Plenarübung LA II

(Inhalts)-Wochen 11/12

Link zu diesen Folien

Die Umfrageergebnisse

Zusammenfassung für G01Q02		
Was soll in der Plenarübung vorrangig behandelt werden?		
Antwort	**Anzahl**	**Brutto-Prozentsatz**
Wiederholung von Skriptinhalten Ansehen	3	16.67%
Erklärungen zu Skriptbeispielen Ansehen	0	0.00%
Lösungen der Hausaufgaben Ansehen	0	0.00%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	11	61.11%
Gesamt(Brutto)	**14**	**100.00%**

Zusammenfassung für G01Q01		
Welche Anmerkungen oder Fragen haben Sie zur Veranstaltung oder ihren Inhalten?		
Antwort	**Anzahl**	**Brutto-Prozentsatz**
Antwort Ansehen	5	27.78%
Keine Antwort	2	11.11%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	11	61.11%
Gesamt(Brutto)	**18**	**100.00%**

Interesse an:

(1) Lemma 34.16 (bereits ausgeführt) ✓

(2) Wiederholung Bilinearformen/quadratische Formen

(3) Orthogonalität in quadratischen Räumen

(4) Visualisierung Innenprodukte

(5) Wiederholung Orthogonalität von Abbildungen Euklidischer Räume

Das heutige Programm

(1) Wochenübersicht 11
(2) Wiederholung quadratische Formen und der Fall $\mathrm{char}(K) = 2$
(3) Wiederholung Orthogonalität in quadratische Räumen und kleiner Vergleich (un-)endlichdimensionaler Fälle
(4) Miniquiz Normalformen von Bilinearformen
(5) „Nullteiler bei Orthogonalitätsbeziehungen"
(6) Innenprodukte, Winkel, Normen, Projektionen
(7) Visualisierung von Innenprodukten und Orthogonalität

(8) Wochenübersicht 12
(9) Wiederholung Homomorphismen Euklidischer Räume
(10) Beispiele zur Orthogonalität von linearen Abbildungen

Wochenübersicht Woche 11

Bilinearformen $Bil(V,V;K)$

Rang, Dualität

Darstellung / Transformieren

induziert →

Quadratische Formen

$char(K) \neq 2$ $QF(V)$

VR-Isomorph zu $Bilsym(V,V;K)$

← Induziert (eingeschränkt)

Ordnung!

Euklidische Räume

$(K = \mathbb{R})$ (V, γ)

Definitheit

$\gamma(u,u) > 0$

< 0

Orth ⇒ Lin Unabhängigkeit

Cauchy-Schwarz-Ungl.

Innenprod. induziert Norm

Normiertheit

Orth.-Projektionen

Gram-Schmidt

nicht alle

geht

allgemeiner

spezialisieren

Quadratische Räume

$(V, \gamma) \in Bilsym$

→ Orthogonalität

Orthogonales Komplement

Satz von Pythagoras

Orthogonalbasen

direkte orth. Summe

Homomorphismen $\boxed{NF}$

Normalformen

$char(K) \neq 2$

⇒ Diagonalform möglich

$K = \mathbb{R}$: Diagonale mit ± 1 bzw 0

"Signatur" Sylvester $\begin{bmatrix} I & & \\ & -I & \\ & & 0 \end{bmatrix}$

$K = \mathbb{C}$: Diagonaleinträge $1, 0$

$\begin{bmatrix} I & \\ & 0 \end{bmatrix}$

Wiederholung quadratische Formen

Definition 32.1

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K.

(1) $q\colon V \to K$ heißt eine **quadratische Form** auf V, wenn gilt:

  (i) $q(\alpha\, u) = \alpha^2 q(u)$ für alle $\alpha \in K$ und alle $v \in V$

  (ii) $\Gamma\colon V \times V \ni (u,v) \mapsto q(u+v) - q(u) - q(v) \in K$ ist bilinear. (und symmetr.)

(2) Die Menge aller quadratischen Formen auf V bezeichnen wir mit $\mathrm{QF}(V)$.

