Nächste Woche nochmal Vorlesung Mo / Di

Lineare Algebra II

Woche 03

29.04.2024 und 30.04.2024

Der Bidualraum eines Vektorraumes

Definition 21.41

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit Dualraum V^*.

Der Dualraum von V^* heißt der **Bidualraum** von V.

Der Bidualraum V^{**} besteht also aus Linearformen auf V^*.

Für jedes $v \in V$ ist

$$V^* \ni v^* \mapsto \langle v^*, v \rangle \in K \qquad \in \operatorname{Hom}(V^*, K) = V^{**}$$

eine Linearform auf V^* !

kurz: $\quad \langle \cdot, v \rangle \in V^{**}$

Satz 21.42

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit Dualraum V^*.

1. Die Abbildung
$$i_V := V \ni v \mapsto \langle \cdot \,, v \rangle \in V^{**}$$
ist ein injektiver Homomorphismus, genannt die **kanonische Injektion** von V in V^{**}.

Einbettung

nicht abhängig von einer Wahl der Basis

Beweis. · Additivität!

$(i_V(v_1+v_2))(v^*) = \langle v^*, v_1+v_2 \rangle = \langle v^*, v_1 \rangle + \langle v^*, v_2 \rangle$

$= (i_V(v_1))(v^*) + (i_V(v_2))(v^*) = (i_V(v_1)+i_V(v_2))(v^*)$

- Homogenität: $(i_V(\alpha v))(v^*) = \ldots = (\alpha i_V)(v^*)$
- Injektivität: $v \in \operatorname{Kern}(i_V)$, d.h. $(i_V(v))(v^*) = \langle v^*, v \rangle = 0$ für alle $v^* \in V$. Das heißt $v \in {}^\circ(V^*) = \{0\}$. D.h. i_V ist injektiv.

Lemma 21.20 Auswahlaxiom

Satz 21.42

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit Dualraum V^*.

2. Ist V endlich-dimensional, dann ist i_V auch surjektiv, also ein Isomorphismus. In diesem Fall gilt $\dim(V) = \dim(V^{**})$.

Beweis. $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow \dim(V^*) = n$

$\Rightarrow \dim(V^{**}) = n$.

$i_V \colon V \to V^{**}$ ist injektiv, also nach Folgerung 18.9 auch surjektiv.

Bidualer Homomorphismus

Es seien V, W Vektorräume über dem Körper K und $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$.

- dualer Homomorphismus $f^* \in \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$

$\boxed{f^* = \cdot \circ f}$

$$f^* \colon W^* \ni w^* \mapsto v^* := w^* \circ f \in V^*$$

- **bidualer Homomorphismus** $f^{**} \in \mathrm{Hom}(V^{**}, W^{**})$

$\boxed{f^{**} = \cdot \circ f^*}$

$$f^{**} \colon V^{**} \ni v^{**} \mapsto w^{**} := v^{**} \circ f^* \in W^{**}$$

f^{**} verwandelt Linearformen auf V^* in solche auf W^*.

Zusammenhang zwischen f und f^{**}

$\in \mathrm{Hom}(V, W)$ $\in \mathrm{Hom}(V^{**}, W^{**})$

Lemma 21.44

Es seien V, W Vektorräume über dem Körper K und $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$.

Dann gilt

$$i_W \circ f = f^{**} \circ i_V. \quad \text{in } \mathrm{Hom}(V, W^{**})$$

Mit anderen Worten, folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_V"'] & W \arrow[d, "i_W"] \\ V^{**} \arrow[r, "f^{**}"] & W^{**} \end{tikzcd}$$

Bilineare Abbildungen

Basis: $(u_i, 0)$ und $(0, v_j)$

$U \times V$: $(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2)$

Definition 22.1

Es seien U, V, W Vektorräume über dem Körper K.

