Plenarübung LA II

(Inhalts)-Wochen 12/13

Link zu diesen Folien

Die Umfrageergebnisse

Zusammenfassung für G01Q02		
Was soll in der Plenarübung vorrangig behandelt werden?		
Antwort	**Anzahl**	**Brutto-Prozentsatz**
Wiederholung von Skriptinhalten Ansehen	5	15.62%
Erklärungen zu Skriptbeispielen Ansehen	0	0.00%
Lösungen der Hausaufgaben Ansehen	4	12.50%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	18	56.25%
Gesamt(Brutto)	**27**	**100.00%**

Zusammenfassung für G01Q01		
Welche Anmerkungen oder Fragen haben Sie zur Veranstaltung oder ihren Inhalten?		
Antwort	**Anzahl**	**Brutto-Prozentsatz**
Antwort Ansehen	9	28.12%
Keine Antwort	5	15.62%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	18	56.25%
Gesamt(Brutto)	**32**	**100.00%**

Interesse an:

(1) Orthogonalität/Unitarität
(2) Riesz-Abbildung und Adjungierte
(3) Selbstadjungiertheit und Normalität
(4) Wirkung von Transformationsmatrizen
(5) Vergleich von Innenprodukten in VR über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$
(6) Recap Tensorprodukträume
(7) Weiterführende und Forschungsthemen in der LA
(8) Die Klausuren

Das heutige Programm

(1) Kurzwiederholung Woche 12

(2) Wiederholung, Beispiele und reell-komplex-Vergleich zu

   (i) Innenprodukten

   (ii) Orthogonalität/Unitarität

   (iii) Riesz-Abbildungen, Adjungierten Abbildungen

   (iv) Orthogonaler Diagonalisierbarkeit

Wochenübersicht Woche 12

quadratische Räume
(V,γ) über K
Homom.

symmetrisch
$K=\mathbb{C}$
$K=\mathbb{R}$
γ pos def
speziell für
$\ominus$ sesquilinear form
hermitesch
pos def
$\mathbb{C}$
spezial

/ Unitär

Euklidische Räume
(V,γ) Inneprodukt
Homomorphismus

Induziert
Endlichdim. $\Rightarrow$ Bijektiv

$K=\mathbb{R}$ linear
$K=\mathbb{C}$ antilinear

Riesz-Abbildung
$\Gamma: V \to V^*$
$v \to \gamma(\cdot,v) = \gamma(v,\cdot)$
$v \to \Theta(v,\cdot)$

Unitär
"orthogonale Abbildungen"
"lin. Isometrien"
$\Rightarrow$ Injektiv ✓
$\Leftrightarrow$ Längenerhaltung ✓
$\Leftrightarrow$ Abstandserhaltung ✓
$\Rightarrow EW \in \{\pm 1\}$ $|\lambda| = 1$
$|\lambda|_{\mathbb{C}} = 1$

Bilden
Gehören zu

Eindeutigkeit

Linear / Zuordnung linear

Linear / aber antilineare Zuordnung

Adjungierte Abbildung
$f^\circ: W \to V$ wenn $f: V \to W$
"Inneprodukt abhängige primale Darstellung der dualen Abbildung"
Selbstadjungiert / Normal

Spektralsätze / orthogonale Diagonalisierbarkeit

Orthogonale Gruppe / Unitäre Gruppe
$\{f \in Aut(G) \mid f$ orthogonal $\} = O(V,\gamma)$ / $U(V,\Theta)$
unitär
$\{f \in O(V,\gamma) \mid det(f) = 1\} = SO(V,\gamma)$ / $SU(V,\Theta)$

$Bild(f^\circ) = Ke(f)^\perp$ in V
$Bild(f^\circ)^\perp = Ke(f)$ in W
...

Definition 34.20 und Satz 34.21

Es seien (V, γ_1) und (W, γ_2) zwei Euklidische Räume. $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ heißt **(γ_1, γ_2)-orthogonal**, wenn eine/alle der äquiv. Bedingungen gilt:

(1) $\gamma_2(f(u), f(v)) = \gamma_1(u, v)$ für alle $u, v \in V$ | $A^T M_2 A = M_1$

i.A. nicht $A^T A = I$

$\Downarrow$ klar, wegen $\|\cdot\| := \sqrt{\gamma(\cdot,\cdot)}$

(2) $\|f(v)\|_{\gamma_2} = \|v\|_{\gamma_1}$ für alle $v \in V$.