Bilineare und Quadratische Formen, Polarisationsformel für $\mathrm{char}(K) \neq 2$

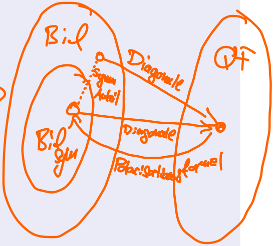
$\gamma \in \mathrm{Bil}(V,V;K) \Rightarrow \gamma(\alpha u, \alpha u) = \alpha^2 \gamma(u,u)$ und

$$\gamma(u+v,u+v) = \gamma(u,u) + \underbrace{\gamma(u,v) + \gamma(v,u)}_{\in \mathrm{Bil}_{sym}(V,V;K)} + \gamma(v,v)$$

$$= \frac{\gamma+\gamma^*}{2}(u,u) + 2\,\frac{\gamma+\gamma^*}{2}(u,v) + \frac{\gamma+\gamma^*}{2}(v,v)$$

$$= \frac{\gamma+\gamma^*}{2}(u+v,u+v)$$

$\Rightarrow$



Eigenheiten im Fall char$(K) = 2$ $\leftarrow$ $2=0$, also ex. $\frac{1}{2}$ nicht.

Lemma

Es V ein $\mathbb{Z}_2$-Vektorraum. Dann ist jede Linearform $f \in V^*$ eine quadratische Form.

Beweis: $f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha^2 f(v)$ da $\alpha = 0$ oder $\alpha = 1$

$$f(u+v) - f(u) - f(v) = f(u) + f(v) - f(u) - f(v) = 0 \leftarrow \in \mathbb{Z}_2$$

und $0 \in$ Bilfgen

Die Abbildung $q_\bullet : \gamma \mapsto q_\gamma$ ist i. A. weder injektiv noch surjektiv.

Sei K mit $\mathrm{char}(K) = 2$, $V = K^2$: $\gamma(u,v) := (u_1\ u_2)\begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \gamma(u,u) = a u_1^2 + \underbrace{c u_1 u_2 + c u_2 u_1}_{2c u_1 u_2} + b u_2^2 = a u_1^2 + b u_2^2$$

Jede symm. bil. Form hat keine Mischterme! Nicht injektiv da $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ induziert $0 \in QF$

Nicht surjektiv, da $u \mapsto (u_1\ u_2)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in QF$ wird nicht induziert!

Wiederholung Orthogonalität

Definition 33.1

(1) Ist $\gamma \in \mathrm{Bil}_{\mathrm{sym}}(V, V)$ eine symmetrische Bilinearform auf V und q die zugehörige quadratische Form, dann heißt (V, γ) ein **quadratischer Raum über V**. γ ist zentral, q_γ nur ein Nebenprodukt

(2) Zwei Vektoren $u, v \in V$ heißen **orthogonal bzgl. γ**, wenn $\gamma(u, v) = 0$.

Symmetrie entscheidend $\quad u \perp v \Leftrightarrow v \perp u$

(3) Der Unterraum

$$E^{\perp} := \{ v \in V \mid \gamma(u, v) = 0 \text{ für alle } u \in E \}$$

heißt das **orthogonale Komplement bzgl. γ** der Menge $E \subseteq V$.

(4) Es sei $(U_i)_{i \in I}$ eine nichtleere Familie von Unterräumen von V. Die Summe $\sum_{i \in I} U_i = \left\langle \bigcup_{i \in I} U_i \right\rangle$ dieser Familie heißt eine **orthogonale direkte Summe**, wenn die Summe direkt ist und $U_i \perp U_j$ gilt für alle $i, j \in I$ mit $i \neq j$. Wir schreiben dann auch $\bigoplus_{i \in I} U_i$.

