Nächste Woche Vorlesungen Mo + Di
Plenarübung Do

Lineare Algebra II

Woche 02

23.04.2024 und 25.04.2024

$$\begin{tikzcd} W \arrow[dr, "w^* \in W^*"'] & & V \arrow[ll, "f \in \mathrm{Hom}(V,W)"'] \arrow[dl] \\ & K & \end{tikzcd}$$

$v^* := w^* \circ f \in V^*$

f^*

Definition 21.26

Sind V und W Vektorräume über dem Körper K und $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$, dann heißt $f^*\colon W^* \to V^*$, definiert durch

$$f^*(w^*) := w^* \circ f$$

$f^* := \cdot \circ f$

der zu f **duale Homomorphismus**.

f^* verwandelt Elemente von W^* in solche von V^*.

$w^* \circ f$ heißt Pullback des Covektors w^* durch f.

dualer Homomorphismus

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[dr, "w^* \in W^*"'] & & V \arrow[ll, "f \in \mathrm{Hom}(V,W)"'] \arrow[dl, "v^* = w^* \circ f \in V^*"] \\
& K &
\end{tikzcd}$$

$\in V^* = \mathrm{Hom}(V,K)$

Die Definition $f^*(w^*) := w^* \circ f$ können wir auch schreiben als

$$[f^*(w^*)](v) = (w^* \circ f)(v) = w^*(f(v)) \quad \forall v \in V$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\underbrace{\langle f^*(w^*), v \rangle_{V^*,V}}_{\in K} = \underbrace{\langle w^*, f(v) \rangle_{W^*,W}}_{\in K}} \quad \forall v \in V \quad \forall w^* \in W^*$$

dualer Homomorphismus ist Homomorphismus

Lemma 21.27

Es seien V und W Vektorräume über dem Körper K und $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$. Dann ist $f^* \in \operatorname{Hom}(W^*, V^*)$.

Beweis. • f^* ist additiv:

$f^*(w_1^* + w_2^*) = (w_1^* + w_2^*) \circ f$ nach Def. von f^*

$= w_1^* \circ f + w_2^* \circ f$ Addition von Abbildungen

$= f^*(w_1^*) + f^*(w_2^*)$ nach Def. von f^*

• f^* ist homogen:

$f^*(\alpha w^*) = (\alpha w^*) \circ f$ nach Def. von f^*

$= \alpha \, (w^* \circ f)$ S-Multiplikation von Abb.

$= \alpha \, f^*(w^*)$ nach Def. von f^*.

$(\mathrm{id}_V)^*$
$\Vert$

Beispiel 21.28

1. Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K. Dann gilt $\mathrm{id}_V^* = \mathrm{id}_{V^*}$.

$\langle (\mathrm{id}_V)^*(v^*), v \rangle = \langle v^*, \mathrm{id}_V(v) \rangle = \langle v^*, v \rangle$
für alle $v \in V$. D.h. $(\mathrm{id}_V)^* = \mathrm{id}_{V^*}$.

2. Es sei $V = K^n$ über dem Körper K und $\pi_i \colon K^n \to K$ die Projektion auf die i-te Koordinate.

$\pi_i^* \colon \underbrace{K^*}_{\cong K} \to \underbrace{(K^n)^*}_{\cong K^n}$ Beispiel 21.16

$\pi_i^*(\overset{\in K}{y})^T x = y\, \pi_i(x) = y\, x_i$ $\quad \forall y \in K \; \forall x \in K^n$

$\Rightarrow \pi_i^*(y) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-te Zeile}$

Beispiel 21.28

3. Es sei $V = \underbrace{K^{[\![1,5]\!]}}_{=W}$ der Vektorraum der endlichen Folgen der Länge 5 über einem Körper K und f der Shift-Endomorphismus nach rechts:

$$f(y_1, \ldots, y_5) = (0, y_1, \ldots, y_4).$$

$v^* = f^*(w^*)$ ist gegeben durch

$$\langle v^*, (y_1, \ldots, y_5) \rangle = \langle w^*, (0, y_1, \ldots, y_4) \rangle.$$

z.B. $\langle w^*, (z_1, \ldots, z_5) \rangle = z_3 + z_4$

$$\Rightarrow \langle v^*, (y_1, \ldots, y_5) \rangle = y_2 + y_3.$$

Dualisieren einer Komposition

Lemma 21.29

Es seien U, V und W Vektorräume über dem Körper K.

