Lineare Algebra II

Woche 01

16.04.2024 und 18.04.2024

Erinnerung: Homomorphismen zwischen Vektorräumen

Sind V und W Vektorräume über dem Körper K, dann bezeichnet

$$\operatorname{Hom}(V, W) = \{f\colon V \to W \mid f \text{ ist linear}\}$$

den Vektorraum der linearen Abbildungen $f\colon V \to W$.

Der Dualraum eines Vektorraumes

Definition 21.1

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K. Der Vektorraum

$$\operatorname{Hom}(V, K) = \{f \colon V \to K \mid f \text{ ist linear}\}$$

der linearen Abbildungen $V \to K$ heißt der **Dualraum** von V.

Die Elemente von heißen **lineare Funktionale** auf V oder **Linearformen** auf V oder **Covektoren**.

Beispiel 21.2

1. Projektion auf die i-te Koordinate
2. Auswertungsabbildung

Beispiel 21.2

3. Zu $A \in K^{1 \times n}$ ist $f_A\colon K^n \to K$ eine Linearform auf K^n.

4. Ist $B = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V, dann hat $v^* \in V^*$ die Darstellungsmatrix

Zur Sprechweise und Bedeutung

Ist $v^* \in V^*$ und $v \in V$, so sagen wir zu $v^*(v)$:

- Wir setzen den Vektor v in die Linearform v^* ein.
- Wir wenden die Linearform v^* auf den Vektor v an.

Bemerkung 21.4

Linearformen sind „Messgeräte", mit denen Vektoren „gemessen" werden.

Vektoren und Covektoren

Vektorraum V

Vektoren sind Elemente von V.

dualer Vektorraum V^*

Covektoren sind Elemente von V^*.

Covektoren sind lineare Abbildungen in $\operatorname{Hom}(V, K)$.

Duale Paarung

Definition 21.6

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit Dualraum V^*.

Die Abbildung

$$\langle \cdot \, , \cdot \rangle \colon V^* \times V \ni (v^*, v) \mapsto \langle v^* \, , v \rangle := v^*(v) \in K$$

heißt die **duale Paarung** von V^* und V.

Die duale Paarung ist linear in beiden Argumenten

Lemma 21.7

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit Dualraum V^*.

Die duale Paarung $\langle \cdot \,, \cdot \rangle$ ist linear in beiden Argumenten, also

$$\begin{aligned}
\langle \alpha\, v^* + \beta\, w^* \,, v \rangle &= \alpha\, \langle v^* \,, v \rangle + \beta\, \langle w^* \,, v \rangle \\
\langle v^* \,, \alpha\, v + \beta\, w \rangle &= \alpha\, \langle v^* \,, v \rangle + \beta\, \langle v^* \,, w \rangle.
\end{aligned}$$

Konstruktion von Linearformen

Erinnerung: Lineare Abbildungen sind durch die Bilder einer Basis eindeutig festgelegt.

Satz 21.8, vgl. Satz 19.5 (Zuordnung zu Darstellungsmatrizen)

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit Dualraum V^*. Weiter sei $B = (v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V.

Die Zuordnung

$$I_B \colon V^* \ni v^* \mapsto \langle v^*, v_i \rangle_{i \in I} \in K^I$$

ist ein Isomorphismus von Vektorräumen.

Dimension des Dualraumes

Folgerung 21.9

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit Dualraum V^*.

Ist $\dim(V) = n \in N_0$, dann gilt $V \cong V^*$, also $\dim(V) = \dim(V^*)$.

Beweis.

Duale Basis

Satz 21.10

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit Dualraum V^*.

Ist $B = (v_1, \ldots, v_n)$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ eine Basis von V, dann bilden die Linearformen $v_i^* \in V^*$, für $i = 1, \ldots, n$ definiert durch

$$\langle v_i^*\,, v_j \rangle := \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{im Fall } i = j \\ 0 & \text{im Fall } i \neq j \end{cases}$$

die zu B **duale Basis** von V^*.

Es gilt

$$v^* = \sum_{i=1}^{n} \langle v^*\,, v_i \rangle\, v_i^*.$$

Duale Basis

Beispiel 21.12

1. Es sei $V = K^n$ und $B = (e_1, \ldots, e_n)$ die Standardbasis.

Duale Basis

Beispiel 21.12

2. Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit Dualraum V^*. Weiter sei $B = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V und $B^* = (v_1^*, \ldots, v_n^*)$ die duale Basis.