Orthogonalität im Endlichdimensionalen

Es sei V ein endlichdimensionaler K Vektorraum, wobei $\operatorname{char} K \neq 2$. Dann gilt:

(1) $E^\perp = \langle E \rangle^\perp$ „$\supseteq$" klar

Da $\langle E\rangle = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \mid v_i \in E, n \in \mathbb{N}, \alpha_i \in K\}$ und $\gamma(\sum \alpha_i v_i, v) = \sum \alpha_i \underbrace{\gamma(v_i, v)}_{=0}$ ($v_i \in E$, $v \in E^\perp$)

(2) Wenn $\gamma(v, v) \neq 0\ \forall v \in V \setminus \{0\}$, dann ist für alle $E \subset V$

(i) $E \cap E^\perp = \{0\} \cap E$

„$\supseteq$" $\{0\} \in E^\perp$ „$\subseteq$" $v \in E \wedge v \in E^\perp$ $\quad 0 = \gamma(v, v)$ ($v \in E$, $v \in E^\perp$) $\Rightarrow v = 0$ wegen blau

(ii) $V = \langle E \rangle \bigoplus E^\perp$ ← Ausgezeichnete komplementärer UR

$\langle E\rangle \cap E^\perp = \{0\}$ wegen (i) und (1), Erzeugung fehlt. Die folgt mithilfe von $\operatorname{proj}^\gamma_{\langle E\rangle}$

$v = \underbrace{v - \operatorname{proj}(v)}_{\in E^\perp} + \underbrace{\operatorname{proj}(v)}_{\in\langle E\rangle}$

(iii) $\langle E \rangle = (E^\perp)^\perp$

„$\subseteq$" nach Definition, „$\supseteq$" wegen (ii)

Orthogonalität im Unendlichdimensionalen

Es sei V ein *unendlichdimensionaler* K Vektorraum, wobei char $K \neq 2$. Dann gilt weiterhin:

(1) $E^\perp = \langle E \rangle^\perp$ Alle Summen weiterhin endlich

(2) Wenn $\gamma(v,v) \neq 0 \ \forall v \in V \setminus \{0\}$, dann ist für alle $E \subseteq V$: $E \cap E^\perp = \{0\} \cap E$. Beweis analog

Aber: Die Erzeugendeneigenschaft von $\langle E \rangle$ und $E^\perp$ kann verloren gehen

Bspl.: $\left(\mathbb{R}[t], (p,q) \longmapsto \int_0^1 \tilde{p}\tilde{q}(t)\,dt\right)$. Für $E = \{p \mid p(0) = 0\}$ ← $q_0 = 0$ ← Echter Unterraum

Dann ist $E^\perp = \{0\}$. Beweis: Sei $q \in E^\perp \Rightarrow t \cdot q \in E$ ← Rechtsshift

$\Rightarrow 0 = (q, tq) = \int_0^1 \underbrace{t}_{\geq 0}\underbrace{q^2}_{\geq 0}\,dt \Rightarrow t\,q^2(t) = 0 \ \forall t \in [0,1] \Rightarrow q = 0$

Offensichtlich: $E + E^\perp = E \neq \mathbb{R}[t]$

Und: $(E^\perp)^\perp = \mathbb{R}[t] \neq E$

Miniquiz Normalformen

Es sei V ein K Vektorraum. Für welche K sind die folgenden Darstellungsmatrizen für $\gamma \in \mathrm{Bil}_{\mathrm{sym}}(V, V; K)$ in Normalform?

Ja beliebiges K außer R und C

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Ja für beliebiges K

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ja für alle außer C

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}
\qquad
\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}
\qquad
\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

FNF von Endo — JNF von Endo — Nil

Nein. Nicht mal symmetrisch. NF von Endomorphismen haben hier nichts zu sagen.

Orthogonalität liefert fast immer „Nullteiler"

Es sei (V, γ) ein quadratischer Raum über einem beliebigen Körper K. Dann gilt: $u \perp v$ ist genau dann äquivalent dazu, dass $u = 0$ oder $v = 0$, wenn $\gamma(u, u) \neq 0$ für alle $u \neq 0$ und $\dim(V) \leqslant 2$ ist.

