# Lineare Algebra II

## Woche 02

23.04.2024 und 25.04.2024

# dualer Homomorphismus

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[dr, "w^* \in W^*"'] & & V \arrow[ll, "f \in \mathrm{Hom}(V,W)"'] \\
& K &
\end{tikzcd}$$

### Definition 21.26

Sind $V$ und $W$ Vektorräume über dem Körper $K$ und $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$, dann heißt $f^* \colon W^* \to V^*$, definiert durch

$$f^*(w^*) := w^* \circ f$$

der zu $f$ **duale Homomorphismus**.

# dualer Homomorphismus

$$\begin{tikzcd} W & & V \arrow[ll, "f \in \mathrm{Hom}(V,W)"'] \arrow[dl, "v^* = w^* \circ f \in V^*"] \\ & K \arrow[from=1-1, "w^* \in W^*"'] & \end{tikzcd}$$

Die Definition $f^*(w^*) := w^* \circ f$ können wir auch schreiben als

# dualer Homomorphismus ist Homomorphismus

**Lemma 21.27**

Es seien $V$ und $W$ Vektorräume über dem Körper $K$ und $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$. Dann ist $f^* \in \operatorname{Hom}(W^*, V^*)$.

Beweis.

## Beispiel 21.28

1. Es sei $V$ ein Vektorraum über dem Körper $K$. Dann gilt $\mathrm{id}_V^* = \mathrm{id}_{V^*}$.

2. Es sei $V = K^n$ über dem Körper $K$ und $\pi_i \colon K^n \to K$ die Projektion auf die $i$-te Koordinate.

## Beispiel 21.28

3. Es sei $V = K^{[\![1,5]\!]}$ der Vektorraum der endlichen Folgen der Länge 5 über einem Körper $K$ und $f$ der Shift-Endomorphismus nach rechts:

# Dualisieren einer Komposition

**Lemma 21.29**

Es seien $U$, $V$ und $W$ Vektorräume über dem Körper $K$.

Für $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ und $g \in \operatorname{Hom}(U, V)$ gilt

$$(f \circ g)^* = g^* \circ f^*.$$

*Beweis.* Übung

# Homomorphismus $\mapsto$ dualer Homomorphismus

## Satz 21.30

Es seien $V$ und $W$ Vektorräume über dem Körper $K$.

1.
$$f \mapsto f^*$$
ist ein injektiver Homomorphismus.

Beweis.

### Satz 21.30

2. Sind $V$ und $W$ endlich-dimensional, dann ist $I$ auch surjektiv, also ein Isomorphismus. Dann gilt

$$\dim(\mathrm{Hom}(W^*, V^*)) = \dim(\mathrm{Hom}(V, W)) = \dim(V)\,\dim(W).$$

Beweis.

# Injektivität und Surjektivität

## Satz 21.32

Es seien $V$ und $W$ Vektorräume über dem Körper $K$.

1. $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ injektiv $\Leftrightarrow f^* \in \operatorname{Hom}(W^*, V^*)$ surjektiv.
2. $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ surjektiv $\Leftrightarrow f^* \in \operatorname{Hom}(W^*, V^*)$ injektiv.
3. $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ bijektiv $\Leftrightarrow f^* \in \operatorname{Hom}(W^*, V^*)$ bijektiv.
4. Falls $f$ und $f^*$ beide bijektiv sind, gilt $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$.

# Darstellungsmatrizen dualer Homomorphismen

**Satz 21.33**

Es seien $V$ und $W$ Vektorräume über dem Körper $K$ mit Basen $B_V = (v_1, \ldots, v_m)$ bzw. $B_W = (w_1, \ldots, w_n)$ und $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$.

$$A = \mathcal{M}_{B_W}^{B_V}(f) \quad \Rightarrow \quad A^\mathsf{T} = \mathcal{M}_{B_V^*}^{B_W^*}(f^*)$$

Beweis.

# Rang der dualen Abbildung

## Folgerung 21.34

Es seien $V$ und $W$ endlich-dimensionale Vektorräume über dem Körper $K$.

Für $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ gilt $\mathrm{Rang}(f^*) = \mathrm{Rang}(f)$.

## Folgerung 21.35

Es seien $K$ ein Körper und $A \in K^{n \times m}$. Für die duale Abbildung zu $f_A$ gilt

$$(f_A)^* = f_{A^\intercal}.$$

Beweis.

