Vorlesungszeit: 9:20 – 11:00 mit Pause

# Lineare Algebra II

## Woche 01

- Tutoriengruppen kommen im Laufe des Tages
- Tutorien starten morgen (17.04.)

16.04.2024 und 18.04.2024

https://tinyurl.com/scoop-la

- 1. Übungsblatt kommt ASAP

# Erinnerung: Homomorphismen zwischen Vektorräumen

Sind $V$ und $W$ Vektorräume über dem Körper $K$, dann bezeichnet

$$\mathrm{Hom}(V, W) = \{f\colon V \to W \mid f \text{ ist linear}\}$$

den Vektorraum der linearen Abbildungen $f\colon V \to W$.

$f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2)$

in Hom(V,W)

in W

$(f + g)(v) := f(v) + g(v)$

$(\alpha f)(v) := \alpha f(v)$

$\dim \mathrm{Hom}(V, W) = (\dim V)(\dim W)$

**Definition 21.1** Spezialfall von $\mathrm{Hom}(V,W)$ mit $W=K$

Es sei $V$ ein Vektorraum über dem Körper $K$. Der Vektorraum

$$V^* := \mathrm{Hom}(V,K) = \{f\colon V \to K \mid f \text{ ist linear}\}$$

der linearen Abbildungen $V \to K$ heißt der **Dualraum** von $V$.

Die Elemente von $V^*$ heißen **lineare Funktionale** auf $V$ oder **Linearformen** auf $V$ oder **Covektoren**.

$0 \in V^*$ heißt Nullform, also $0(v) = 0^{\in K} \quad \forall v \in V$.

## Beispiel 21.2

1. Projektion auf die $i$-te Koordinate $V = K^n$

   $\pi_i : K^n \ni x \mapsto x_i \in K$

   ist eine Linearform auf $K^n$, also ein Element von $(K^n)^*$.

2. Auswertungsabbildung $V = K[t]$

   $K[t] \ni p \mapsto \tilde{p}(\alpha) \in K$ mit $\alpha \in K$ fest

   ist eine Linearform auf $K[t]$, also ein Element von $(K[t])^*$.

# Der Dualraum eines Vektorraumes

## Beispiel 21.2

3. Zu $A \in K^{1 \times n}$ ist $f_A\colon K^n \to K$ eine Linearform auf $K^n$.

$$f_A : K^n \ni x \mapsto Ax \in K$$

1 n n

4. Ist $B = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von $V$, dann hat $v^* \in V^*$ die Darstellungsmatrix

Start

Ziel

$$\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{(1)}(v^*) = \begin{bmatrix} v^*(v_1) & \cdots & v^*(v_n) \end{bmatrix} \in K^{1 \times n}$$

# Zur Sprechweise und Bedeutung

Ist $v^* \in V^*$ und $v \in V$, so sagen wir zu $v^*(v)$:

- Wir setzen den Vektor $v$ in die Linearform $v^*$ ein.
- Wir wenden die Linearform $v^*$ auf den Vektor $v$ an.

### Bemerkung 21.4

Linearformen sind „Messgeräte“, mit denen Vektoren „gemessen“ werden.

# Vektoren und Covektoren

Vektorraum $V$

Vektoren sind Elemente von $V$.

Vektoren „sind" lineare Abbildungen in $\mathrm{Hom}(K, V)$

$K \ni \alpha \mapsto \alpha v \in V$

dualer Vektorraum $V^*$

Covektoren sind Elemente von $V^*$.

Covektoren sind lineare Abbildungen in $\mathrm{Hom}(V, K)$.

# Duale Paarung

## Definition 21.6

Es sei $V$ ein Vektorraum über dem Körper $K$ mit Dualraum $V^*$.

Die Abbildung

$$\langle \cdot\,,\cdot \rangle \colon V^* \times V \ni (v^*, v) \mapsto \langle v^*\,, v \rangle := v^*(v) \in K$$

heißt die **duale Paarung** von $V^*$ und $V$.

Diese Abbildung ist „natürlich" (kanonisch).
Man muss nur $V$ festlegen, der Rest folgt.