Beweis: „$\Leftarrow$" $\dim(V) = 0 \Rightarrow$ es gibt nur den Nullvektor

$\dim(V) = 1 \Rightarrow$ es gibt $v \neq 0 : V = \langle v \rangle$.

$$\gamma(\alpha v, \beta v) = \alpha\beta \underbrace{\gamma(v,v)}_{\neq 0} = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \vee \beta = 0$$

„$\Rightarrow$" Durch Kontraposition. $\neg(\gamma(u,u) \neq 0 \ \forall u \neq 0 \wedge \dim(V) < 2)$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\exists u \neq 0 \ \gamma(u,u) \neq 0}_{\text{klar}} \vee \dim(V) \geq 2$$

$\dim(V) \geq 2$ dann $\gamma(u,u) \neq 0 \ \forall u \neq 0$, denn $\exists$ lin. unab. u_1, u_2 und

$\underbrace{u_2 - \mathrm{proj}^{\gamma}_{\langle u_1 \rangle}(u_2)}_{\neq 0 \text{ wegen Lin. unab.}} \perp \underset{\neq 0}{u_1}$. $\square$

Übersicht Innenprodukte, Winkel, Normen und Projektionen

Innenprodukt

$\gamma \in \mathrm{Bil}_{\mathrm{sym}}(V, V; \mathbb{R})$ ← Geordneter Körper

positiv definit ← $\gamma(u,u) > 0 \;\; \forall u \neq 0$

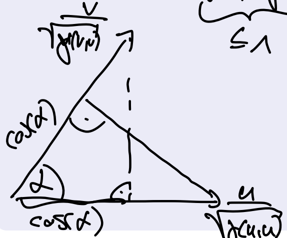
Cauchy-Schwarz

$\gamma(u,v) \leq |\gamma(u,v)| \leq \sqrt{\gamma(u,u)}\sqrt{\gamma(v,v)}$

pos def + Wurzel induziert

Winkel

$$\alpha(\underbrace{u,v}_{\neq 0}) := \arccos\left(\underbrace{\frac{\gamma(u,v)}{\sqrt{\gamma(u,u)}\sqrt{\gamma(v,v)}}}_{\leq 1}\right)$$



Norm

$\|\cdot\|_\gamma := \sqrt{\gamma(\cdot,\cdot)}$

Anhand der Parallelogrammgleichung kann entschieden werden, ob Norm von IP induziert ist.

I.A. nicht $\|\cdot\|_\infty$

γ-Projektion

$U = \langle \underbrace{u_1, \ldots, u_k}_{\text{orth.}} \rangle$

$\Rightarrow \mathrm{proj}_U^\gamma = \sum_{i=1}^{k} \frac{\gamma(\cdot, u_i)}{\gamma(u_i, u_i)} u_i$

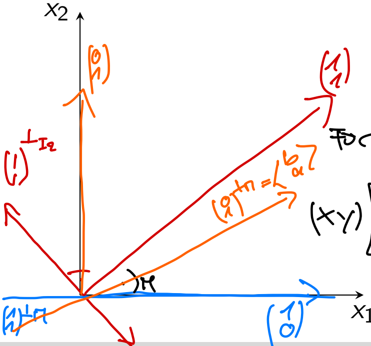
Aufgabe in $\mathbb{R}^2$

Bestimmen Sie alle Innenprodukte $\gamma_M(x, y) := x^\mathsf{T} M y$ mit symmetrischen Matrizen M, bezüglich derer $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ orthogonal sind.

$$0 \overset{!}{=} (1,1)\begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = a + c \Rightarrow c = -a$$

$$\leadsto M = \begin{bmatrix} a & -a \\ -a & b \end{bmatrix}$$

(Darstellung einer) Symmetrischen Bilinearform $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ orthogonal



Für Innenprodukteigenschaft fehlt pos. def., also positivität

$$(x\,y)\begin{bmatrix} a & -a \\ -a & b \end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = ax^2 - 2axy + by^2$$

$\cancel{x=1, y=0} \Rightarrow a > 0$

$\cancel{y=1, x=0} \Rightarrow b > 0$

$x=y=1 \Rightarrow b > a$

Folg. dann $\Rightarrow a\left(x^2 - 2xy + \frac{b}{a}y^2\right) > 0$

Orthogonalität in verschiedenen Innenprodukten 2

Aufgabe

Bestimmen Sie die orthogonale Projektion von $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ auf $\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\rangle$ bezüglich