# Transform. von Darstellungsmatrizen dualer Abbildungen

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{\widehat{B}_V}_{\widehat{B}_W}(f) &= \mathcal{T}^{B_W}_{\widehat{B}_W}\, \mathcal{M}^{B_V}_{B_W}(f)\, \mathcal{T}^{\widehat{B}_V}_{B_V} \\ \widehat{A} &= S \quad A \quad T^{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{\widehat{B}_W^*}_{\widehat{B}_V^*}(f^*) &= \mathcal{T}^{B_V^*}_{\widehat{B}_V^*}\, \mathcal{M}^{B_W^*}_{B_V^*}(f^*)\, \mathcal{T}^{\widehat{B}_W^*}_{B_W^*} \\ \widehat{A^\mathsf{T}} &= T^{-\mathsf{T}} \quad A^\mathsf{T} \quad S^\mathsf{T}\end{aligned}$$

### Satz 21.36

Es seien $V$ und $W$ Vektorräume über dem Körper $K$. Für $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ und die duale Abbildung $f^* \in \operatorname{Hom}(W^*, V^*)$ gelten:

$$\begin{aligned} \operatorname{Bild}(f^*) &= \operatorname{Kern}(f)^0 && \text{in } V^* \\ \operatorname{Kern}(f^*) &= \operatorname{Bild}(f)^0 && \text{in } W^* \\ \operatorname{Bild}(f) &= {}^0\operatorname{Kern}(f^*) && \text{in } W \\ \operatorname{Kern}(f) &= {}^0\operatorname{Bild}(f^*) && \text{in } V \end{aligned}$$

# die vier fundamentalen Unterräume zu einer Matrix

## Folgerung 21.37

Es sei $K$ ein Körper und $A \in K^{n \times m}$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Bild}(A^\mathsf{T}) &= \operatorname{Kern}(A)^0 &&\text{in } K^m \\
\operatorname{Kern}(A^\mathsf{T}) &= \operatorname{Bild}(A)^0 &&\text{in } K^n \\
\operatorname{Bild}(A) &= {}^0\operatorname{Kern}(A^\mathsf{T}) &&\text{in } K^n \\
\operatorname{Kern}(A) &= {}^0\operatorname{Bild}(A^\mathsf{T}) &&\text{in } K^m
\end{aligned}$$

## Beispiel 21.38

1. Gegeben sei der Unterraum von $\mathbb{Q}^4$

$$U = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

Gesucht ist eine Beschreibung von $U$ durch Gleichungen, also als Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems.

# Beschreibung von Unterräumen

## Beispiel 21.38

2. Gegeben sei der durch Gleichungen beschriebene Unterraum von $\mathbb{R}^5$

$$U = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{aligned} x_1 + 3\,x_3 - x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Gesucht ist eine Beschreibung mit Hilfe einer Basis.

# Dualraum eines Faktorraumes

## Lemma 21.39

Es sei $V$ ein Vektorraum über dem Körper $K$ und $U$ ein Unterraum. Weiter sei $\pi\colon V \to V \,/\, U$ die kanonische Surjektion.

Das Bild der zu $\pi$ dualen Abbildung $\pi^*\colon (V \,/\, U)^* \to V^*$ ist $U^0$. Die Einschränkung $\pi^*|^{U^0}$ ist ein Isomorphismus, es gilt also

$$\big(V \,/\, U\big)^* \cong U^0.$$

# Dualraum eines Faktorraumes

Wir wählen $V = \mathbb{R}_3[t] = \langle 1, t, t^2, t^3 \rangle$ und $U = \mathbb{R}_1[t] = \langle 1, t \rangle$.

- Der Faktorraum $V \,/\, U$ besteht aus Elementen der Form

$$\alpha\, t^2 + \beta\, t^3 + \langle 1, t \rangle.$$

- Der Faktorraum $V \,/\, U$ hat die Basis

$$\big\{ t^2 + \langle 1, t \rangle,\; t^3 + \langle 1, t \rangle \big\}.$$

- Elemente des Dualraumes $\big(V \,/\, U\big)^*$ sind durch die Bilder auf der Basis festgelegt.

- Andererseits ist $U^0 = \big\{ v^* \in V^* \,\big|\, \langle v^*, 1 \rangle = \langle v^*, t \rangle = 0 \big\}$.

# Faktorraum eines Dualraumes

**Lemma 21.40**

Es sei $V$ ein Vektorraum über dem Körper $K$ und $U$ ein Unterraum. Weiter sei $i\colon U \to V$ die kanonische Injektion.

Der Kern der zu $i$ dualen Abbildung $i^*\colon V^* \to U^*$ ist $U^0$. Es gilt also

$$V^* \,/\, U^0 \cong U^*.$$

# Faktorraum eines Dualraumes

Wir wählen $V = \mathbb{R}_3[t] = \langle 1, t, t^2, t^3 \rangle$ und $U = \mathbb{R}_1[t] = \langle 1, t \rangle$.

- Der Annihilator ist $U^0 = \big\{ v^* \in V^* \,\big|\, \langle v^*, 1 \rangle = \langle v^*, t \rangle = 0 \big\}$.

- Der Faktorraum $V^* \,/\, U^0$ ist also

$$\big\{ v^* + U^0 \,\big|\, v^* \in V^* \big\}.$$

- $v^*$ und $\overline{v}^*$ in $V^*$ repräsentieren dieselbe Äquivalenzklasse, also dasselbe Element in $V^* \,/\, U^0$ genau dann, wenn $\langle v^*, 1 \rangle = \langle \overline{v}^*, 1 \rangle$ und $\langle v^*, t \rangle = \langle \overline{v}^*, t \rangle$ gilt.

- Andererseits sind die Elemente von $U^*$ bestimmt durch ihre Bilder auf der Basis $\{1, t\}$.