

$$= 4\,T(\omega_1, \omega_1, \ldots, \omega_r) \qquad \underbrace{+\, T(\omega_1, \overline{\omega}_1, \ldots, \omega_r)}_{= 0 \text{ in Summe}} + T(\underbrace{\overline{\omega}_1}_{=\omega_1}, \underbrace{\overline{\omega}_1}_{=\omega_1}, \ldots, \omega_r).$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \omega_1 = \overline{\omega}_1 \\ \Rightarrow \omega_1 + \overline{\omega}_1 = 2\omega_1 \end{array}}$$

$$= 2\,T(\omega_1, \omega_1, \ldots, \omega_r)$$

$\operatorname{char}(K) \neq 2$

$\Rightarrow 2\,\underbrace{T(\ldots)}_{=0} = 0$

Lemma 22.30

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und $r \in \mathbb{N}_0$.

3. Im Fall $\operatorname{char}(K) = 2$ gilt $\mathcal{T}_0^r(V)_{\text{sym}} = \mathcal{T}_0^r(V)_{\text{skew}}$.
4. Im Fall $r = 0$ und $r = 1$ gilt
   $\mathcal{T}_0^r(V)_{\text{sym}} = \mathcal{T}_0^r(V)_{\text{skew}} = \mathcal{T}_0^r(V)_{\text{alt}} = \mathcal{T}_0^r(V)$.

Beweis. ③ $(\operatorname{sgn} \sigma) \in \{\pm 1\} = \{1\}$ bei $\operatorname{char}(K) = 2$

④ S_0 besteht nur aus der leeren Permutation $\emptyset \to \emptyset$

$S_1 = \{\mathrm{id}\}$, also gilt $\mathcal{T}_0^r(V)_{\text{sym}} = \mathcal{T}_0^r(V)_{\text{skew}} = \mathcal{T}_0^r(V)$.

Außerdem ist jedes $T \in \mathcal{T}_0^r(V)$ alternierend,

da es nicht möglich, zwei id. Argumente

an verschiedenen Stellen einzusetzen.

Lemma 22.31

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit Basis $(e_1, \ldots, e_n)$ und dualer Basis $(\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n)$. Weiter sei $r \in \mathbb{N}_0$.

Dann sind äquivalent:

1. $T \in \mathcal{T}_0^r(V)$ ist symmetrisch.
2. Die Komponenten erfüllen $T^{i_1,\ldots,i_r} = T^{i_{\sigma(1)},\ldots,i_{\sigma(r)}}$ für alle $1 \leqslant i_1, \ldots, i_r \leqslant n$ und alle Permutationen $\sigma \in S_r$.

Weiter sind äquivalent:

1. $T \in \mathcal{T}_0^r(V)$ ist schiefsymmetrisch.
2. Die Komponenten erfüllen $T^{i_1,\ldots,i_r} = (\operatorname{sgn} \sigma)\, T^{i_{\sigma(1)},\ldots,i_{\sigma(r)}}$ für alle $1 \leqslant i_1, \ldots, i_r \leqslant n$ und alle Permutationen $\sigma \in S_r$.

(Schief-)symmetrische Tensoren bilden Unterräume

Lemma 22.32

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und $r \in \mathbb{N}_0$.

Die Mengen der symmetrischen bzw. der schiefsymmetrischen Tensoren $\mathcal{T}_0^r(V)_{\mathrm{sym}}$ bzw. $\mathcal{T}_0^r(V)_{\mathrm{skew}}$ bilden Unterräume von $\mathcal{T}_0^r(V)$.

Beweis mit UR-Kriterium

Projektionen

Definition 22.33

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K.

Ein Endomorphismus $P \in \operatorname{End}(V)$ heißt eine **Projektion** oder ein **Projektor**, wenn er idempotent ist, wenn also gilt:

$$P \circ P = P.$$

Projektion auf Bild(P)

Projektionen auf (schief-)symmetrische Tensoren

$\sigma(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r}) := e_{i_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes e_{i_{\sigma(r)}}$

Satz 22.34

Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K und $r \in \mathbb{N}_0$.

1. $$\mathcal{T}_0^r(V) \ni T \mapsto \operatorname{proj}_{\text{sym}}(T) := \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \sigma(T) \in \mathcal{T}_0^r(V)$$

   ist eine Projektion auf die symmetrischen Tensoren $\mathcal{T}_0^r(V)_{\text{sym}}$.

2. $$\mathcal{T}_0^r(V) \ni T \mapsto \operatorname{proj}_{\text{skew}}(T) := \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} (\operatorname{sgn} \sigma)\, \sigma(T) \in \mathcal{T}_0^r(V)$$

   ist eine Projektion auf die schiefsymm. Tensoren $\mathcal{T}_0^r(V)_{\text{skew}}$.

Dimension des Unterraumes $\mathcal{T}_0^r(V)_{\text{skew}}$

Lemma 22.35

Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K mit $\operatorname{char}(K) \neq 2$ und $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei $r \in \mathbb{N}_0$.

Dann gilt

$$\dim(\mathcal{T}_0^r(V)_{\text{skew}}) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}.$$

$1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_r \le n$

Dimension des Unterraumes $\mathcal{T}_0^n(V)_{\text{skew}}$

Folgerung

Es gibt — bis auf Skalierung —

- nur einen einzigen schiefsymmetrischen Tensor in $\mathcal{T}_0^n(V)_{\text{skew}}$,
- nur einen einzigen schiefsymmetrischen Tensor in $\mathcal{T}_n^0(V)_{\text{skew}}$,
- nur eine einzige schiefsymmetrische Multilinearform $V \times \cdots \times V \to K$.

§23 Determinantenformen