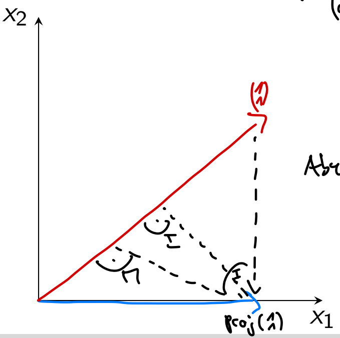
$\gamma_M(x,y) := x^{\mathsf T} M y$ mit $M = \begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 4\end{bmatrix}$. Warum 0 statt ~~2~~?

$$\mathrm{proj}^{\gamma_M}_{\binom{1}{0}}\binom{1}{1} = \frac{(1\ 1)\begin{bmatrix}2&0\\0&4\end{bmatrix}\binom{1}{0}}{(1\ 0)\begin{bmatrix}2&0\\0&4\end{bmatrix}\binom{1}{0}}\binom{1}{0} = \frac{2}{2}\binom{1}{0} = \binom{1}{0}$$

$$= \mathrm{proj}^{\gamma_I}_{\binom{1}{0}}\binom{1}{1}$$

Aber $$\mathrm{proj}^{\gamma_M}_{\binom{1}{1}}\binom{1}{0} = \frac{(1\ 0)\begin{bmatrix}2&0\\0&4\end{bmatrix}\binom{1}{1}}{(1\ 1)\begin{bmatrix}2&0\\0&4\end{bmatrix}\binom{1}{1}}\binom{1}{1} = \frac{2}{6}\binom{1}{1} = \frac{1}{3}\binom{1}{1}$$

$$\neq \frac{1}{2}\binom{1}{1}$$



Frobenius-Innenprodukt (Beispiel)

Definition/Lemma

Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Auf $\mathbb{R}^{m\times n}$ ist

Symmetrie: $\mathrm{Spur}(A^T B) = \mathrm{Spur}((A^T B)^T) = \mathrm{Spur}(B^T A)$ ✓

$$\gamma_{m,n}(A, B) := \mathrm{Spur}(A^\mathsf{T} B)$$

Bilin. ✓

pos def: $\mathrm{Spur}(A^T B) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$
$\Rightarrow \mathrm{Spur}(A^T A) = \sum\sum a_{ij}^2$ ✓

$\hat{=}$ γ_I für $\mathbb{R}^{mn}$ und Vektorisierung von A, B

das sogenannte **Frobenius-Innenprodukt**.

Welche Form hat $\mathrm{proj}_{I_n}^{\gamma_{n,n}}(A)$ für $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$?

$$\frac{\mathrm{Spur}(I^T A)}{\mathrm{Spur}(A^T A)} I = \frac{\mathrm{Spur}(A)}{\mathrm{Spur}(A^T A)} I = \frac{\sum a_{ii}}{\underbrace{\sum\sum a_{ij}^2}} I$$

Skalierte Spur auf die Diagonale

Wochenübersicht Woche 12

quadratische Räume
(V,γ) über K
Homom.

$K=\mathbb{R}$
γ posdef
Spezialfall

Euklidische Räume
(V,γ) — Innenprodukt
Homomorphismen

induziert

Riesz-Abbildung
$\Gamma: V \to V^*$
$v \to \gamma(\cdot, v)$

ermöglicht

sind

"orthogonale Abbildungen"
"bzw. Isometrien"
$\Rightarrow$ injektiv
$\Leftrightarrow$ Längenerhaltung
$\Leftrightarrow$ Abstandserhaltung
$\Rightarrow$ EW $\in \{\pm 1\}$

bilden

gehören zu

Adjungierte Abbildung
$f^{\circ}: W \to V$ wenn $f: V \to W$
"Innenproduktabhängige
primale Darstellung
der dualen Abbildung"

Orthogonale Gruppe
$\{f \in \mathrm{Aut}(G) \mid f \text{ orthogonal}\} = O(V,\gamma)$
$\{f \in O(V,\gamma) \mid \det(f) = 1\} = SO(V,\gamma)$

$\mathrm{Bild}(f^{\circ}) = \mathrm{Ker}(f)^{\perp}$ in V
$\mathrm{Bild}(f^{\circ})^{\perp} = \mathrm{Ker}(f)$ in W
...