Plenarübung LA II

(Inhalts)-Wochen 12/13

Link zu diesen Folien

Die Umfrageergebnisse

Zusammenfassung für G01Q02		
Was soll in der Plenarübung vorrangig behandelt werden?		
Antwort	**Anzahl**	**Brutto-Prozentsatz**
Wiederholung von Skriptinhalten Ansehen	5	15.62%
Erklärungen zu Skriptbeispielen Ansehen	0	0.00%
Lösungen der Hausaufgaben Ansehen	4	12.50%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	18	56.25%
Gesamt(Brutto)	**27**	**100.00%**

Zusammenfassung für G01Q01		
Welche Anmerkungen oder Fragen haben Sie zur Veranstaltung oder ihren Inhalten?		
Antwort	**Anzahl**	**Brutto-Prozentsatz**
Antwort Ansehen	9	28.12%
Keine Antwort	5	15.62%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	18	56.25%
Gesamt(Brutto)	**32**	**100.00%**

Interesse an:

(1) Orthogonalität/Unitarität
(2) Riesz-Abbildung und Adjungierte
(3) Selbstadjungiertheit und Normalität
(4) Wirkung von Transformationsmatrizen
(5) Vergleich von Innenprodukten in VR über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$
(6) Recap Tensorprodukträume
(7) Weiterführende und Forschungsthemen in der LA
(8) Die Klausuren

Das heutige Programm

(1) Kurzwiederholung Woche 12
(2) Wiederholung, Beispiele und reell-komplex-Vergleich zu
   (i) Innenprodukten
   (ii) Orthogonalität/Unitarität
   (iii) Riesz-Abbildungen, Adjungierten Abbildungen
   (iv) Orthogonaler Diagonalisierbarkeit

Wochenübersicht Woche 12

quadratische Räume
(V,γ) über K
Homom.

$K=\mathbb{R}$, γ pos. def, Spezialfall

Euklidische Räume
(V,γ) ← Innenprodukt
Homomorphismen

induziert

Riesz-Abbildung
$\Gamma: V \to V^*$
$v \to \gamma(\cdot, v)$

Ermöglicht

Adjungierte Abbildung
$f^\circ: W \to V$ wenn $f: V \to W$
"Innenproduktabhängige primale Darstellung der dualen Abbildung"

$\mathrm{Bild}(f^\circ) = \mathrm{Ke}(f)^\perp$ in V
$\mathrm{Bild}(f^\circ)^\perp = \mathrm{Ke}(f)$ in W
...

sind

"orthogonale Abbildungen"
"bzw. Isometrien"
$\Rightarrow$ Injektiv
$\Leftrightarrow$ Längenerhaltung
$\Leftrightarrow$ Abstandserhaltung
$\Rightarrow$ EW $\in \{\pm 1\}$

Bilden

Gehören zu

Orthogonale Gruppe
$\{f \in \mathrm{Aut}(V) \mid f \text{ orthogonal}\} = O(V,\gamma)$
$\{f \in O(V,\gamma) \mid \det(f) = 1\} = SO(V,\gamma)$

Definition 34.20 und Satz 34.21

Es seien (V, γ_1) und (W, γ_2) zwei Euklidische Räume. $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ heißt **(γ_1, γ_2)-orthogonal**, wenn eine/alle der äquiv. Bedingungen gilt:

(1) $\gamma_2(f(u), f(v)) = \gamma_1(u, v)$ für alle $u, v \in V$

(2) $\|f(v)\|_{\gamma_2} = \|v\|_{\gamma_1}$ für alle $v \in V$.

(3) $\|f(v_1) - f(v_2)\|_{\gamma_2} = \|v_1 - v_2\|_{\gamma_1}$ für alle $v_1, v_2 \in V$.

(4) Ist $(v_i)_{i \in I}$ eine orthonormale Familie in (V, γ_1), dann ist auch $(f(v_i))_{i \in I}$ eine orthonormale Familie in (W, γ_2).

(5) Ist v ein Einheitsvektor in (V, γ_1), dann ist $f(v)$ ein Einheitsvektor in (W, γ_2).

Beispiele zur Orthogonalität

(1) In $(\mathbb{R}[t], (p,q) \mapsto \int_0^1 \widetilde{p}(t)\widetilde{q}(t)dt)$ ist $p \mapsto t \cdot p$

(2) In $(\mathbb{R}^{m\times n}, \gamma_{m,n})$ ist die Abbildung $A \mapsto A^\mathsf{T}$

(3) In $(\mathbb{R}_3[t], \gamma)$ ist die Abbildung $p \mapsto p'$

Zusammenspiel von γ_1, γ_2 und f.

Gesehen:

Für Euklidischen Raum (V, γ_1), $\alpha \neq 0$ und $f_\alpha(v) := \alpha v$ gibt es ein Innenprodukt γ_2, so dass f_α ein (γ_1, γ_2)-orthog. Endomorphismus ist.

Geht das auch allgemeiner?