Für $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ und $g \in \mathrm{Hom}(U, V)$ gilt

$$(f \circ g)^* = g^* \circ f^*.$$

Beweis. Übung

$$W \xleftarrow{f} V \xleftarrow{g} U$$

$$W^* \xrightarrow{f^*} V^* \xrightarrow{g^*} U^*$$

Satz 21.30

Es seien V und W Vektorräume über dem Körper K.

1.
$$I \colon \operatorname{Hom}(V, W) \ni f \mapsto f^* \in \operatorname{Hom}(W^*, V^*)$$

ist ein injektiver Homomorphismus.

Beweis. • I ist additiv:

$$\big(\underbrace{I(f+g)}_{\in \operatorname{Hom}(W^*, V^*)}\big)(\overset{\in W^*}{w^*}) = (I(f))(w^*) + (I(g))(w^*) \quad \text{---- siehe Skript}$$

• I ist homogen: ...

• I ist injektiv: $f \in \operatorname{Ker}(I) \Rightarrow f^* = I(f) = 0 \in \operatorname{Hom}(W^*, V^*)$

$\Rightarrow 0_{V^*} = f^*(w^*) = w^* \circ f \quad \forall w^* \in W^*$

$\Rightarrow 0_K = w^*(f(v)) \quad \forall v \in V \quad \forall w^* \in W^* \Rightarrow f(V) \subseteq {}^0W^* \underset{\text{Lemma 21.20}}{=} \{0_W\}$

$\Rightarrow f = 0 \in \operatorname{Hom}(V, W)$.

Satz 21.30

2. Sind V und W endlich-dimensional, dann ist I auch surjektiv, also ein Isomorphismus. Dann gilt

$$\dim(\operatorname{Hom}(W^*, V^*)) = \dim(\operatorname{Hom}(V, W)) = \dim(V)\,\dim(W).$$

Beweis.

Satz 21.32

Es seien V und W Vektorräume über dem Körper K.

1. $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ injektiv $\Leftrightarrow f^* \in \operatorname{Hom}(W^*, V^*)$ surjektiv.
2. $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ surjektiv $\Leftrightarrow f^* \in \operatorname{Hom}(W^*, V^*)$ injektiv.
3. $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ bijektiv $\Leftrightarrow f^* \in \operatorname{Hom}(W^*, V^*)$ bijektiv.
4. Falls f und f^* beide bijektiv sind, gilt $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$.

Wir können also f^{-*} schreiben.

Darstellungsmatrizen dualer Homomorphismen

Satz 21.33

Es seien V und W Vektorräume über dem Körper K mit Basen $B_V = (v_1, \ldots, v_m)$ bzw. $B_W = (w_1, \ldots, w_n)$ und $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$.

$$A = \mathcal{M}^{B_V}_{B_W}(f) \quad \Rightarrow \quad A^\mathsf{T} = \mathcal{M}^{B_W^*}_{B_V^*}(f^*) = \mathcal{B}$$

$V \to W$ $\qquad$ $W^* \to V^*$

Beweis. $f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} \underline{a_{ij}}\, w_i$ für $j = 1, \ldots, m$.

Anwendung von w_k^* auf beide Seiten:

$\underline{\langle f^*(w_k^*), v_j \rangle} = \langle w_k^*, f(v_j) \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \langle w_k^*, w_i \rangle = a_{kj}$

Andererseits erfüllt $\mathcal{B}$: $\quad f^*(w_j^*) = \sum_{i=1}^{m} \underline{b_{ij}}\, v_i^*$

Einsetzen von v_k:

$\underline{\langle f^*(w_j^*), v_k \rangle} = \sum_{i=1}^{m} b_{ij} \langle v_i^*, v_k \rangle = \underline{b_{kj} = a_{jk}}$

Rang der dualen Abbildung

Folgerung 21.34

Es seien V und W endlich-dimensionale Vektorräume über dem Körper K.