# Die duale Paarung ist linear in beiden Argumenten

## Lemma 21.7

Es sei $V$ ein Vektorraum über dem Körper $K$ mit Dualraum $V^*$.

Die duale Paarung $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ ist linear in beiden Argumenten, also

$$\begin{aligned}
\langle \alpha\, v^* + \beta\, w^*\,, v \rangle &= \alpha\, \langle v^*\,, v \rangle + \beta\, \langle w^*\,, v \rangle \\
\langle v^*\,, \alpha\, v + \beta\, w \rangle &= \alpha\, \underbrace{\langle v^*\,, v \rangle}_{\in K} + \beta\, \langle v^*\,, w \rangle.
\end{aligned}$$

Erinnerung: Lineare Abbildungen sind durch die Bilder einer Basis eindeutig festgelegt.

**Satz 21.8, vgl. Satz 19.5 (Zuordnung zu Darstellungsmatrizen)**

Es sei $V$ ein Vektorraum über dem Körper $K$ mit Dualraum $V^*$. Weiter sei $B = (v_i)_{i \in I}$ eine Basis von $V$.

Die Zuordnung

Linearform

alle Abb. $I \to K$

$$I_B \colon V^* \ni v^* \mapsto \underbrace{\langle v^*, v_i \rangle_{i \in I}}_{\text{Familie der Bilder der Basis}} \in K^I$$

ist ein Isomorphismus von Vektorräumen.

## Folgerung 21.9

Es sei $V$ ein Vektorraum über dem Körper $K$ mit Dualraum $V^*$.

Ist $\dim(V) = n \in N_0$, dann gilt $V \cong V^*$, also $\dim(V) = \dim(V^*)$.

**Beweis.** Es sei $B = (v_1, \dots, v_n)$ Basis von $V$.

Satz 21.8: $I_B : V^* \ni v^* \mapsto (\langle v^*, v_1 \rangle, \dots, \langle v^*, v_n \rangle) \in K_n$

ist ein Isomorphismus.

Also ist $V^* \cong K_n \underset{\uparrow \text{Folg. 18.2}}{\cong} V$, d.h. $V^* \cong V$.

Es folgt $\dim(V) = \dim(V^*)$.

# Duale Basis

## Satz 21.10

Es sei $V$ ein Vektorraum über dem Körper $K$ mit Dualraum $V^*$.

Ist $B = (v_1, \ldots, v_n)$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ eine Basis von $V$, dann bilden die Linearformen $v_i^* \in V^*$, für $i = 1, \ldots, n$ definiert durch

$$\langle v_i^* \, , v_j \rangle := \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{im Fall } i = j \\ 0 & \text{im Fall } i \neq j \end{cases}$$

$v_i^*$ ist eindeutig definiert durch die Bilder von $(v_1, \ldots, v_n)$.

die zu $B$ **duale Basis** von $V^*$.

Es gilt

$$v^* = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\langle v^* \, , v_i \rangle}_{\text{Koeffizienten}} v_i^* .$$

# Duale Basis

## Beispiel 21.12

1. Es sei $V = K^n$ und $B = (e_1, \dots, e_n)$ die Standardbasis.

Die duale Basis $B^* = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ besteht aus den Projektionen $\pi_i$, denn:

$$< \pi_i, e_j > = < \pi_i, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j > = \delta_{ij}$$

Die $i$-te Koordinate von $x \in K^n$ auswerten

$\Leftrightarrow$ das duale Basiselement $\pi_i$ auf $x$ anwenden

## Beispiel 21.12

2. Es sei $V$ ein Vektorraum über dem Körper $K$ mit Dualraum $V^*$. Weiter sei $B = \cancel{(v_i)_{i \in I}}$ $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von $V$ und $B^* = (v_1^*, \ldots, v_n^*)$ die duale Basis.

   Für den Koordinatenvektor $x = \Phi_B^{-1}(v)$ von $v \in V$ gilt

$$x = \begin{pmatrix} \langle v_1^*, v \rangle \\ \vdots \\ \langle v_n^*, v \rangle \end{pmatrix}.$$

Die Elemente der dualen Basis $B^*$ sind „Koordinatenbestimmer"!

