

Lineare Algebra II

Woche 03

29.04.2024 und 30.04.2024

Der Bidualraum eines Vektorraumes

Definition 21.41

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit Dualraum V^* .

Der Dualraum von V^* heißt der **Bidualraum** von V .

Der Bidualraum V^{**} besteht also aus Linearformen auf V^* .

Die kanonische Injektion $i_V: V \rightarrow V^{**}$

Satz 21.42

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit Dualraum V^* .

① Die Abbildung

$$i_V := V \ni v \mapsto \langle \cdot, v \rangle \in V^{**}$$

ist ein injektiver Homomorphismus, genannt die **kanonische Injektion** von V in V^{**} .

Beweis.

Die kanonische Injektion $i_V: V \rightarrow V^{**}$

Satz 21.42

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit Dualraum V^* .

- ② Ist V endlich-dimensional, dann ist i_V auch surjektiv, also ein Isomorphismus. In diesem Fall gilt $\dim(V) = \dim(V^{**})$.

Beweis.

Bidualer Homomorphismus

Es seien V, W Vektorräume über dem Körper K und $f \in \text{Hom}(V, W)$.

- dualer Homomorphismus $f^* \in \text{Hom}(W^*, V^*)$

$$f^*: W^* \ni w^* \mapsto v^* := w^* \circ f \in V^*$$

- **bidualer Homomorphismus** $f^{**} \in \text{Hom}(V^{**}, W^{**})$

$$f^{**}: V^{**} \ni v^{**} \mapsto w^{**} := v^{**} \circ f^* \in W^{**}$$

Zusammenhang zwischen f und f^{**}

Lemma 21.44

Es seien V, W Vektorräume über dem Körper K und $f \in \text{Hom}(V, W)$.

Dann gilt

$$i_W \circ f = f^{**} \circ i_V.$$

Mit anderen Worten, folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ i_V \downarrow & & \downarrow i_W \\ V^{**} & \xrightarrow{f^{**}} & W^{**} \end{array}$$

Definition 22.1

Es seien U, V, W Vektorräume über dem Körper K .

- 1 Eine Abbildung

$$f: U \times V \rightarrow W$$

heißt **bilinear**, wenn für jedes feste $\bar{u} \in U$ und jedes feste $\bar{v} \in V$ die Abbildungen

beide linear sind.

- 2 Die Menge aller bilinearen Abbildungen $U \times V \rightarrow W$ bezeichnen wir mit $\text{Bil}(U, V; W)$.

Definition 22.1

Es seien U, V, W Vektorräume über dem Körper K .

- ③ Eine bilineare Abbildung in den Vektorraum $W = K$ nennen wir eine **Bilinearform** auf $U \times V$.

- ④ Die Menge aller Bilinearformen $U \times V \rightarrow K$ bezeichnen wir mit $\text{Bil}(U, V)$ oder $\text{Bil}(U, V; K)$.

Beispiel 22.2

- 1 Die duale Paarung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: V^* \times V \ni (v^*, v) \mapsto \langle v^*, v \rangle \in K$$

ist eine Bilinearform auf $V^* \times V$.

- 2 Für jede Matrix $A \in K^{n \times m}$ ist die Abbildung

$$K^m \times K^n \ni (x, y) \mapsto y^T A x \in K$$

eine Bilinearform auf $K^m \times K^n$.

Beispiel 22.2

- ③ Die Multiplikation zweier Polynome über einem Körper K

$$K[t] \times K[t] \ni (p, q) \mapsto p \cdot q \in K[t]$$

ist eine bilineare Abbildung in $\text{Bil}(K[t], K[t]; K[t])$.

- ④ Die Multiplikation zweier Polynome in verschiedenen Variablen über einem Körper K

$$K[s] \times K[t] \ni (p, q) \mapsto p \cdot q \in K[s, t]$$

ist eine bilineare Abbildung in $\text{Bil}(K[s], K[t]; K[s, t])$.

Bilineare Abbildungen bilden einen Vektorraum

Lemma 22.3

Es seien U, V, W Vektorräume über dem Körper K .

Dann ist $\text{Bil}(U, V; W)$ ein Unterraum des Vektorraumes

$$W^{U \times V} = \{f: U \times V \rightarrow W\}$$

aller Abbildungen $U \times V \rightarrow W$.

Beweis. Übung

Satz 22.4

Es seien U , V , W Vektorräume über dem Körper K . Weiter sei

- $(u_i)_{i \in I}$ eine Basis von U
- $(v_j)_{j \in J}$ eine Basis von V
- $(w_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ eine Familie von Vektoren in W .

Dann gibt es genau eine bilineare Abbildung

$$f: U \times V \rightarrow W$$

mit der Eigenschaft

$$f(u_i, v_j) = w_{ij} \quad \text{für alle } (i, j) \in I \times J.$$

Welche Eigenschaften hat die Menge $(u_i, v_j)_{(i,j) \in I \times J}$?