Für $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ gilt $\operatorname{Rang}(f^*) = \operatorname{Rang}(f)$.

$$\operatorname{Rang}(f) = \operatorname{Rang}(A) = \operatorname{Rang}(A^T) = \operatorname{Rang}(f^*)$$

bzgl. irgend welcher Basen

Folgerung 21.35

Es seien K ein Körper und $A \in K^{n \times m}$. Für die duale Abbildung zu f_A gilt

$$(f_A)^* = f_{A^\intercal}.$$

Beweis. $f_A \in \operatorname{Hom}(K^m, K^n), \quad (f_A)^* \in \operatorname{Hom}(K^n, K^m)$

$$[(f_A)^*(y)]^\intercal x = y^\intercal f_A(x) = \underbrace{y^\intercal A}\, x \quad \forall x \in K^m \ \forall y \in K^n$$

$$\Rightarrow (f_A)^*(y) = A^\intercal y$$

Satz 20.6 (Äquivalenztrafo.)

$$\mathcal{M}^{\widehat{B}_V}_{\widehat{B}_W}(f) = \mathcal{T}^{B_W}_{\widehat{B}_W}\, \mathcal{M}^{B_V}_{B_W}(f)\, \mathcal{T}^{\widehat{B}_V}_{B_V}$$

$$\widehat{A} = S \quad A \quad T^{-1}$$

Satz 20.6 Satz 21.33

$$\mathcal{M}^{\widehat{B}_W^*}_{\widehat{B}_V^*}(f^*) = \mathcal{T}^{B_V^*}_{\widehat{B}_V^*}\, \mathcal{M}^{B_W^*}_{B_V^*}(f^*)\, \mathcal{T}^{\widehat{B}_W^*}_{B_W^*}$$

$$\widehat{A^\mathsf{T}} = T^{-\mathsf{T}} \quad A^\mathsf{T} \quad S^\mathsf{T}$$

Lemma 21.17

$$(SAT^{-1})^T = T^{-T} A^T S^T$$

$\operatorname{Kern}(f) \subseteq V$ $\quad$ $\operatorname{Kern}(f^*) \subseteq W^*$

$\operatorname{Bild}(f) \subseteq W$ $\quad$ $\operatorname{Bild}(f^*) \subseteq V^*$

Satz 21.36

Es seien V und W Vektorräume über dem Körper K. Für $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ und die duale Abbildung $f^* \in \operatorname{Hom}(W^*, V^*)$ gelten:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Bild}(f^*) &= \operatorname{Kern}(f)^0 && \text{in } V^* \\
\operatorname{Kern}(f^*) &= \operatorname{Bild}(f)^0 && \text{in } W^* \\
\operatorname{Bild}(f) &= {}^0\operatorname{Kern}(f^*) && \text{in } W \\
\operatorname{Kern}(f) &= {}^0\operatorname{Bild}(f^*) && \text{in } V
\end{aligned}
$$

Regeln für die Ausdrücke links und rechts von „="

Bild $\leftrightarrow$ Kern

^{0} $\leftrightarrow$ f^*

$\cdot^0$ bzw $^0\cdot$ $\leftrightarrow$ —

$f_A : K^m \to K^n$

Folgerung 21.37 $(f_A)^* = f_{A^T} : K^n \to K^m$ (Folgerung 21.35)

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times m}$.

Dimensionen

$$
\begin{array}{rcll}
\operatorname{Bild}(A^T) = \operatorname{Kern}(A)^0 & \text{in } K^m & r = m-(m-r) \\
\operatorname{Kern}(A^T) = \operatorname{Bild}(A)^0 & \text{in } K^n & n-r = n-r \\
\operatorname{Bild}(A) = {}^0\operatorname{Kern}(A^T) & \text{in } K^n & r = n-(n-r) \\
\operatorname{Kern}(A) = {}^0\operatorname{Bild}(A^T) & \text{in } K^m & m-r = m-r
\end{array}
$$

$r = \operatorname{Rang}(A) = \operatorname{Rang}(A^T)$

$\dim(\operatorname{Kern}(A)) = m - r$

$\dim(\operatorname{Kern}(A^T)) = n - r$

$\dim U^0 = \operatorname{codim} U$

$\dim {}^0F = \operatorname{codim} F$

Beispiel 21.38

1. Gegeben sei der Unterraum von $\mathbb{Q}^4$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ -2 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad U = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle = \operatorname{Bild}(A)$$

Gesucht ist eine Beschreibung von U durch Gleichungen, also als Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems. $\hat{=}$ Prä-Annihilator von Linearformen (jede Gleichung entspricht einer Linearform).