1. Eine Abbildung
$$f \colon U \times V \to W$$
heißt **bilinear**, wenn für jedes feste $\overline{u} \in U$ und jedes feste $\overline{v} \in V$ die Abbildungen
$$f(\bar{u}, \cdot) : V \ni v \mapsto f(\bar{u}, v) \in W$$
$$f(\cdot, \bar{v}) : U \ni u \mapsto f(u, \bar{v}) \in W$$
beide linear sind. „linear in jedem Argument"

2. Die Menge aller bilinearen Abbildungen $U \times V \to W$ bezeichnen wir mit $\operatorname{Bil}(U, V; W)$.

Bilineare Abbildungen

Definition 22.1

Es seien U, V, W Vektorräume über dem Körper K.

3. Eine bilineare Abbildung in den Vektorraum $\boxed{W = K}$ nennen wir eine **Bilinearform** auf $U \times V$.

   „Form" bedeutet immer: „Werte in K"

4. Die Menge aller Bilinearformen $U \times V \to K$ bezeichnen wir mit $\operatorname{Bil}(U, V)$ oder $\operatorname{Bil}(U, V; K)$.

Beispiel 22.2

1. Die duale Paarung

$$\langle \cdot\,,\cdot \rangle \colon V^* \times V \ni (v^*, v) \mapsto \langle v^*\,, v \rangle \in K$$

ist eine Bilinearform auf $V^* \times V$.

$\langle \cdot\,,\cdot \rangle$ ist linear in beiden Argumenten

2. Für jede Matrix $A \in K^{n \times m}$ ist die Abbildung

$$K^m \times K^n \ni (x, y) \mapsto y^\mathsf{T} A x \in K$$

eine Bilinearform auf $K^m \times K^n$.

$y^T \; \boxed{A} \; x \in K$

Beispiel 22.2

3. Die Multiplikation zweier Polynome über einem Körper K

Polynommultiplikation

$$K[t] \times K[t] \ni (p, q) \mapsto p \cdot q \in K[t]$$

ist eine bilineare Abbildung in $\mathrm{Bil}(K[t], K[t]; K[t])$.

4. Die Multiplikation zweier Polynome in verschiedenen Variablen über einem Körper K

Polynome in beiden Variablen

$$K[s] \times K[t] \ni (p, q) \mapsto p \cdot q \in K[s, t]$$

ist eine bilineare Abbildung in $\mathrm{Bil}(K[s], K[t]; K[s, t])$.

Bilineare Abbildungen bilden einen Vektorraum

Lemma 22.3

Es seien U, V, W Vektorräume über dem Körper K.

Dann ist $\operatorname{Bil}(U, V; W)$ ein Unterraum des Vektorraumes

$$W^{U \times V} = \{f \colon U \times V \to W\}$$

aller Abbildungen $U \times V \to W$.

Beweis. Übung

Existenz und Eindeutigkeit bilinearer Abbildungen

Satz 22.4

Es seien U, V, W Vektorräume über dem Körper K. Weiter sei

- $(u_i)_{i \in I}$ eine Basis von U
- $(v_j)_{j \in J}$ eine Basis von V
- $(w_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ eine Familie von Vektoren in W.

Dann gibt es genau eine bilineare Abbildung

$$f\colon U \times V \to W$$

mit der Eigenschaft

$$f\underbrace{(u_i, v_j)}_{\text{Paare von Basisvektoren}} = w_{ij} \quad \text{für alle } (i,j) \in I \times J.$$

kartesisches Produkt von Basen

Hinweis: $\#(I\times J) = \#(I)\cdot\#(J) = \dim(U)\cdot\dim(V)$

Bemerkung 22.5

aber $\dim(U\times V) = \dim(U) + \dim(V)$

$(u_i, v_j)_{(i,j)\in I\times J}$ ist im Allgemeinen weder linear unabhängig noch ein Erzeugendensystem für $U\times V$!

Beispiel: $U = V = \mathbb{R}^3$ mit Stdbasis (e_1, e_2, e_3)

Die 4 Vektoren $(e_1, e_1), \dots (e_3, e_3)$ können nicht linear unabh. sein im 6-dim Vektorraum $U\times V$.

Andererseits kann $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right)$ nicht erzeugt werden.

