Plenarübung LA II

(Inhalts)-Woche 10

Link zu diesen Folien

Die Umfrageergebnisse

Zusammenfassung für G01Q02

Was soll in der Plenarübung vorrangig behandelt werden?

Antwort	Anzahl	Brutto-Prozentsatz
Wiederholung von Skriptinhalten Ansehen	11	45.83%
Erklärungen zu Skriptbeispielen Ansehen	1	4.17%
Lösungen der Hausaufgaben Ansehen	2	8.33%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	10	41.67%
Gesamt(Brutto)	**24**	**100.00%**

Zusammenfassung für G01Q01

Welche Anmerkungen oder Fragen haben Sie zur Veranstaltung oder ihren Inhalten?

Antwort	Anzahl	Brutto-Prozentsatz
Antwort Ansehen	7	29.17%
Keine Antwort	7	29.17%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	10	41.67%
Gesamt(Brutto)	**24**	**100.00%**

Interesse an:

(1) Basics zur JNF
(2) Sättigung von Kernen (Lemma 30.2)
(3) Visualisierung zu den Normalformen
(4) Bestimmung passender Transformationsmatrizen (zur JNF Beispiel 30.9)
(5) Identifikationen, Darstellung und Dualität bei Bilinearformen

Das heutige Programm

(1) Wochenüberblick
(2) Wiederholung Hauptvektoren, Jordannormalform
(3) Übersicht und Vergleich der Normalformen
(4) Visualisierung von Normalformen
(5) Bestimmung von Transformationsmatrizen
(6) Übersicht Identifikation, Darstellung und Dualität bei Bilinearformen

Wochenübersicht

Wiederholung verallgemeinerter Eigenprobleme

Definition 30.1

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

(1) Ein Vektor $x \in K^n \setminus \{0\}$ heißt ein **verallgemeinerter Eigenvektor** oder **Hauptvektor** zum **Eigenwert** $\lambda \in K$ **der Matrix** A, wenn

$$(\lambda I - A)^k x = 0$$

für ein $k \in \mathbb{N}$ gilt. Wir sprechen von einem verallgemeinerten Eigenvektor der **Stufe** $k \in \mathbb{N}$, wenn

$$x \in \operatorname{Kern}\big((\lambda I - A)^k\big) \setminus \operatorname{Kern}\big((\lambda I - A)^{k-1}\big)$$

gilt.

(2) $\operatorname{GEig}(A, \lambda) := \big\{x \in K^n \,\big|\, (\lambda I - A)^k x = 0 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}\big\}$ heißt der **verallgemeinerte Eigenraum** zu $\lambda \in K$.

Sättigung der Kerne

Lemma 30.2

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$\operatorname{Kern}(A^n) = \operatorname{Kern}(A^{n+j}) \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N}_0.$$

Satz 30.7 (Version für Matrizen)

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Wenn χ_A in Linearfaktoren zerfällt, dann ist A ähnlich zu einer Blockdiagonal-Matrix

$$\begin{bmatrix} J_{r_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{r_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{r_k}(\lambda_k) \end{bmatrix}$$

aus $r \times r$ **Jordan-Blöcken** $J_r(\lambda) := \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \in K^{r \times r}$.

Warmup zur Jordan-Normform

Welche der folgenden Matrizen sind in Jordan-Normalform?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aus der JNF ablesbare Informationen

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccc|ccc|c|c}
\lambda_1 & 1 & & & & & & & & & & & \\
& \lambda_1 & 1 & & & & & & & & & & \\
& & \lambda_1 & 1 & & & & & & & & & \\
& & & \lambda_1 & 1 & & & & & & & & \\
& & & & \lambda_1 & & & & & & & & \\
\hline
& & & & & \lambda_1 & 1 & & & & & & \\
& & & & & & \lambda_1 & 1 & & & & & \\
& & & & & & & \lambda_1 & & & & & \\
\hline
& & & & & & & & \lambda_2 & 1 & & & \\
& & & & & & & & & \lambda_2 & 1 & & \\
& & & & & & & & & & \lambda_2 & & \\
\hline
& & & & & & & & & & & \lambda_2 & \\
\hline
& & & & & & & & & & & & \lambda_2
\end{array}\right]$$

Übersicht Normalformen

Diagonalform

Jordan-NF

Frobenius-NF

Übereinstimmung der Normalformen

DF = JNF

Die DF und die JNF von A stimmen genau dann überein, wenn

DF = FNF

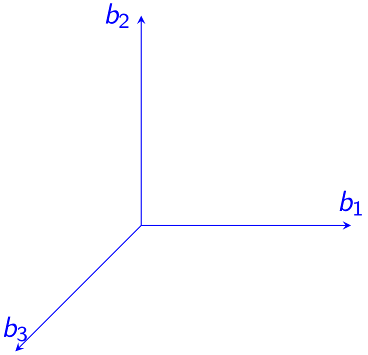
Die DF und die FNF von A stimmen genau dann überein, wenn