Innenprodukte über $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$

Es sei

(V, γ) ein reeller Innenproduktraum

(V, θ) ein komplexer Innenproduktraum

Komplexe Innenprodukträume reell aufgefasst

Es sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum ($V_{\mathbb{C}}$). Dann können wir V auch als $\mathbb{R}$-Vektorraum ($V_{\mathbb{R}}$) auffassen, und es gilt:

(1) Ist $(V_{\mathbb{C}}, \theta)$ ein komplexer Innenproduktraum, dann ist

(2) Ist $(V_{\mathbb{R}}, \gamma)$ ein reeller Innenproduktraum, mit dann ist

Orthogonalität/Unitarität

Definitionen 34.20 und 35.29 und Sätze 34.21 und 35.30

Es seien (V, δ_1) und (W, δ_2) zwei Innenprodukträume. $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ heißt **(δ_1, δ_2)-orthogonal/unitär**, wenn eine/alle der äquiv. Bedingungen gilt:

(1) $\delta_2(f(u), f(v)) = \delta_1(u, v) \quad$ für alle $u, v \in V$

(2) $\|f(v)\|_{\delta_2} = \|v\|_{\delta_1}$ für alle $v \in V$.

(3) $\|f(v_1) - f(v_2)\|_{\delta_2} = \|v_1 - v_2\|_{\delta_1}$ für alle $v_1, v_2 \in V$.

(4) Ist $(v_i)_{i \in I}$ eine orthonormale Familie in (V, δ_1), dann ist auch $(f(v_i))_{i \in I}$ eine orthonormale Familie in (W, δ_2).

(5) Ist v ein Einheitsvektor in (V, δ_1), dann ist $f(v)$ ein Einheitsvektor in (W, δ_2).

Die Riesz-Abbildung und die Adjungierte

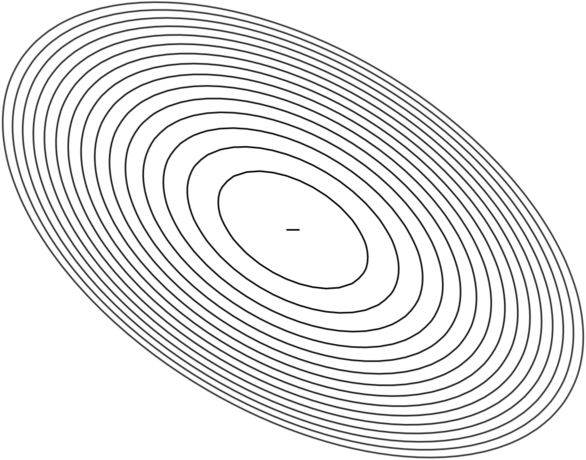
Es seien

$(V, \gamma_V), (W, \gamma_W)$ reelle Innenprodukträume

$(V, \theta_V), (W, \theta_W)$ komplexe Innenprodukträume

Bedeutung der Riesz-Abbildung in der Optimierung

$$\text{minimiere } \frac{1}{2}x^\mathsf{T}\begin{bmatrix}3 & 2\\ 2 & 6\end{bmatrix}x + \begin{pmatrix}-2\\ 8\end{pmatrix}^\mathsf{T} x \text{ über } x \in \mathbb{R}^2$$



Berechnung der Riesz-Abbildung (und ihrer Inversen)

Hausaufgabe II-12.3

Es sei $\mathbb{R}_2[t]$ mit dem Innenprodukt
$\gamma \colon \mathbb{R}_2[t]^2 \ni (p, q) \mapsto \sum_{i=0}^{2} p(i)q(i) \in \mathbb{R}$ gegeben. Bestimmen Sie
$(\Gamma_{\mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_2[t]^*})^{-1}(p \mapsto p''(0)) \in \mathbb{R}_2[t]$.

Selbstadjungiertheit und Normalität

Es sei (V, δ) ein reeller oder komplexer Innenproduktraum.

(1) $f \in \mathrm{End}(V)$ heißt δ-**selbstadjungiert**, wenn $f = f^\circ$ gilt.

(2) $f \in \mathrm{End}(V)$ heißt δ-**normal**, wenn $f \circ f^\circ = f^\circ \circ f$ gilt.

Orthonormale Diagonalisierbarkeit

Satz 34.55

Es sei (V, γ) ein endlich-dimensionaler Euklidischer Raum.
Für $f \in \mathrm{End}(V)$ sind äquivalent:

(1) f ist γ-selbstadjungiert.

(2) f ist diagonalisierbar, und es gibt es Basis aus Eigenvektoren von f, die γ-orthonormal ist.

Satz 35.60

Es sei (V, θ) ein endlich-dimensionaler unitärer Raum.
Für $f \in \mathrm{End}(V)$ sind äquivalent:

(1) f ist θ-normal.

(2) f ist diagonalisierbar, und es gibt es Basis aus Eigenvektoren von f, die θ-orthonormal ist.

Orthonormale Diagonalisierbarkeit

Ein Beispiel über $\mathbb{C}$

Untersuchen Sie, ob $x \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} x$ in $\mathrm{End}(\mathbb{C}^2)$ bezüglich der Standardinnenprodukte selbstadjungiert, respektive normal, ist. Ist der Endomorphismus orthogonal diagonalisierbar?

Orthonormale Diagonalisierbarkeit

Erweiterung von Hausaufgabe II-13.2

Untersuchen Sie, ob $x \mapsto \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} x$ in $\operatorname{End}(\mathbb{R}^2)$ bzw. $\operatorname{End}(\mathbb{C}^2)$ bezüglich der Standardinnenprodukte selbstadjungiert, respektive normal, ist. In welchen Fällen ist der Endomorphismus orthonormal diagonalisierbar?