## Bemerkung 21.14

Ist $B = (v_i)_{i \in I}$ eine Basis von $V$ mit unendlicher Indexmenge $I$, dann ist die gleichmächtige Familie $B^* := (v_i^*)_{i \in I}$ in $V^*$ mit

$$\langle v_i^*, v_j \rangle := \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{im Fall } i = j \\ 0 & \text{im Fall } i \neq j \end{cases}$$

$j \in I$

zwar linear unabhängig in $V^*$, aber kein Erzeugendensystem:

Die durch $\langle v^*, v_j \rangle = 1$ für alle $v_j \in B$ definierte Linearform ist keine (endliche) Linearkombination der Elemente aus $B^*$.

# Darstellung von Vektoren und Covektoren

Vektorraum $V$

Basis $B = (v_1, \dots, v_n)$ in $V$

Koordinaten

$$v = \sum_{j=1}^{n} x_j \, v_j$$

dualer Vektorraum $V^*$

duale Basis $B^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$ in $V^*$

Koordinaten

$$v^* = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \, v_i^*$$

$$\langle v^*, v \rangle = \Big\langle \sum_{i=1}^{n} \xi_i v_i^*, \sum_{j=1}^{n} x_j v_j \Big\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \xi_i \Big\langle v_i^*, \sum_{j=1}^{n} x_j v_j \Big\rangle$$

Linearität im 1. Argument

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_i x_j \underbrace{\langle v_i^*, v_j \rangle}_{=\delta_{ij}}$$

" im 2. Argu.

$$= \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i = \xi^T x$$

verwendet die beiden Koordinatenvektoren

### Lemma 21.15

Es sei $V$ ein Vektorraum über dem Körper $K$ mit Dualraum $V^*$. Weiter seien $B = (v_1, \ldots, v_n)$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ eine Basis von $V$ und $B^* = (v_1^*, \ldots, v_n^*)$ die duale Basis.

1. Die Koordinaten $x \in K^n$ von $v \in V$ erfüllen $\quad x = \Phi_B^{-1}(v)$

$$x_i = \langle v_i^*, v \rangle.$$

2. Die Koordinaten $\xi \in K^n$ von $v^* \in V^*$ erfüllen

$\xi_i =$ [illegible]. $\quad \langle v^*, v_i \rangle$

duale Basis = Koordinatenmittler für primale Vektoren in $V$

primale Basis = — " — für duale Vektoren/Covektoren in $V^*$

# Darstellung von Covektoren (Linearformen)

## Beispiel 21.16

1. Wir betrachten $K_n[t]$ mit der Monombasis $B = (v_0, v_1, \ldots, v_n) = (1, t, \ldots, t^n)$. Die duale Basis $B^* = (v_0^*, \ldots, v_n^*)$ hat die Darstellung

Umwandlung in Polynomfkt.

$$v_i^* = \frac{1}{i!} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t^i}(0). \qquad i = 0, 1, \ldots, n.$$

- z.B. $v = 2t^2 - 3t + 1$ in $\mathbb{Q}_n[t]$ hat Koord. $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ bzgl. B.
- $v^* \in (\mathbb{Q}_n[t])^*$ gegeben durch $\langle v^*, v \rangle = \tilde{v}(0) - \tilde{v}(2)$

Diese Linearform hat Koordinaten

$$\xi_0 = \langle v^*, 1 \rangle = 1 - 1 = 0$$
$$\xi_1 = \langle v^*, t \rangle = 0 - 2 = -2$$
$$\xi_2 = \langle v^*, t^2 \rangle = 0 - 4 = -4$$

# Darstellung von Covektoren (Linearformen)

## Beispiel 21.16

2. In $K^n$ mit der Standardbasis $B = (e_1, \ldots, e_n)$ stimmen Vektoren $v$ mit ihren Koordinatenvektoren $x$ überein.

   Eine Linearform $v^*$ in $(K^n)^*$ können wir durch ihren
   Koordinaten
   ~~Koeffizient~~envektor $\xi \in K^n$ bzgl. der dualen Basis darstellen. Die
   $\Phi_{B^*}^{-1} \rightarrow$ Zuordnung $v^* \mapsto \xi$ ist ein Isomorphismus, daher können wir auch direkt $(K^n)^*$ mit $K^n$ identifizieren.