$$U = \operatorname{Bild}(A) = {}^0\operatorname{Kern}(A^T).$$

$$\operatorname{Kern}(A^T) = \operatorname{Kern}\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}\right) \overset{\text{red. ZSF}}{=} \operatorname{Kern}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -14 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

mit Basis $\left\{ \begin{pmatrix} 14 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow U = \left\{ y \in \mathbb{Q}^4 \;\middle|\; \begin{matrix} 14y_1 - 4y_2 + y_3 = 0 \\ -y_1 + y_4 = 0 \end{matrix} \right\}$

Beispiel 21.38

2. Gegeben sei der durch Gleichungen beschriebene Unterraum von $\mathbb{R}^5$

$$A = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right) \qquad U = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{aligned} x_1 + 3\,x_3 - x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 0 \end{aligned} \right\} = \operatorname{Bild}(A)^\circ$$

Gesucht ist eine Beschreibung mit Hilfe einer Basis.

$$U = \operatorname{Bild}(A)^\circ = \operatorname{Kern}(A^T) = \operatorname{Kern}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \operatorname{Kern}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \text{ mit Basis}$$

red. ZSF

$$\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dualraum eines Faktorraumes

Lemma 21.39 $\pi(v) = [v] = v + U$

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und U ein Unterraum. Weiter sei $\pi\colon V \to V \,/\, U$ die kanonische Surjektion.

Das Bild der zu π dualen Abbildung $\pi^*\colon (V \,/\, U)^* \to V^*$ ist U^0. Die Einschränkung $\pi^*|^{U^0}$ ist ein Isomorphismus, es gilt also

$$\left(V \,/\, U\right)^* \cong U^0.$$

Linearformen, die nur auf dem gröberen Faktorraum def. sind

Linearformen, die auf U verschwinden

Dualraum eines Faktorraumes

Wir wählen $V = \mathbb{R}_3[t] = \langle 1, t, t^2, t^3 \rangle$ und $U = \mathbb{R}_1[t] = \langle 1, t \rangle$.

- Der Faktorraum $V \,/\, U$ besteht aus Elementen der Form

$$\alpha\, t^2 + \beta\, t^3 + \langle 1, t \rangle.$$

- Der Faktorraum $V \,/\, U$ hat die Basis

$$\{t^2 + \langle 1, t \rangle,\ t^3 + \langle 1, t \rangle\}. = \{[t^2],\ [t^3]\}$$

- Elemente des Dualraumes $\underbrace{(V \,/\, U)^*}$ sind durch die Bilder auf der Basis festgelegt.

- Andererseits ist $\underbrace{U^0} = \{v^* \in V^* \mid \langle v^*, 1 \rangle = \langle v^*, t \rangle = 0\}$.

Lemma 21.40

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und U ein Unterraum. Weiter sei $i\colon U \to V$ die kanonische Injektion.

Der Kern der zu i dualen Abbildung $i^*\colon V^* \to U^*$ ist U^0. Es gilt also

$$V^* \,/\, U^0 \cong U^*.$$

Linearformen auf U

Linearformen von V werden nicht unterscheiden, wenn sie auf U dieselben Werte haben.

Faktorraum eines Dualraumes

Wir wählen $V = \mathbb{R}_3[t] = \langle 1, t, t^2, t^3 \rangle$ und $U = \mathbb{R}_1[t] = \langle 1, t \rangle$.

- Der Annihilator ist $U^0 = \{ v^* \in V^* \,|\, \langle v^*, 1 \rangle = \langle v^*, t \rangle = 0 \}$.

- Der Faktorraum $V^* \,/\, U^0$ ist also
$$\{ v^* + U^0 \,|\, v^* \in V^* \}.$$

- v^* und $\overline{v}^*$ in V^* repräsentieren dieselbe Äquivalenzklasse, also dasselbe Element in $V^* \,/\, U^0$ genau dann, wenn $\langle v^*, 1 \rangle = \langle \overline{v}^*, 1 \rangle$ und $\langle v^*, t \rangle = \langle \overline{v}^*, t \rangle$ gilt. Auf die Werte auf t^2 und t^3 kommt es also nicht an!

- Andererseits sind die Elemente von U^* bestimmt durch ihre Bilder auf der Basis $\{1, t\}$.