Motivation für den Tensorproduktraum

- Bilineare Abbildungen $\mathrm{Bil}(U, V; W)$ verhalten sich anders als lineare Abbildungen.

- Bilineare Abbildungen sind eindeutig festgelegt durch die Bilder auf der Nicht-Basis-Menge $(u_i, v_j)_{(i,j) \in I \times J}$.

- Für bilineare Abbildungen gilt

$$f(\alpha\, u, v) = \alpha\, f(u, v) = f(u, \alpha\, v).$$

„Redundanz"

- Gibt es einen Vektorraum, in dem unter anderem Paare wie $(\alpha\, u, v)$ und $(u, \alpha\, v)$ dieselben Vektoren sind?

Bilinearität im Raum verankert

- Bilineare Abbildungen auf $U \times V$ wären dann $\boxed{\text{lineare}}$ Abbildungen auf diesem neuen Vektorraum, dem **Tensorproduktraum** $U \otimes V$.

Forderung

Ist $(u_i)_{i\in I}$ eine Basis von U und $(v_j)_{j\in J}$ eine Basis von V, dann soll $(u_i, v_j)_{(i,j)\in I\times J}$ gleichmächtig zu einer Basis von $U \otimes V$ sein.

„U Tensor V"

$$\boxed{U \otimes V} := \{T\colon I \times J \to K \mid \overbrace{T(i,j) \neq 0 \text{ für endlich viele } (i,j) \in I \times J}^{\text{endlicher Träger}}\}$$

Das ist ein Vektorraum, ein Unterraum von $\{T : I \times J \to K\}$.

ausgezeichnete Elemente in $U \otimes V$:

$$u_i \otimes v_j \colon I \times J \to K$$

$$(u_i \otimes v_j)(\underset{\in I}{k}, \underset{\in J}{\ell}) := \delta_{ik} \cdot \delta_{j\ell} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i=k \text{ und } j=\ell \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lemma 22.6

Es seien U, V Vektorräume über dem Körper K Weiter sei

- $(u_i)_{i \in I}$ eine Basis von U
- $(v_j)_{j \in J}$ eine Basis von V.

Dann ist $B := (u_i \otimes v_j)_{(i,j) \in I \times J}$ eine Basis des Tensorproduktraumes

$$U \otimes V = \left\{ T : I \times J \to K \;\middle|\; T(i,j) \neq 0 \text{ für endlich viele } (i,j) \in I \times J \right\}.$$

Beweis. • B erzeugt $U \otimes V$, denn jedes $T \in U \otimes V$ hat die Darstellung $T = \sum_{(i,j) \in E} \underbrace{T(i,j)}_{} \, (u_i \otimes v_j)$, E = Träger von T

• B ist linear unabhängig: Es sei $T = \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} \, (u_i \otimes v_j)$ mit endlicher Menge E der Nullvektor in $U \otimes V$, also die Nullabbildung $I \times J \to K$. $\Rightarrow$ $c_{ij} = 0$ für alle $(i,j) \in E$.

Das Tensorprodukt $U \otimes V$

Definition 22.7

Es seien U, V Vektorräume über dem Körper K Weiter sei

- $(u_i)_{i \in I}$ eine Basis von U
- $(v_j)_{j \in J}$ eine Basis von V.

1. Der Vektorraum

   $$U \otimes V = \left\{ T \colon I \times J \to K \;\middle|\; T(i,j) \neq 0 \text{ für endlich viele } (i,j) \in I \times J \right\}$$

   heißt ein **Tensorproduktraum** $U \otimes V$.

2. Elemente von $U \otimes V$ heißen **Tensoren**.

   Der Nullvektor in $U \otimes V$, also die Nullabbildung $T \colon I \times J \to K$ mit $T(i,j) = 0$ für alle $(i,j) \in I \times J$, heißt der **Nulltensor**.