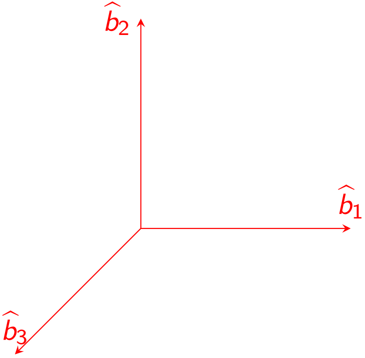
JNF = FNF

Die JNF und die FNF von A stimmen genau dann überein, wenn

Visualisierung von Normalformen 1: Basiswechsel

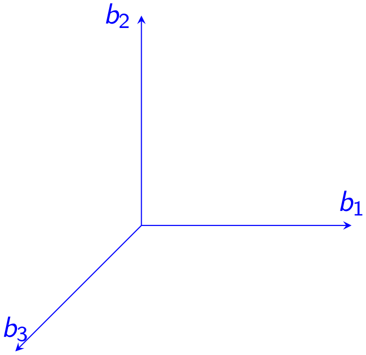
Wie arbeitet $\mathcal{T}_{\widehat{B}}^{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ -0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = {\mathcal{T}_{B}^{\widehat{B}}}^{-1}$?

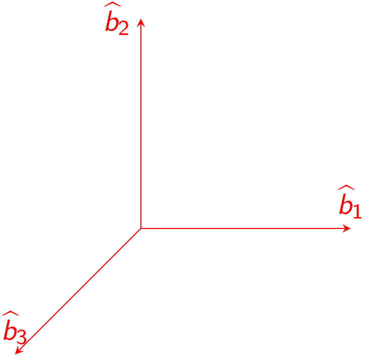




Visualisierung von Normalformen 2: Diagonalform

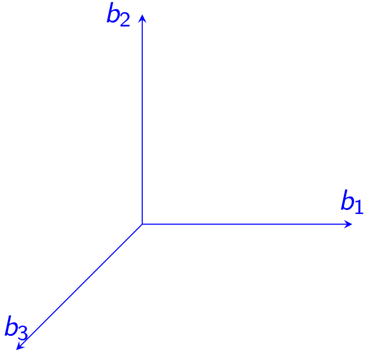
Wie arbeitet $\mathcal{M}_B^B(f) = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \mathcal{T}_B^{\widehat{B}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \mathcal{T}_{\widehat{B}}^B = \mathcal{T}_B^{\widehat{B}} \mathcal{M}_{\widehat{B}}^{\widehat{B}}(f) \mathcal{T}_{\widehat{B}}^B$?





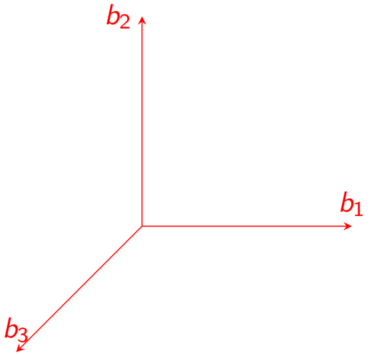
Visualisierung von Normalformen 3: Jordan-Normalform

Wie arbeitet $\mathcal{M}_B^B(f) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$?



Visualisierung von Normalformen 4: Frobenius-Normalform

Wie arbeitet $\mathcal{M}_{\widehat{B}}^{\widehat{B}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 32 \\ 1 & 0 & -32 \\ 0 & 1 & 10 \end{bmatrix}$?



Transformationsmatrizen bestimmen (Beispiel 30.9 (*ii*))

Bestimmen Sie die JNF und dazugehörige Transformationsmatrizen von der Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$

Transformationsmatrizen bestimmen (Beispiel 30.9 (*ii*)) (2)

Bestimmen Sie die JNF und dazugehörige Transformationsmatrizen von der Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$

Transformationsmatrizen bestimmen (Beispiel 30.9 (*ii*))

Bestimmen Sie die FNF und dazugehörige Transformationsmatrizen von der Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$

Transformationen zwischen JNF und FNF

Die Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ ist also ähnlich zu ihrer JNF (J) und ihrer FNF (F). Also sind J und F auch ähnlich und es gilt:

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

und

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

Algorithmus (Bestimmung von JNF-Transformationsmatrizen i. A.)

Eingabe: Matrix $A \in K^{n \times n}$, $n \in \mathbb{N}$ mit zerfallendem χ_A
Ausgabe: $J, T \in K^{n \times n}$ mit $A = TJT^{-1}$

Setze $B_J = \emptyset$
for **do**
    while **do**
        for $x \in$ **do**
            Erweiter B_J um
        end for
    end while
    Schreibe B_J spaltenweise in T.
end for

Wiederholung Bilinearformen

Wiederholung Bilinearform

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K.

Eine Abbildung $\gamma\colon V \times V \to K$ heißt eine **Bilinearform** auf $V \times V$, wenn für jedes feste $\overline{u} \in V$ und jedes feste $\overline{v} \in V$ die Abbildungen

$$\gamma(\overline{u}, \cdot)\colon V \ni v \mapsto \gamma(\overline{u}, v) \in K$$
$$\gamma(\cdot, \overline{v})\colon V \ni u \mapsto \gamma(u, \overline{v}) \in K$$

beide linear sind.

Identifikationen, Darstellungen und Dualität