$\Downarrow$ klar wegen Linearität

(3) $\|f(v_1) - f(v_2)\|_{\gamma_2} = \|v_1 - v_2\|_{\gamma_1}$ für alle $v_1, v_2 \in V$.

Polarisationsformel

$\Downarrow$ (1) (2)

(4) Ist $(v_i)_{i \in I}$ eine orthonormale Familie in (V, γ_1), dann ist auch $(f(v_i))_{i \in I}$ eine orthonormale Familie in (W, γ_2).

$\Downarrow$ (v)

(5) Ist v ein Einheitsvektor in (V, γ_1), dann ist $f(v)$ ein Einheitsvektor in (W, γ_2).

$\Downarrow$ (2)

Beispiele zur Orthogonalität

(1) In $(\mathbb{R}[t], (p,q) \mapsto \int_0^1 \widetilde{p}(t)\widetilde{q}(t)dt)$ ist $p \mapsto t \cdot p$

Linearität ✓ (Rechtsshift)

$$\gamma(tp, tq) = \int_0^1 t^2 pq\,dt \overset{\text{i.A.}}{\neq} \int_0^1 pq\,dt = \gamma(p,q)$$

$p = q = 1$ $\quad \int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3}$ $\quad \int_0^1 1\,dt = 1$ ⇒ keine Längenerhaltung

(2) In $(\mathbb{R}^{m\times n}, \gamma_{m,n})$ ist die Abbildung $A \mapsto A^\mathsf{T}$

$\gamma_{m,n}(A,B) = \mathrm{SPUR}(A^T B)$

Linear ✓

$\gamma_{m,n}$ orthogonal ✓, denn $\gamma_{m,n}(A^T, B^T) = \mathrm{SPUR}((A^T)^T B^T) = \mathrm{SPUR}(AB^T) = \mathrm{SPUR}(A^T B) = \gamma_{m,n}(A,B)$

(3) In $(\mathbb{R}_3[t], \gamma)$ ist die Abbildung $p \mapsto p'$

Nie γ-orthogonal, da nicht injektiv (Kern ist $\langle 1 \rangle$)

Zusammenspiel von γ_1, γ_2 und f.

Gesehen:

Für Euklidischen Raum (V, γ_1), $\alpha \neq 0$ und $f_\alpha(v) := \alpha v$ gibt es ein Innenprodukt γ_2, so dass f_α ein (γ_1, γ_2)-orthog. Endomorphismus ist.

γ_2 konnte das Verhalten von f kompensieren

Geht das auch allgemeiner?

Sei (V, γ_1) ein Eukl. Raum, W ein $\mathbb{R}$-VR, $f \in ISO(V,W)$, dann definiert

$\gamma_2(\cdot,\cdot) := \gamma_1(f^{-1}(\cdot), f^{-1}(\cdot))$ ein IP auf W, so dass f (γ_1, γ_2)-ortho. ist.

Symmetrie wegen von γ_1

Bilinear wegen γ_1, $f \in ISO$

pos def wegen γ_1

Wieder sieht man, dass Struktur (hier IP) durch Isomorphismen strukturverträglich übertragen werden

$$\gamma_2(f(u), f(v)) = \gamma_1(f^{-1}(f(u)), f^{-1}(f(v))) = \gamma_1(u,v)$$

Innenprodukte über $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$

Es sei

(V, γ) ein reeller Innenproduktraum

γ bilinear $\quad \gamma(\cdot,\cdot)$ linear linear

γ symmetrisch $\quad \gamma(u,v) = \gamma(v,u)$

γ pos def $\quad \gamma(u,u) > 0 \quad | \; u \neq 0$

Darstellungsmatrix M, $\quad \phi(\alpha) = u$, $\quad \phi(\beta) = v$

$M = (\gamma(u_i,u_j))_{i,j}$

$\gamma(u,v) = \gamma(\sum \alpha_i u_i, \sum \beta_j u_j)$

$= \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j \gamma(u_i,u_j) = \alpha^T M \beta$

$\gamma(f(u), g(v)) = \alpha^T A^T M B \beta$

(V, θ) ein komplexer Innenproduktraum

θ Sesquilinearform $\quad \theta(\cdot,\cdot)$ Antilinear linear

θ hermitesch $\quad \theta(u,v) = \overline{\theta(v,u)}$ $\quad (\Rightarrow \theta(u,u) \in \mathbb{R})$