Definition 22.7

Es seien U, V Vektorräume über dem Körper K Weiter sei

- $(u_i)_{i \in I}$ eine Basis von U
- $(v_j)_{j \in J}$ eine Basis von V.

bilineare

3. Die **universelle bilineare Abbildung** ist diejenige Abbildung

$$\otimes \colon U \times V \ni (u, v) \mapsto \otimes(u, v) =: u \otimes v \in U \otimes V,$$

die durch die Bilder von $(u_i, v_j)_{(i,j) \in I \times J} \subseteq U \times V$ gemäß

$$\otimes(u_i, v_j) := u_i \otimes v_j$$ Folie 15

eindeutig definiert wird.

Das Tensorprodukt $U \otimes V$

Definition 22.7

Es seien U, V Vektorräume über dem Körper K Weiter sei

- $(u_i)_{i \in I}$ eine Basis von U
- $(v_j)_{j \in J}$ eine Basis von V.

4. Das Paar $(U \otimes V, \otimes)$ heißt ein **Tensorprodukt** von U und V.

5. Wir nennen $u \otimes v$ das **Tensorprodukt** von $u \in U$ und $v \in V$.
$\in U \otimes V$

6. Elemente von $U \otimes V$ der Form $u \otimes v$ mit $u, v \neq 0$ heißen **Elementartensoren** oder **einfache Tensoren**.

Rechenregeln für das Tensorprodukt

endliche Teilmenge von I

Für $u = \sum_{i \in I'} \alpha_i \, u_i \in U$ und $v = \sum_{j \in J'} \beta_j \, v_j \in V$ gilt

Basistensor

$$u \otimes v = \Big(\sum_{i \in I'} \alpha_i u_i \Big) \otimes \Big(\sum_{j \in J'} \beta_j v_j \Big) = \sum_{i \in I'} \sum_{j \in J'} \alpha_i \beta_j \, (u_i \otimes v_j)$$

Koeff. mit bestimmtem Muster

Inbesondere:

Lemma 22.9

Es seien U und V Vektorräume über dem Körper K und $(U \otimes V, \otimes)$ ein Tensorprodukt von U und V. Dann gilt

1. $(u \otimes v) + (\overline{u} \otimes v) = (u + \overline{u}) \otimes v$
2. $(u \otimes v) + (u \otimes \overline{v}) = u \otimes (v + \overline{v})$
3. $(\alpha \, u) \otimes v = \alpha \, (u \otimes v) = u \otimes (\alpha \, v)$

für alle $u, \overline{u} \in U$, $v, \overline{v} \in V$ sowie $\alpha \in K$.

Der Rang eines Tensors

Koeff. in u_k verstecken

Jeder Tensor $T \in U \otimes V$ kann als Summe von Elementartensoren geschrieben werden:

$\in U$ $\in V$ nicht notw. Basis-vektoren

$$T = \sum_{k=1}^{n} u_k \otimes v_k$$

Definition 22.10

Es seien U und V Vektorräume über dem Körper K und $(U \otimes V, \otimes)$ ein Tensorprodukt von U und V.

Der **Rang** eines Tensors $T \in U \otimes V$ ist die minimale Anzahl von Summanden, mit denen eine Darstellung dieser Form möglich ist.

$n \in \mathbb{N}_0$

Der Rang von Elementartensoren

Lemma 22.11

Es seien U und V Vektorräume über dem Körper K und $(U \otimes V, \otimes)$ ein Tensorprodukt von U und V.

1. Der Nulltensor ist der einzige Tensor vom Rang 0.
2. Jeder Elementartensor, also $u \otimes v$ mit $u, v \neq 0$, ist vom Rang 1.

Die universelle bilineare Abbildung $\otimes$

Satz 22.12

Es seien U, V Vektorräume über dem Körper K. Weiter sei

- $(u_i)_{i \in I}$ eine Basis von U
- $(v_j)_{j \in J}$ eine Basis von V
- $(U \otimes V, \otimes)$ das zugehörige Tensorprodukt.

unabhängig vom K-Vektorraum W

1. Für jedes $g \in \operatorname{Bil}(U \times V; W)$ gibt es ein eindeutig bestimmtes $f \in \operatorname{Hom}(U \otimes V; W)$ mit der Eigenschaft $g = f \circ \otimes$.

