Plenarübung LA II

(Inhalts)-Wochen 11/12

Link zu diesen Folien

Die Umfrageergebnisse

Zusammenfassung für G01Q02		
Was soll in der Plenarübung vorrangig behandelt werden?		
Antwort	**Anzahl**	**Brutto-Prozentsatz**
Wiederholung von Skriptinhalten Ansehen	3	16.67%
Erklärungen zu Skriptbeispielen Ansehen	0	0.00%
Lösungen der Hausaufgaben Ansehen	0	0.00%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	11	61.11%
Gesamt(Brutto)	**14**	**100.00%**

Zusammenfassung für G01Q01		
Welche Anmerkungen oder Fragen haben Sie zur Veranstaltung oder ihren Inhalten?		
Antwort	**Anzahl**	**Brutto-Prozentsatz**
Antwort Ansehen	5	27.78%
Keine Antwort	2	11.11%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	11	61.11%
Gesamt(Brutto)	**18**	**100.00%**

Interesse an:

(1) Lemma 34.16 (bereits ausgeführt)

(2) Wiederholung Bilinearformen/quadratische Formen

(3) Orthogonalität in quadratischen Räumen

(4) Visualisierung Innenprodukte

(5) Wiederholung Orthogonalität von Abbildungen Euklidischer Räume

Das heutige Programm

(1) Wochenübersicht 11
(2) Wiederholung quadratische Formen und der Fall $\mathrm{char}(K) = 2$
(3) Wiederholung Orthogonalität in quadratische Räumen und kleiner Vergleich (un-)endlichdimensionaler Fälle
(4) Miniquiz Normalformen von Bilinearformen
(5) „Nullteiler bei Orthogonalitätsbeziehungen“
(6) Innenprodukte, Winkel, Normen, Projektionen
(7) Visualisierung von Innenprodukten und Orthogonalität

(8) Wochenübersicht 12
(9) Wiederholung Homomorphismen Euklidischer Räume
(10) Beispiele zur Orthogonalität von linearen Abbildungen

Wochenübersicht Woche 11

Wiederholung quadratische Formen

Definition 32.1

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K.

(1) $q\colon V \to K$ heißt eine **quadratische Form** auf V, wenn gilt:

(i) $q(\alpha\, u) = \alpha^2 q(u)$ für alle $\alpha \in K$ und alle $v \in V$

(ii) $\Gamma\colon V \times V \ni (u, v) \mapsto q(u + v) - q(u) - q(v) \in K$ ist bilinear.

(2) Die Menge aller quadratischen Formen auf V bezeichnen wir mit $\mathrm{QF}(V)$.

Bilineare und Quadratische Formen, Polarisationsformel für $\mathrm{char}(K) \neq 2$

Eigenheiten im Fall $\mathrm{char}(K) = 2$

Lemma

Es V ein $\mathbb{Z}_2$-Vektorraum. Dann ist jede Linearform $f \in V^*$ eine quadratische Form.

Beweis:

Die Abbildung $q_\bullet : \gamma \mapsto q_\gamma$ ist i. A. weder injektiv noch surjektiv.

Wiederholung Orthogonalität

Definition 33.1

(1) Ist $\gamma \in \mathrm{Bil}_{\mathrm{sym}}(V, V)$ eine symmetrische Bilinearform auf V und q die zugehörige quadratische Form, dann heißt (V, γ) ein **quadratischer Raum über V**.

(2) Zwei Vektoren $u, v \in V$ heißen **orthogonal bzgl.** γ, wenn $\gamma(u, v) = 0$.

(3) Der Unterraum

$$E^{\perp} := \left\{ v \in V \,\middle|\, \gamma(u, v) = 0 \text{ für alle } u \in E \right\}$$

heißt das **orthogonale Komplement bzgl.** γ der Menge $E \subseteq V$.

(4) Es sei $(U_i)_{i \in I}$ eine nichtleere Familie von Unterräumen von V. Die Summe $\sum_{i \in I} U_i = \left\langle \bigcup_{i \in I} U_i \right\rangle$ dieser Familie heißt eine **orthogonale direkte Summe**, wenn die Summe direkt ist und $U_i \perp U_j$ gilt für alle $i, j \in I$ mit $i \neq j$. Wir schreiben dann auch $\bigoplus_{i \in I} U_i$.

Orthogonalität im Endlichdimensionalen

Es sei V ein endlichdimensionaler K Vektorraum, wobei $\operatorname{char} K \neq 2$. Dann gilt:

(1) $E^{\perp} = \langle E \rangle^{\perp}$

(2) Wenn $\gamma(v, v) \neq 0 \ \forall v \in V \setminus \{0\}$, dann ist für alle $E \subset V$

  (i) $E \cap E^{\perp} = \{0\} \cap E$

  (ii) $V = \langle E \rangle \bigoplus E^{\perp}$

  (iii) $\langle E \rangle = (E^{\perp})^{\perp}$

Orthogonalität im Unendlichdimensionalen

Es sei V ein *un*endlichdimensionaler K Vektorraum, wobei char $K \neq 2$.
Dann gilt weiterhin:

(1) $E^\perp = \langle E \rangle^\perp$

(2) Wenn $\gamma(v,v) \neq 0 \ \forall v \in V \setminus \{0\}$, dann ist für alle $E \subseteq V$:
$E \cap E^\perp = \{0\} \cap E$.