θ pos def $\quad \theta(u,u) > 0 \quad u \neq 0$

Darstellungsmatrix M, $\quad \phi(\alpha) = u$, $\quad \phi(\beta) = v$

$M = (\theta(u_i,u_j))_{i,j}$

$\theta(u,v) = \theta(\sum \alpha_i u_i, \sum \beta_j u_j)$

$= \sum_{i,j} \overline{\alpha_i} \beta_j \theta(u_i,u_j) = \alpha^H M \beta$

$\theta(f(u), g(v)) = \alpha^H A^H M B \beta$

Es sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum ($V_\mathbb{C}$). Dann können wir V auch als $\mathbb{R}$-Vektorraum ($V_\mathbb{R}$) auffassen, und es gilt:

(1) Ist $(V_\mathbb{C}, \theta)$ ein komplexer Innenproduktraum, dann ist $(V_\mathbb{R}, \theta)$ i.A. kein IP-Raum über $\mathbb{R}$, aber $V_\mathbb{R}$ mit $\mathrm{Re}(\theta(\cdot,\cdot))$ und es gilt

$$\mathrm{Re}(\theta(v, iv)) = 0 \quad \forall v \in V.$$

(2) Ist $(V_\mathbb{R}, \gamma)$ ein reeller Innenproduktraum, mit $\gamma(v, iv) = 0$ dann ist

$\theta(u,v) := \gamma(u,v) + i\gamma(iu, v)$ ein $\mathbb{C}$-IPraum auf $V_\mathbb{C}$

Skizze: (1)

$$\mathrm{Re}(\theta(\alpha u, v)) = \mathrm{Re}(\bar{\alpha}\, \theta(u,v)) = \mathrm{Re}(\alpha\, \theta(u,v)) = \alpha\, \mathrm{Re}(\theta(u,v)) \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

(Sem. i. 1. E.)

$$\mathrm{Re}(\theta(u,v)) = \mathrm{Re}(\overline{\theta(v,u)}) = \mathrm{Re}(\theta(v,u)) \text{ (Symmetrie)}$$

Pos def ✓ $\quad \mathrm{Re}(\theta(v, iv)) = \mathrm{Re}(i\, \underbrace{\theta(v,v)}_{\in \mathbb{R}}) = 0$

(2) $\theta(\alpha u, v) = \quad \ldots \quad = \bar{\alpha}\, \theta(u,v)$

$\Theta(u,v) := \frac{1}{4}\left[q(v+v) - q(v-w)\right] - \frac{i}{4}\left[q(v+iw) - q(v-iw)\right]$

Definitionen 34.20 und 35.29 und Sätze 34.21 und 35.30

Es seien (V, δ_1) und (W, δ_2) zwei Innenprodukträume. $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ heißt **(δ_1, δ_2)-orthogonal/unitär**, wenn eine/alle der äquiv. Bedingungen gilt:

(1) $\delta_2(f(u), f(v)) = \delta_1(u, v)$ für alle $u, v \in V$

$\Downarrow$ wie eben

(2) $\|f(v)\|_{\delta_2} = \|v\|_{\delta_1}$ für alle $v \in V$.

$\Downarrow$ —"—

(3) $\|f(v_1) - f(v_2)\|_{\delta_2} = \|v_1 - v_2\|_{\delta_1}$ für alle $v_1, v_2 \in V$.

$\mathbb{C}$?

Polarisierungsformel und für Spezialisierungsformel möglich

(4) Ist $(v_i)_{i \in I}$ eine orthonormale Familie in (V, δ_1), dann ist auch $(f(v_i))_{i \in I}$ eine orthonormale Familie in (W, δ_2).

(5) Ist v ein Einheitsvektor in (V, δ_1), dann ist $f(v)$ ein Einheitsvektor in (W, δ_2).

Die Riesz-Abbildung und die Adjungierte

Es seien $f: V \to W$

$(V, \gamma_V), (W, \gamma_W)$ reelle Innenprodukträume	$(V, \theta_V), (W, \theta_W)$ komplexe Innenprodukträume
$\Gamma_V(u) := \gamma(\cdot, v) = \gamma(v, \cdot)$	$\Theta_V(v) := \theta_V(v, \cdot)$
$\Gamma_V : V \to V^*$ linear, injektiv	$\Theta_V : V \to V^*$ antilinear, injektiv
Endlichdim. $\Rightarrow$ Bij.	Endlichdim. $\Rightarrow$ Bij.

