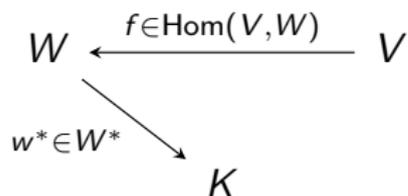


Lineare Algebra II

Woche 02

23.04.2024 und 25.04.2024

dualer Homomorphismus



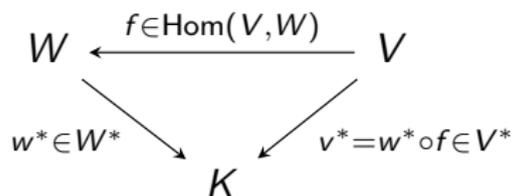
Definition 21.26

Sind V und W Vektorräume über dem Körper K und $f \in \text{Hom}(V, W)$, dann heißt $f^*: W^* \rightarrow V^*$, definiert durch

$$f^*(w^*) := w^* \circ f$$

der zu f **duale Homomorphismus**.

dualer Homomorphismus



Die Definition $f^*(w^*) := w^* \circ f$ können wir auch schreiben als

dualer Homomorphismus ist Homomorphismus

Lemma 21.27

Es seien V und W Vektorräume über dem Körper K und $f \in \text{Hom}(V, W)$. Dann ist $f^* \in \text{Hom}(W^*, V^*)$.

Beweis.

Beispiel 21.28

- 1 Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K . Dann gilt $\text{id}_V^* = \text{id}_{V^*}$.
- 2 Es sei $V = K^n$ über dem Körper K und $\pi_i: K^n \rightarrow K$ die Projektion auf die i -te Koordinate.

Beispiel 21.28

- ③ Es sei $V = K^{\llbracket 1,5 \rrbracket}$ der Vektorraum der endlichen Folgen der Länge 5 über einem Körper K und f der Shift-Endomorphismus nach rechts:

Dualisieren einer Komposition

Lemma 21.29

Es seien U , V und W Vektorräume über dem Körper K .

Für $f \in \text{Hom}(V, W)$ und $g \in \text{Hom}(U, V)$ gilt

$$(f \circ g)^* = g^* \circ f^*.$$

Beweis. Übung

Homomorphismus \mapsto dualer Homomorphismus

Satz 21.30

Es seien V und W Vektorräume über dem Körper K .

1

$$f \mapsto f^*$$

ist ein injektiver Homomorphismus.

Beweis.

Homomorphismus \mapsto dualer Homomorphismus

Satz 21.30

- ② Sind V und W endlich-dimensional, dann ist I auch surjektiv, also ein Isomorphismus. Dann gilt

$$\dim(\text{Hom}(W^*, V^*)) = \dim(\text{Hom}(V, W)) = \dim(V) \dim(W).$$

Beweis.

Satz 21.32

Es seien V und W Vektorräume über dem Körper K .

- 1 $f \in \text{Hom}(V, W)$ injektiv $\Leftrightarrow f^* \in \text{Hom}(W^*, V^*)$ surjektiv.
- 2 $f \in \text{Hom}(V, W)$ surjektiv $\Leftrightarrow f^* \in \text{Hom}(W^*, V^*)$ injektiv.
- 3 $f \in \text{Hom}(V, W)$ bijektiv $\Leftrightarrow f^* \in \text{Hom}(W^*, V^*)$ bijektiv.
- 4 Falls f und f^* beide bijektiv sind, gilt $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$.

Darstellungsmatrizen dualer Homomorphismen

Satz 21.33

Es seien V und W Vektorräume über dem Körper K mit Basen $B_V = (v_1, \dots, v_m)$ bzw. $B_W = (w_1, \dots, w_n)$ und $f \in \text{Hom}(V, W)$.

$$A = \mathcal{M}_{B_W}^{B_V}(f) \quad \Rightarrow \quad A^T = \mathcal{M}_{B_V^*}^{B_W^*}(f^*)$$

Beweis.

Rang der dualen Abbildung

Folgerung 21.34

Es seien V und W endlich-dimensionale Vektorräume über dem Körper K .

Für $f \in \text{Hom}(V, W)$ gilt $\text{Rang}(f^*) = \text{Rang}(f)$.

Folgerung 21.35

Es seien K ein Körper und $A \in K^{n \times m}$. Für die duale Abbildung zu f_A gilt

$$(f_A)^* = f_{A^T}.$$

Beweis.