   $g(u,v) = f(u \otimes v)$
2. Ist umgekehrt $f \in \operatorname{Hom}(U \otimes V; W)$, dann ist $g := f \circ \otimes \in \operatorname{Bil}(U \times V; W)$.

$$\begin{tikzcd}
U \times V \arrow[d, "\otimes"'] \arrow[dr, "g"] & \\
U \otimes V \arrow[r, "f"'] & W
\end{tikzcd}$$

Die universelle bilineare Abb. vermittelt zwischen bilinearen Abb. auf $U \times V$ und linearen Abb. auf $U \otimes V$.

Satz 22.14

Es seien U, V, W Vektorräume über dem Körper K und $(U \otimes V, \otimes)$ ein Tensorprodukt von U und V.

Dann ist die Abbildung

$$\operatorname{Bil}(U \times V; W) \ni g \mapsto f \in \operatorname{Hom}(U \otimes V; W)$$

ein Isomorphismus von Vektorräumen.

Bilin. Abb. auf $U \times V$ und lineare Abb. auf $U \otimes V$ sind zwei verschiedene Ansichten derselben Sache!

Tensorprodukte

Beispiel 22.15

1. $K^n \otimes K^m \cong K^{n \times m}$

   zu zeigen

   Bei Darstellung des Tensorproduktraumes als Matrixraum verwenden wir die universelle bilineare Abbildung

   statt $u \otimes v$

   $$K^n \times K^m \ni (u, v) \mapsto u\, v^\mathsf{T} \in K^{n \times m}.$$

   mögliche Basis:

   $$e_i \otimes e_j \approx e_i\, e_j^\mathsf{T} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccc} & \uparrow j & \end{array} & \end{array}$$

Tensorprodukte

Beispiel 22.15

1. $K^n \otimes K^m \cong K^{n \times m}$

   Jeder Tensor kann eindeutig in der Form

   $$T = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \, (e_i \, e_j^\mathsf{T})$$

   dargestellt werden mit einer Koeffizientenmatrix $A \in K^{n \times m}$.

   Rangfaktorisierung der Koeffizientenmatrix:

   $$A = B \, C = \sum_{k=1}^{r} b_{\bullet k} \, c_{k \bullet} = \sum_{k=1}^{r} b_{\bullet k} \otimes (c_{k \bullet})^\mathsf{T}$$

   mit $r = \operatorname{Rang}(A)$.

Lemma 22.16

Es seien U, V, W endlich-dimensionale Vektorräume über dem Körper K und $(U \otimes V, \otimes)$ ein Tensorprodukt von U und V.

Dann bestehen Isomorphismen

$$\operatorname{Hom}(U \otimes V; W)$$

$\lightning$ Folie 24

$$\cong \operatorname{Bil}(U \times V; W) \qquad f \qquad\qquad f$$

$$\cong \operatorname{Hom}(U, \operatorname{Hom}(V, W)) \qquad u \mapsto f(u, \cdot) \in \operatorname{Hom}(V, W)$$

$$\cong \operatorname{Hom}(V, \operatorname{Hom}(U, W)) \qquad v \mapsto f(\cdot, v) \in \operatorname{Hom}(U, W)$$

Interpretation von Bilinearformen

Folgerung 22.17 $W = K$

Es seien U, V endlich-dimensionale Vektorräume über dem Körper K und $(U \otimes V, \otimes)$ ein Tensorprodukt von U und V.

Dann bestehen Isomorphismen

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Hom}(U \otimes V; K) \\
&\cong \operatorname{Bil}(U \times V; K) \qquad f \qquad\qquad f \\
&\cong \operatorname{Hom}(U, V^*) \qquad u \mapsto \underbrace{f(u, \cdot)}_{\in V^T} \\
&\cong \operatorname{Hom}(V, U^*) \qquad\qquad v \mapsto f(\cdot, v) \in U^T
\end{aligned}
$$