Bemerkung 22.5

$(u_i, v_j)_{(i,j) \in I \times J}$ ist im Allgemeinen weder linear unabhängig noch ein Erzeugendensystem für $U \times V$!

Motivation für den Tensorproduktraum

- Bilineare Abbildungen $\text{Bil}(U, V; W)$ verhalten sich anders als lineare Abbildungen.
- Bilineare Abbildungen sind eindeutig festgelegt durch die Bilder auf der Nicht-Basis-Menge $(u_i, v_j)_{(i,j) \in I \times J}$.
- Für bilineare Abbildungen gilt

$$f(\alpha u, v) = \alpha f(u, v) = f(u, \alpha v).$$

- Gibt es einen Vektorraum, in dem unter anderem Paare wie $(\alpha u, v)$ und $(u, \alpha v)$ dieselben Vektoren sind?
- Bilineare Abbildungen auf $U \times V$ wären dann lineare Abbildungen auf diesem neuen Vektorraum, dem **Tensorproduktraum** $U \otimes V$.

Konstruktion des Tensorproduktraumes

Forderung

Ist $(u_i)_{i \in I}$ eine Basis von U und $(v_j)_{j \in J}$ eine Basis von V , dann soll $(u_i, v_j)_{(i,j) \in I \times J}$ gleichmächtig zu einer Basis von $U \otimes V$ sein.

$$U \otimes V := \{T: I \times J \rightarrow K \mid T(i, j) \neq 0 \text{ für endlich viele } (i, j) \in I \times J\}$$

ausgezeichnete Elemente in $U \otimes V$:

$$u_i \otimes v_j: I \times J \rightarrow K$$

Basis des Tensorproduktraumes

Lemma 22.6

Es seien U, V Vektorräume über dem Körper K . Weiter sei

- $(u_i)_{i \in I}$ eine Basis von U
- $(v_j)_{j \in J}$ eine Basis von V .

Dann ist $B := (u_i \otimes v_j)_{(i,j) \in I \times J}$ eine Basis des Tensorproduktraumes

$$U \otimes V = \{ T: I \times J \rightarrow K \mid T(i,j) \neq 0 \text{ für endlich viele } (i,j) \in I \times J \}.$$

Beweis.

Definition 22.7

Es seien U, V Vektorräume über dem Körper K . Weiter sei

- $(u_i)_{i \in I}$ eine Basis von U
- $(v_j)_{j \in J}$ eine Basis von V .

1 Der Vektorraum

$$U \otimes V = \{ T: I \times J \rightarrow K \mid T(i, j) \neq 0 \text{ für endlich viele } (i, j) \in I \times J \}$$

heißt ein **Tensorproduktraum** $U \otimes V$.

2 Elemente von $U \otimes V$ heißen **Tensoren**.

Der Nullvektor in $U \otimes V$, also die Nullabbildung $T: I \times J \rightarrow K$ mit $T(i, j) = 0$ für alle $(i, j) \in I \times J$, heißt der **Nulltensor**.

Das Tensorprodukt $U \otimes V$

Definition 22.7

Es seien U, V Vektorräume über dem Körper K . Weiter sei

- $(u_i)_{i \in I}$ eine Basis von U
- $(v_j)_{j \in J}$ eine Basis von V .

- 3 Die **universelle bilineare Abbildung** ist diejenige Abbildung

$$\otimes: U \times V \ni (u, v) \mapsto \otimes(u, v) =: \quad \in U \otimes V,$$

die durch die Bilder von $(u_i, v_j)_{(i,j) \in I \times J} \subseteq U \times V$ gemäß

$$\otimes(u_i, v_j) := u_i \otimes v_j$$

eindeutig definiert wird.

Das Tensorprodukt $U \otimes V$

Definition 22.7

Es seien U, V Vektorräume über dem Körper K . Weiter sei

- $(u_i)_{i \in I}$ eine Basis von U
 - $(v_j)_{j \in J}$ eine Basis von V .
- 4 Das Paar $(U \otimes V, \otimes)$ heißt ein **Tensorprodukt** von U und V .
 - 5 Wir nennen $u \otimes v$ das **Tensorprodukt** von $u \in U$ und $v \in V$.
 - 6 Elemente von $U \otimes V$ der Form $u \otimes v$ mit $u, v \neq 0$ heißen **Elementartensoren** oder **einfache Tensoren**.