Transform. von Darstellungsmatrizen dualer Abbildungen

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\widehat{B}_W}^{\widehat{B}_V}(f) &= \mathcal{T}_{\widehat{B}_W}^{B_W} \mathcal{M}_{B_W}^{B_V}(f) \mathcal{T}_{B_V}^{\widehat{B}_V} \\ \widehat{A} &= S \quad A \quad T^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\widehat{B}_V}^{\widehat{B}_W}(f^*) &= \mathcal{T}_{\widehat{B}_V}^{B_V} \mathcal{M}_{B_V}^{B_W}(f^*) \mathcal{T}_{B_W}^{\widehat{B}_W} \\ \widehat{A}^T &= T^{-T} \quad A^T \quad S^T \end{aligned}$$

die vier fundamentalen Unterräume zu einer Abbildung

Satz 21.36

Es seien V und W Vektorräume über dem Körper K . Für $f \in \text{Hom}(V, W)$ und die duale Abbildung $f^* \in \text{Hom}(W^*, V^*)$ gelten:

$$\text{Bild}(f^*) = \text{Kern}(f)^0 \quad \text{in } V^*$$

$$\text{Kern}(f^*) = \text{Bild}(f)^0 \quad \text{in } W^*$$

$$\text{Bild}(f) = {}^0\text{Kern}(f^*) \quad \text{in } W$$

$$\text{Kern}(f) = {}^0\text{Bild}(f^*) \quad \text{in } V$$

die vier fundamentalen Unterräume zu einer Matrix

Folgerung 21.37

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times m}$.

$$\text{Bild}(A^T) = \text{Kern}(A)^0 \quad \text{in } K^m$$

$$\text{Kern}(A^T) = \text{Bild}(A)^0 \quad \text{in } K^n$$

$$\text{Bild}(A) = {}^0\text{Kern}(A^T) \quad \text{in } K^n$$

$$\text{Kern}(A) = {}^0\text{Bild}(A^T) \quad \text{in } K^m$$

Beispiel 21.38

- ① Gegeben sei der Unterraum von \mathbb{Q}^4

$$U = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

Gesucht ist eine Beschreibung von U durch Gleichungen, also als Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems.

Beispiel 21.38

- ② Gegeben sei der durch Gleichungen beschriebene Unterraum von \mathbb{R}^5

$$U = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 \mid \begin{array}{l} x_1 + 3x_3 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

Gesucht ist eine Beschreibung mit Hilfe einer Basis.

Lemma 21.39

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und U ein Unterraum. Weiter sei $\pi: V \rightarrow V/U$ die kanonische Surjektion.

Das Bild der zu π dualen Abbildung $\pi^*: (V/U)^* \rightarrow V^*$ ist U^0 . Die Einschränkung $\pi^*|_{U^0}$ ist ein Isomorphismus, es gilt also

$$(V/U)^* \cong U^0.$$

Dualraum eines Faktorraumes

Wir wählen $V = \mathbb{R}_3[t] = \langle 1, t, t^2, t^3 \rangle$ und $U = \mathbb{R}_1[t] = \langle 1, t \rangle$.

- Der Faktorraum V / U besteht aus Elementen der Form

$$\alpha t^2 + \beta t^3 + \langle 1, t \rangle.$$

- Der Faktorraum V / U hat die Basis

$$\{t^2 + \langle 1, t \rangle, t^3 + \langle 1, t \rangle\}.$$

- Elemente des Dualraumes $(V / U)^*$ sind durch die Bilder auf der Basis festgelegt.
- Andererseits ist $U^0 = \{v^* \in V^* \mid \langle v^*, 1 \rangle = \langle v^*, t \rangle = 0\}$.

Lemma 21.40

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und U ein Unterraum. Weiter sei $i: U \rightarrow V$ die kanonische Injektion.

Der Kern der zu i dualen Abbildung $i^*: V^* \rightarrow U^*$ ist U^0 . Es gilt also

$$V^* / U^0 \cong U^*.$$

Faktorraum eines Dualraumes

Wir wählen $V = \mathbb{R}_3[t] = \langle 1, t, t^2, t^3 \rangle$ und $U = \mathbb{R}_1[t] = \langle 1, t \rangle$.

- Der Annihilator ist $U^0 = \{v^* \in V^* \mid \langle v^*, 1 \rangle = \langle v^*, t \rangle = 0\}$.

- Der Faktorraum V^* / U^0 ist also

$$\{v^* + U^0 \mid v^* \in V^*\}.$$

- v^* und \bar{v}^* in V^* repräsentieren dieselbe Äquivalenzklasse, also dasselbe Element in V^* / U^0 genau dann, wenn $\langle v^*, 1 \rangle = \langle \bar{v}^*, 1 \rangle$ und $\langle v^*, t \rangle = \langle \bar{v}^*, t \rangle$ gilt.
- Andererseits sind die Elemente von U^* bestimmt durch ihre Bilder auf der Basis $\{1, t\}$.