   Für den Koordinatenvektor $x = \Phi_B^{-1}(v)$ von $v \in V$ gilt

$$x = \begin{pmatrix} \langle v_1^*, v \rangle \\ \vdots \\ \langle v_n^*, v \rangle \end{pmatrix}.$$

Bemerkung 21.14

Ist $B = (v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V mit unendlicher Indexmenge I, dann ist die gleichmächtige Familie $B^* := (v_i^*)_{i \in I}$ in V^* mit

$$\langle v_i^*, v_j \rangle := \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{im Fall } i = j \\ 0 & \text{im Fall } i \neq j \end{cases}$$

zwar linear unabhängig in V^*, aber kein Erzeugendensystem:

Darstellung von Vektoren und Covektoren

Vektorraum V

Basis $B = (v_1, \ldots, v_n)$ in V

$$v = \sum_{j=1}^{n} x_j \, v_j$$

dualer Vektorraum V^*

duale Basis $B^* = (v_1^*, \ldots, v_n^*)$ in V^*

$$v^* = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \, v_i^*$$

$$\langle v^* \, , v \rangle =$$

Darstellung von Vektoren und Covektoren

Lemma 21.15

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit Dualraum V^*. Weiter seien $B = (v_1, \ldots, v_n)$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ eine Basis von V und $B^* = (v_1^*, \ldots, v_n^*)$ die duale Basis.

1. Die Koordinaten $x \in K^n$ von $v \in V$ erfüllen
$$x_i = \langle v_i^* \, , v \rangle.$$
2. Die Koordinaten $\xi \in K^n$ von $v^* \in V^*$ erfüllen
$$\xi_i = \langle v^* \, , v_i \rangle.$$

Darstellung von Covektoren (Linearformen)

Beispiel 21.16

1. Wir betrachten $K_n[t]$ mit der Monombasis $B = (v_0, v_1, \ldots, v_n) = (1, t, \ldots, t^n)$. Die duale Basis $B^* = (v_0^*, \ldots, v_n^*)$ hat die Darstellung

$$v_i^* = \frac{1}{i!} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t^i}(0).$$

Darstellung von Covektoren (Linearformen)

Beispiel 21.16

2. In K^n mit der Standardbasis $B = (e_1, \ldots, e_n)$ stimmen Vektoren v mit ihren Koordinatenvektoren x überein.

   Eine Linearform v^* in $(K^n)^*$ können wir durch ihren Koeffizientenvektor $\xi \in K^n$ bzgl. der dualen Basis darstellen. Die Zuordnung $v^* \mapsto \xi$ ist ein Isomorphismus, daher können wir auch direkt $(K^n)^*$ mit K^n identifizieren.

   Die duale Paarung ist dann $\xi^\mathsf{T} x$.

Lemma 21.17

Es seien V ein Vektorraum über dem Körper K mit Dualraum V^* und

- $B_V = (v_1, \ldots, v_n)$ und $\widehat{B}_V = (\widehat{v}_1, \ldots, \widehat{v}_n)$ Basen von V
- $B_{V^*} = (v_1^*, \ldots, v_n^*)$ und $\widehat{B}_{V^*} = (\widehat{v}_1^*, \ldots, \widehat{v}_n^*)$ die dualen Basen.

Mit $\qquad T = \mathcal{T}_{\widehat{B}_V}^{B_V} = \mathcal{M}_{\widehat{B}_V}^{B_V}(\mathrm{id}_V)$

ist $\qquad T^{-\mathsf{T}} = \mathcal{T}_{\widehat{B}_{V^*}}^{B_{V^*}} = \mathcal{M}_{\widehat{B}_{V^*}}^{B_{V^*}}(\mathrm{id}_{V^*})$.

$$\widehat{x} = T\,x \qquad\qquad \widehat{\xi} = T^{-\mathsf{T}}\xi$$

Basiswechsel

Lemma 21.17

$$T = \mathcal{T}_{\widehat{B}_V}^{B_V} \quad \Rightarrow \quad T^{-\mathsf{T}} = \mathcal{T}_{\widehat{B}_{V^*}}^{B_{V^*}}$$

Beweis.