   Die duale Paarung ist dann $\xi^\mathsf{T} x$.

## Lemma 21.17

alt    neu

Es seien $V$ ein Vektorraum über dem Körper $K$ mit Dualraum $V^*$ und

- $B_V = (v_1, \dots, v_n)$ und $\widehat{B}_V = (\widehat{v}_1, \dots, \widehat{v}_n)$ Basen von $V$
- $B_{V^*} = (v_1^*, \dots, v_n^*)$ und $\widehat{B}_{V^*} = (\widehat{v}_1^*, \dots, \widehat{v}_n^*)$ die dualen Basen.

Mit $$T = \mathcal{T}_{\widehat{B}_V}^{B_V} = \mathcal{M}_{\widehat{B}_V}^{B_V}(\mathrm{id}_V)$$ Transformationsmatrix

ist $$T^{-\mathsf{T}} = \mathcal{T}_{\widehat{B}_{V^*}}^{B_{V^*}} = \mathcal{M}_{\widehat{B}_{V^*}}^{B_{V^*}}(\mathrm{id}_{V^*}).$$

Für Koordinatenvektoren gilt

$$\widehat{x} = T\,x \qquad \widehat{\xi} = T^{-\mathsf{T}}\xi$$

**Lemma 21.17**

$$T = T_{\widehat{B}_V}^{B_V} \quad \Rightarrow \quad T^{-\mathsf{T}} = T_{\widehat{B}_{V^*}}^{B_{V^*}}$$

**Beweis.** $v_j = \sum_{i=1}^n t_{ij} \hat{v}_i$. Wir suchen $S = T_{\hat{B}_{V^*}}^{B_{V^*}}$

$v_j^* = \sum_{i=1}^n s_{ij} \hat{v}_i^*$.

$$\langle v_i^*, v_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n s_{ki} \hat{v}_k^*, \sum_{\ell=1}^n t_{\ell j} \hat{v}_\ell \right\rangle$$

$$= \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n s_{ki} t_{\ell j} \underbrace{\langle \hat{v}_k^*, \hat{v}_\ell \rangle}_{\delta_{k\ell}} = \sum_{k=1}^n s_{ki} t_{kj}$$

$$= (S^\mathsf{T} T)_{ij} \overset{!}{=} \delta_{ij}$$ (d.h. $S^\mathsf{T} T = I$, also $S = T^{-\mathsf{T}}$.)

# Kovariante und kontravariante Transformation

## Bemerkung 21.18

Transformationen von alt nach neu:

Basis $\qquad \widehat{v}_j = \sum_{i=1}^{n} (T^{-1})_{ij}\, v_i$

Koord. ~~Koeffizienten~~ eines Vektors $\qquad \widehat{x}_i = \sum_{j=1}^{n} T_{ij}\, x_j \qquad$ kontravariant

Koord. ~~Koeffizienten~~ eines Covektors $\qquad \widehat{\xi}_j = \sum_{i=1}^{n} (T^{-1})_{ij}\, \xi_i \qquad$ kovariant

# Annihilatoren

## Definition 21.19

Es sei $V$ ein Vektorraum über dem Körper $K$.

1. Für $M \subseteq V$ heißt

$$M^0 := \{v^* \in V^* \mid \langle v^*, v\rangle = 0 \text{ für alle } v \in M\}$$
$$= \{v^* \in V^* \mid M \subseteq \operatorname{Kern}(v^*)\}$$
$$= \bigcap_{v \in M} \{v\}^0 \subseteq V^*$$

der **Annihilator** von $M$.

$M^0$ sammelt Linearformen, die auf $M \subseteq V$ verschwinden.

### Definition 21.19

Es sei $V$ ein Vektorraum über dem Körper $K$.