Private Darstellung von Dualraumelementen (Basis- / IP-abhängig)

Adjungierte f°:

$$\begin{tikzcd} V^* \arrow[d, "\Gamma_V^{-1}/\Theta_V^{-1}"'] & W^* \arrow[l, "f^*"'] \\ V \arrow[r, "f"] & W \arrow[u, "\Gamma_W/\Theta_W"'] \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

$f^\circ := \Theta_V^{-1} \circ f^* \circ \Theta_W$ 'Private Darstellung der dualen Abbildung'

$f: V \to W$

$f^*: W^* \to V^*$

$f^\circ: W \to V$

Falls $W = V \Rightarrow$ $f: V \to V$, $f^\circ: V \to V$

Wann ist $f = f^\circ$ $\leftarrow$ Selbstadjungiertheit!

$$\text{minimiere } \underbrace{\tfrac{1}{2}x^\mathsf{T}\begin{bmatrix}3 & 2\\ 2 & 6\end{bmatrix}x + \begin{pmatrix}-2\\ 8\end{pmatrix}^\mathsf{T} x}_{} \text{ über } x \in \mathbb{R}^2$$

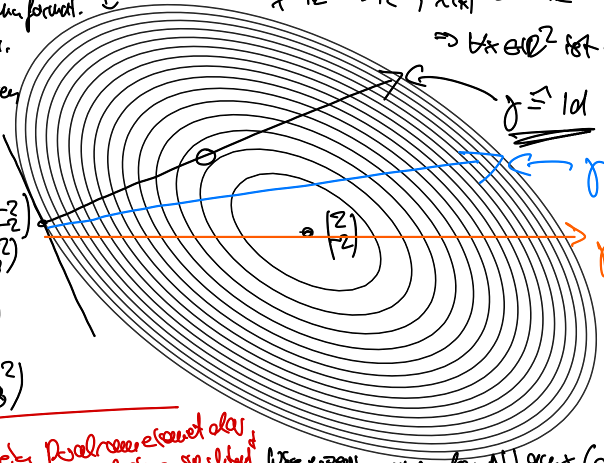
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f'(x) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ linear

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^2$ ist $f'(x) \in {\mathbb{R}^2}^*$

Isolinien

Wie aus linearen Umformul. Abstieg erzeugen.

Folge dem steilsten Abstieg.



$\gamma \mathrel{\hat=} \mathrm{Id}$

$\gamma \mathrel{\hat=} \mathrm{diag}\begin{bmatrix}3 & 2\\ 2 & 6\end{bmatrix}$

$\gamma \mathrel{\hat=} \begin{bmatrix}3 & 2\\ 2 & 6\end{bmatrix}$

$x = \begin{pmatrix}-2\\ -2\end{pmatrix}$

$\begin{bmatrix}2\\ -2\end{bmatrix}$

$f'(x) \mathrel{\hat=} \begin{bmatrix}3 & 2\\ 2 & 6\end{bmatrix} x + \begin{pmatrix}-2\\ 8\end{pmatrix}$

$f'\begin{pmatrix}-2\\ -2\end{pmatrix} \mathrel{\hat=} \begin{pmatrix}-12\\ -8\end{pmatrix}$

$-f'\begin{pmatrix}-2\\ -2\end{pmatrix} \mathrel{\hat=} \begin{pmatrix}12\\ 8\end{pmatrix}$

Das stellt ein Dualraumelement dar, keine „Richtung"

Wie erzeugt man aus der Abl. ein x ($\in V^*$) eine Richtung ($\in V$)?

Riesz

Interpolation liefert Bijekt.

Gegeben durch $f: \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}^3$, $f(p) := \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{pmatrix}$

Dort das Standard-Innenprodukt

Hausaufgabe II-12.3

Es sei $\mathbb{R}_2[t]$ mit dem Innenprodukt
$\gamma : \mathbb{R}_2[t]^2 \ni (p, q) \mapsto \sum_{i=0}^{2} p(i)q(i) \in \mathbb{R}$ gegeben. Bestimmen Sie
$\underbrace{(\Gamma_{\mathbb{R}_2[t]\to\mathbb{R}_2[t]^*})^{-1}(\underbrace{p \mapsto p''(0)}_{f \in V^*})} \in \mathbb{R}_2[t]$.

Gesucht: $v_f \in V$ mit $f(\cdot) = \gamma(v_f, \cdot) = \Gamma(v_f)(\cdot)$ Also $v_f = \Gamma^{-1}(f)$

Wechsel in Koordinatendarstellung, LGS lösen, Bilde zurück nach V ab.