Kovariante und kontravariante Transformation

Bemerkung 21.18

Transformationen von alt nach neu:

$$
\begin{aligned}
\text{Basis} \quad & \widehat{v}_j = \sum_{i=1}^{n} (T^{-1})_{ij}\, v_i \\
\text{Koeffizienten eines Vektors} \quad & \widehat{x}_i = \sum_{j=1}^{n} T_{ij}\, x_j \\
\text{Koeffizienten eines Covektors} \quad & \widehat{\xi}_j = \sum_{i=1}^{n} (T^{-1})_{ij}\, \xi_i
\end{aligned}
$$

Annihilatoren

Definition 21.19

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K.

1. Für $M \subseteq V$ heißt

$$\begin{aligned} M^0 &:= \{v^* \in V^* \mid \langle v^*, v \rangle = 0 \text{ für alle } v \in M\} \\ &= \{v^* \in V^* \mid M \subseteq \operatorname{Kern}(v^*)\} \\ &= \bigcap_{v \in M} \{v\}^0 \subseteq V^* \end{aligned}$$

   der **Annihilator** von M.

Prä-Annihilatoren

Definition 21.19

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K.

2. Für $F \subseteq V^*$ heißt

$$
\begin{aligned}
{}^0F &:= \{v \in V \mid \langle v^*, v\rangle = 0 \text{ für alle } v^* \in F\} \\
&= \bigcap_{v^* \in F} \operatorname{Kern}(v^*) \subseteq V
\end{aligned}
$$

der **Prä-Annihilator** von F.

Einige Annihilatoren und Prä-Annihilatoren

Lemma 21.20

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K.

1. $\{0_V\}^0 = V^*$.
2. $V^0 = \{0_{V^*}\}$.
3. ${}^0\{0_{V^*}\} = V$.
4. ${}^0(V^*) = \{0_V\}$

Annihilatoren und Prä-Annihilatoren sind Unterräume

Lemma 21.21

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K.

1. Ist $M \subseteq V$, dann ist M^0 ein Unterraum von V^*.
2. Ist $F \subseteq V^*$, dann ist ${}^0F$ ein Unterraum von V.

Beispiel 21.22

1. Es sei $V := \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $U := \mathbb{R}^{2\times 2}_{\text{sym}} \subseteq V$ der Unterraum der symmetrischen Matrizen

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \;\middle|\; a_{12} - a_{21} = 0 \right\}.$$

Beispiel 21.22

2. Es sei $V := \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $F \subseteq V^*$ der Unterraum, der durch die Linearformen

$$a_{12} + a_{21}, \quad a_{13} + a_{31} \quad \text{und} \quad a_{23} + a_{32}$$

aufgespannt wird.

Annihilatoren und Prä-Annihilatoren von Unterräumen

Satz 21.23

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit der Basis $B = (v_1, \dots, v_n)$ und dualer Basis $B^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$.

1. Ist $(v_1, \dots, v_k)$ eine Basis des Unterraumes $U \subseteq V$, dann ist $(v_{k+1}^*, \dots, v_n^*)$ eine Basis von U^0, also gilt
$$\dim(U^0) = \dim(V) - \dim(U).$$

2. Ist $(v_1^*, \dots, v_k^*)$ eine Basis des Unterraumes $F \subseteq V^*$, dann ist $(v_{k+1}, \dots, v_n)$ eine Basis von ${}^0F$, also gilt
$$\dim({}^0F) = \dim(V^*) - \dim(F) = \dim(V) - \dim(F).$$

Annihilatoren und Prä-Annihilatoren in K^n

Beispiel 21.25

1. Ist $M \subseteq K^n$ und identifizieren wir $(K^n)^*$ mit K^n mit K^n (Folie 19), dann gilt

$$M^0 = \{\xi \in K^n \,|\, \xi^\mathsf{T} x = 0 \text{ für alle } x \in M\}.$$

2. Wird $F \subseteq K^n$ interpretiert als Teilmenge von $(K^n)^*$, dann gilt

$${}^0F = \{x \in K^n \,|\, \xi^\mathsf{T} x = 0 \text{ für alle } \xi \in F\}.$$