Rechenregeln für das Tensorprodukt

Für $u = \sum_{i \in J'} \alpha_i u_i \in U$ und $v = \sum_{j \in J''} \beta_j v_j \in V$ gilt

$$u \otimes v =$$

Inbesondere:

Lemma 22.9

Es seien U und V Vektorräume über dem Körper K und $(U \otimes V, \otimes)$ ein Tensorprodukt von U und V . Dann gilt

- 1 $(u \otimes v) + (\bar{u} \otimes v) = (u + \bar{u}) \otimes v$
- 2 $(u \otimes v) + (u \otimes \bar{v}) = u \otimes (v + \bar{v})$
- 3 $(\alpha u) \otimes v = \alpha (u \otimes v) = u \otimes (\alpha v)$

für alle $u, \bar{u} \in U$, $v, \bar{v} \in V$ sowie $\alpha \in K$.

Der Rang eines Tensors

Jeder Tensor $T \in U \otimes V$ kann als Summe von Elementartensoren geschrieben werden:

$$T = \sum_{k=1}^n u_k \otimes v_k$$

Definition 22.10

Es seien U und V Vektorräume über dem Körper K und $(U \otimes V, \otimes)$ ein Tensorprodukt von U und V .

Der **Rang** eines Tensors $T \in U \otimes V$ ist die minimale Anzahl von Summanden, mit denen eine Darstellung dieser Form möglich ist.

Der Rang von Elementartensoren

Lemma 22.11

Es seien U und V Vektorräume über dem Körper K und $(U \otimes V, \otimes)$ ein Tensorprodukt von U und V .

- 1 Der Nulltensor ist der einzige Tensor vom Rang 0.
- 2 Jeder Elementartensor, also $u \otimes v$ mit $u, v \neq 0$, ist vom Rang 1.

Die universelle bilineare Abbildung \otimes

Satz 22.12

Es seien U, V Vektorräume über dem Körper K . Weiter sei

- $(u_i)_{i \in I}$ eine Basis von U
 - $(v_j)_{j \in J}$ eine Basis von V
 - $(U \otimes V, \otimes)$ das zugehörige Tensorprodukt.
- 1 Für jedes $g \in \text{Bil}(U \times V; W)$ gibt es ein eindeutig bestimmtes $f \in \text{Hom}(U \otimes V; W)$ mit der Eigenschaft $g = f \circ \otimes$.
 - 2 Ist umgekehrt $f \in \text{Hom}(U \otimes V; W)$, dann ist $g := f \circ \otimes \in \text{Bil}(U \times V; W)$.

$$\begin{array}{ccc} U \times V & & \\ \otimes \downarrow & \searrow g & \\ U \otimes V & \xrightarrow{f} & W \end{array}$$

die Zuordnung $g \mapsto f$ ist ein Vektorraumisomorphismus

Satz 22.14

Es seien U, V, W Vektorräume über dem Körper K und $(U \otimes V, \otimes)$ ein Tensorprodukt von U und V .

Dann ist die Abbildung

$$\text{Bil}(U \times V; W) \ni g \mapsto f \in \text{Hom}(U \otimes V; W)$$

ein Isomorphismus von Vektorräumen.

Beispiel 22.15

$$\textcircled{1} \quad K^n \otimes K^m \cong K^{n \times m}$$

Bei Darstellung des Tensorproduktraumes als Matrixraum verwenden wir die universelle bilineare Abbildung

$$K^n \times K^m \ni (u, v) \mapsto uv^T \in K^{n \times m}.$$

mögliche Basis:

$$e_i e_j^T =$$

Beispiel 22.15

$$\textcircled{1} \quad K^n \otimes K^m \cong K^{n \times m}$$

Jeder Tensor kann eindeutig in der Form

$$T = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} (e_i e_j^T)$$

dargestellt werden mit einer Koeffizientenmatrix $A \in K^{n \times m}$.

Rangfaktorisierung der Koeffizientenmatrix:

$$A = B C = \sum_{k=1}^r b_{\bullet k} c_{k \bullet} = \sum_{k=1}^r b_{\bullet k} \otimes (c_{k \bullet})^T$$

mit $r = \text{Rang}(A)$.

Lemma 22.16

Es seien U, V, W endlich-dimensionale Vektorräume über dem Körper K und $(U \otimes V, \otimes)$ ein Tensorprodukt von U und V .

Dann bestehen Isomorphismen

$$\text{Hom}(U \otimes V; W)$$

$$\cong \text{Bil}(U \times V; W)$$

$$\cong \text{Hom}(U, \text{Hom}(V, W))$$

$$\cong \text{Hom}(V, \text{Hom}(U, W))$$

Folgerung 22.17

Es seien U, V endlich-dimensionale Vektorräume über dem Körper K und $(U \otimes V, \otimes)$ ein Tensorprodukt von U und V .

Dann bestehen Isomorphismen

$$\text{Hom}(U \otimes V; K)$$

$$\cong \text{Bil}(U \times V; K)$$

$$\cong \text{Hom}(U, V^*)$$

$$\cong \text{Hom}(V, U^*)$$