Hier die Monombasis B bzw. ihre duale.

$$M_B^{B^*}(\gamma) = \begin{bmatrix} \gamma(1,1) & \cdots & \gamma(1,t^2) \\ \vdots & \ddots & \\ & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 17 \end{bmatrix} \qquad \Phi_{B^*}^{-1}(f) = \begin{pmatrix} f(1) \\ f(t) \\ f(t^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \Phi_B^{-1}(\Gamma^{-1}(f)) = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 17 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \Gamma^{-1}(f) = \Phi_B \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 - 6t + 3t^2$$

Selbstadjungiertheit und Normalität

Es sei (V, δ) ein reeller oder komplexer Innenproduktraum.

(1) $f \in \mathrm{End}(V)$ heißt δ-**selbstadjungiert**, wenn $f = f^\circ$ gilt.

f entspricht ihrer Adjungierten.

(2) $f \in \mathrm{End}(V)$ heißt δ-**normal**, wenn $f \circ f^\circ = f^\circ \circ f$ gilt.

f kommutiert mit ihrer Adjungierten

f ortho./unitär $\Rightarrow$ f normal $\Leftarrow$ f selbstadj.

Orthonormale Diagonalisierbarkeit

Satz 34.55

Es sei (V, γ) ein endlich-dimensionaler Euklidischer Raum. $K = \mathbb{R}$
Für $f \in \mathrm{End}(V)$ sind äquivalent:

(1) f ist γ-selbstadjungiert.

(2) f ist diagonalisierbar, und es gibt es Basis aus Eigenvektoren von f, die γ-orthonormal ist.

Satz 35.60

Es sei (V, θ) ein endlich-dimensionaler unitärer Raum. $K = \mathbb{C}$
Für $f \in \mathrm{End}(V)$ sind äquivalent:

(1) f ist θ-normal.

(2) f ist diagonalisierbar, und es gibt es Basis aus Eigenvektoren von f, die θ-orthonormal ist.

Orthonormale Diagonalisierbarkeit

Ein Beispiel über $\mathbb{C}$

Untersuchen Sie, ob $x \mapsto \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}}^{A} x$ in $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2)$ bezüglich der Standardinnenprodukte selbstadjungiert, respektive normal, ist. Ist er orthogonal diagonalisierbar?

Selbstadjungiert, wenn $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} = \underbrace{I_2^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}^H I_2}_{= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}} = A^H \neq A$

Also nicht selbstadjungiert.

Aber normal, da $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} I_2^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} I_2 = I_2 = I_2^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$

Das wussten wir allerdings bereits vorher, denn A ist diagonal in der Standardbasis und diese ist orthonormal bzgl. des Standardinnenprodukts. Der Spektralsatz sagt Äquivalenz aus!

Siehe auch Quizfrage 35.3 $\rightsquigarrow$ D diagonal in $\mathbb{R}^{n \times n} \Rightarrow D = D^T = D^H$

D diagonal in $\mathbb{C}^{n \times n} \Rightarrow D = D^T \neq D^H$

Orthonormale Diagonalisierbarkeit

Erweiterung von Hausaufgabe II-13.2

Untersuchen Sie, ob $\overbrace{x \mapsto \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}}_{A}}^{f} x$ in $\operatorname{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ bzw. $\operatorname{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2)$ bezüglich der Standardinnenprodukte selbstadjungiert, respektive normal, ist. In welchen Fällen ist der Endomorphismus orthonormal diagonalisierbar?

Gesehen: In $\operatorname{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$: Nicht selbstadjungiert (A nicht symmetrisch)
Aber normal da $A I^{-1} A^T I = A^T A = \begin{bmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 13 \end{bmatrix} = A A^T = I^{-1} A^T I A$
Spektralsatz sagt Äquivalenz aller, also ist f nicht orthonormal diagonalisierbar.

In $\operatorname{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2)$? A reell! Also $A^H = A^T$ Der Check bleibt also gleich!
Damit ist f auch über $\mathbb{C}$ nur normal. Hier aber orthogonal diagonalisierbar! $\chi_A = (t-2)^2 + 9 = t^2 - 4t + 13 \rightsquigarrow$ $\lambda_1 = 2+3i$, $\lambda_2 = 2-3i$

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

automatisch orthonormal da Eigenräume 1-dimensional

$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$