2. Für $F \subseteq V^*$ heißt

$$
\begin{aligned}
{}^0F &:= \{v \in V \mid \langle v^*, v\rangle = 0 \text{ für alle } v^* \in F\} \\
&= \bigcap_{v^* \in F} \operatorname{Kern}(v^*) \subseteq V
\end{aligned}
$$

der **Prä-Annihilator** von $F$.

${}^0F$ sammelt alle Vektoren, auf denen alle Linearformen in $F \subseteq V^*$ verschwinden.

# Einige Annihilatoren und Prä-Annihilatoren

## Lemma 21.20

Es sei $V$ ein Vektorraum über dem Körper $K$.

1. $\{0_V\}^0 = V^*$. Alle Linearformen verschwinden in $0 \in V$.
2. $V^0 = \{0_{V^*}\}$. Nur die Nullform verschwindet auf ganz $V$.
3. ${}^0\{0_{V^*}\} = V$. Die Nullform bildet ganz $V$ auf $0 \in K$ ab.
4. ${}^0(V^*) = \{0_V\}$ Der einzige Vektor, auf dem alle Linearformen verschwinden, ist $0 \in V$.

mit Auswahlaxiom

# Annihilatoren und Prä-Annihilatoren sind Unterräume

## Lemma 21.21

Es sei $V$ ein Vektorraum über dem Körper $K$.

1. Ist $M \subseteq V$, dann ist $M^0$ ein Unterraum von $V^*$.
2. Ist $F \subseteq V^*$, dann ist ${}^0F$ ein Unterraum von $V$.

## Beispiel 21.22

1. Es sei $V := \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $U := \mathbb{R}^{2\times 2}_{\text{sym}} \subseteq V$ der Unterraum der symmetrischen Matrizen

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \,\middle|\, a_{12} - a_{21} = 0 \right\}.$$

Dieser UR ist praktisch schon als Annihilator definiert.

## Beispiel 21.22

2. Es sei $V := \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $F \subseteq V^*$ der Unterraum, der durch die Linearformen

$$a_{12} + a_{21}, \quad a_{13} + a_{31} \quad \text{und} \quad a_{23} + a_{32}$$

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0 \quad \leftarrow \text{Korrektur}$$

aufgespannt wird.

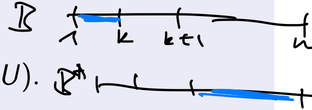
$$^0F = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{31} & \cdots & a_{33} \end{pmatrix} : \begin{array}{ll} a_{12} + a_{21} = 0, & a_{11} = 0 \\ a_{13} + a_{31} = 0, & a_{22} = 0 \\ a_{23} + a_{32} = 0, & a_{33} = 0 \end{array} \right\}$$

$$= \mathbb{R}^{3\times 3}_{\text{skew}}$$

## Satz 21.23

Es sei $V$ ein Vektorraum über dem Körper $K$ mit der Basis $B = (v_1, \dots, v_n)$ und dualer Basis $B^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$.

1. Ist $(v_1, \dots, v_k)$ eine Basis des Unterraumes $U \subseteq V$, dann ist $(v_{k+1}^*, \dots, v_n^*)$ eine Basis von $U^0$, also gilt




$$\dim(U^0) = \dim(V) - \dim(U).$$

$= \operatorname{codim}(U)$

2. Ist $(v_1^*, \dots, v_k^*)$ eine Basis des Unterraumes $F \subseteq V^*$, dann ist $(v_{k+1}, \dots, v_n)$ eine Basis von ${}^0F$, also gilt

$$\dim({}^0F) = \dim(V^*) - \dim(F) = \dim(V) - \dim(F).$$

# Annihilatoren und Prä-Annihilatoren in $K^n$

## Beispiel 21.25

1. Ist $M \subseteq K^n$ und identifizieren wir $(K^n)^*$ mit $K^n$ mit $K^n$ (Folie 19), dann gilt

$$M^0 = \{\xi \in K^n \,|\, \xi^\mathsf{T} x = 0 \text{ für alle } x \in M\}.$$

2. Wird $F \subseteq K^n$ interpretiert als Teilmenge von $(K^n)^*$, dann gilt

$$^0F = \{x \in K^n \,|\, \xi^\mathsf{T} x = 0 \text{ für alle } \xi \in F\}.$$