Aber:

Miniquiz Normalformen

Es sei V ein K Vektorraum. Für welche K sind die folgenden Darstellungsmatrizen für $\gamma \in \mathrm{Bil}_{\mathrm{sym}}(V, V; K)$ in Normalform?

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Orthogonalität liefert fast immer „Nullteiler“

Es sei (V, γ) ein quadratischer Raum über einem beliebigen Körper K. Dann gilt: $u \perp v$ ist genau dann äquivalent dazu, dass $u = 0$ oder $v = 0$, wenn $\gamma(u, u) \neq 0$ für alle $u \neq 0$ und $\dim(V) < 2$ ist.

Übersicht Innenprodukte, Winkel, Normen und Projektionen

Innenprodukt

$\gamma \in \mathsf{Bil}_{\mathsf{sym}}(V, V; \mathbb{R})$
positiv definit

Winkel

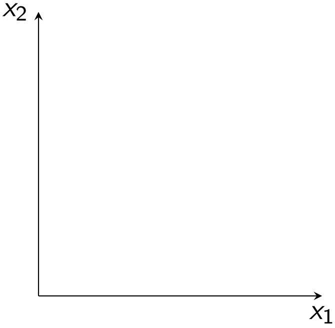
Norm

γ-Projektion

Orthogonalität in verschiedenen Innenprodukten 1

Aufgabe in $\mathbb{R}^2$

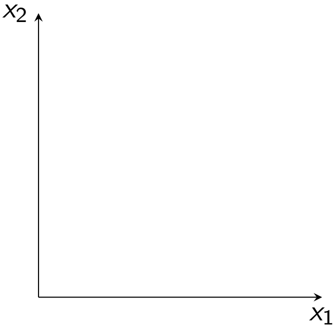
Bestimmen Sie alle Innenprodukte $\gamma_M(x, y) := x^\mathsf{T} M y$ mit symmetrischen Matrizen M, bezüglich derer $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ orthogonal sind.



Orthogonalität in verschiedenen Innenprodukten 2

Aufgabe in $\mathbb{R}^2$

Bestimmen Sie die orthogonale Projektion von $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ bezüglich $\gamma_M(x,y) := x^\mathsf{T} M y$ mit $M = \begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 4\end{bmatrix}$.



Frobenius-Innenprodukt (Beispiel)

Definition/Lemma

Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Auf $\mathbb{R}^{m \times n}$ ist

$$\gamma_{m,n}(A, B) := \mathrm{Spur}(A^{\mathsf{T}} B)$$

das sogenannte **Frobenius-Innenprodukt**.

Welche Form hat $\mathrm{proj}_{I_n}^{\gamma_{n,n}}(A)$ für $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

Wochenübersicht Woche 12

Homomorphismen Euklidischer Räume / Orthogonalität

Definition 34.20 und Satz 34.21

Es seien (V, γ_1) und (W, γ_2) zwei Euklidische Räume. $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ heißt **(γ_1, γ_2)-orthogonal**, wenn eine/alle der äquiv. Bedingungen gilt:

(1) $\gamma_2(f(u), f(v)) = \gamma_1(u, v) \quad$ für alle $u, v \in V$

(2) $\|f(v)\|_{\gamma_2} = \|v\|_{\gamma_1}$ für alle $v \in V$.

(3) $\|f(v_1) - f(v_2)\|_{\gamma_2} = \|v_1 - v_2\|_{\gamma_1}$ für alle $v_1, v_2 \in V$.

(4) Ist $(v_i)_{i \in I}$ eine orthonormale Familie in (V, γ_1), dann ist auch $(f(v_i))_{i \in I}$ eine orthonormale Familie in (W, γ_2).

(5) Ist v ein Einheitsvektor in (V, γ_1), dann ist $f(v)$ ein Einheitsvektor in (W, γ_2).

Beispiele zur Orthogonalität

(1) In $(\mathbb{R}_3[t], \gamma)$ ist die Abbildung $p \mapsto p'$

(2) In $(\mathbb{R}^{m \times n}, \gamma_{m,n})$ ist die Abbildung $A \mapsto A^\mathsf{T}$

(3) In $(\mathbb{R}[t], (p, q) \mapsto \int_0^1 \widetilde{p}(t)\widetilde{q}(t)dt)$ ist $p \mapsto t \cdot p$

Zusammenspiel von γ_1, γ_2 und f.

Gesehen:

Für Euklidischen Raum (V, γ_1), $\alpha \neq 0$ und $f_\alpha(v) := \alpha v$ gibt es ein Innenprodukt γ_2, so dass f_α ein (γ_1, γ_2)-orthog. Endomorphismus ist.

Geht das auch allgemeiner?