Plenarübung LA II

(Inhalts)-Woche 10

Link zu diesen Folien

Die Umfrageergebnisse

Zusammenfassung für G01Q02		
Was soll in der Plenarübung vorrangig behandelt werden?		
Antwort	**Anzahl**	**Brutto-Prozentsatz**
Wiederholung von Skriptinhalten Ansehen	11	45.83%
Erklärungen zu Skriptbeispielen Ansehen	1	4.17%
Lösungen der Hausaufgaben Ansehen	2	8.33%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	10	41.67%
Gesamt(Brutto)	**24**	**100.00%**

Zusammenfassung für G01Q01		
Welche Anmerkungen oder Fragen haben Sie zur Veranstaltung oder ihren Inhalten?		
Antwort	**Anzahl**	**Brutto-Prozentsatz**
Antwort Ansehen	7	29.17%
Keine Antwort	7	29.17%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	10	41.67%
Gesamt(Brutto)	**24**	**100.00%**

Interesse an:

(1) Basics zur JNF
(2) Sättigung von Kernen (Lemma 30.2)
(3) Visualisierung zu den Normalformen
(4) Bestimmung passender Transformationsmatrizen (zur JNF Beispiel 30.9)
(5) Identifikationen, Darstellung und Dualität bei Bilinearformen

Das heutige Programm

(1) Wochenüberblick
(2) Wiederholung Hauptvektoren, Jordannormalform
(3) Übersicht und Vergleich der Normalformen
(4) Visualisierung von Normalformen
(5) Bestimmung von Transformationsmatrizen
(6) Übersicht Identifikation, Darstellung und Dualität bei Bilinearformen

Wochenübersicht

$f \in \mathrm{End}(V)$
Darstellungsmatrizen

Eigenwerte/-vektoren

Diagonalformen
(nicht immer möglich)

höhere Stufen

Verallgemeinerte Eigenvektoren
= Hauptvektoren
Verallgemeinerten Eigenräume

Vereinig. alle verallgem. EV

Jordan-Normalform
- Jordanblöcke
- Jordanketten

Bilinearformen
- (Schief)symmetrie
- Darstellungsmatrizen
- Kongruenztrafos
- Rang ...

Min/char Pol
Algebren
Cayley-Hamilton
Zyklische Räume

Frobeniusnormalform

Wiederholung verallgemeinerter Eigenprobleme

Definition 30.1

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

(1) Ein Vektor $x \in K^n \setminus \{0\}$ heißt ein **verallgemeinerter Eigenvektor** oder **Hauptvektor** zum **Eigenwert** $\lambda \in K$ **der Matrix** A, wenn

$$x \in \operatorname{Kern}(\lambda I - A)^k \Leftrightarrow (\lambda I - A)^k x = 0 \Leftrightarrow (\lambda I - A)\underbrace{(\lambda I - A)^{k-1} x}_{\in \operatorname{Eig}(A,\lambda)} = 0$$

für ein $k \in \mathbb{N}$ gilt. Wir sprechen von einem verallgemeinerten Eigenvektor der **Stufe** $k \in \mathbb{N}$, wenn

$$x \in \underbrace{\operatorname{Kern}\big((\lambda I - A)^k\big)}_{} \setminus \operatorname{Kern}\big((\lambda I - A)^{k-1}\big)$$

werden z.T. auch als verallgemeinerte EV bezeichnet "Bis Stufe k"

gilt. $\{0\} \subseteq \operatorname{Kern}(\lambda I - A) \subseteq \ldots \subseteq \operatorname{Kern}(\lambda I - A)^k \subseteq \ldots$

(2) $\operatorname{GEig}(A, \lambda) := \big\{x \in K^n \,\big|\, (\lambda I - A)^k x = 0 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}\big\}$ heißt der **verallgemeinerte Eigenraum** zu $\lambda \in K$.

verallgemeinerte EV jede Stufe $= \operatorname{Kern}(\lambda I - A)^n \leftarrow$ Raumreduktion

Lemma 30.2

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$\mathrm{Kern}(A^n) = \mathrm{Kern}(A^{n+j}) \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N}_0.$$

<u>Beweis</u>: „$\subseteq$" klar, da $A0=0$. „$\supseteq$" Haben wir in HA 12.1-a) gezeigt, denn

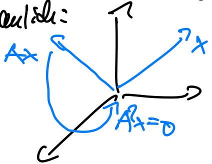
ist $A^{k-1}x \neq 0$, $A^k x = 0$, dann sind $\{x, Ax, \dots, A^{k-1}x\}$ lin. unabhängig.

Denn falls $\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i A^i x = 0 \Rightarrow 0 = A^{k-1}\left(\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i A^i x\right) = \alpha_0 x \Rightarrow \alpha_0 = 0$

... sukzessive $\alpha_i = 0 \ \forall i = 0 \dots k-1 \overset{\text{Dim}=n}{\Rightarrow} A^n x = 0$ oder $A^{n+j}x \neq 0 \ \forall j \in \mathbb{N}$

weil sonst $n+1$ lin. unabh. Vektoren in K^n existieren würden ↯ $\square$

Anschaulich:



x fehlen k A-Potenzen zur 0

Ax -"- $k-1$ A-Potenzen ...

⋮

Hier kann keine Redundanz erzeugt werden.

Wiederholung Jordan-Normalform

Satz 30.7 (Version für Matrizen)

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Wenn χ_A in Linearfaktoren zerfällt, dann ist A ähnlich zu einer Blockdiagonal-Matrix

$$\begin{bmatrix} J_{r_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{r_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{r_k}(\lambda_k) \end{bmatrix}$$

$r_1 \times r_1$

Eindeutig bestimmt bis auf Reihenfolge der Blöcke

aus $r \times r$ **Jordan-Blöcken** $J_r(\lambda) :=$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \in K^{r \times r}.$$

$J_r(\lambda) - \lambda I_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$

Warmup zur Jordan-Normform

Welche der folgenden Matrizen sind in Jordan-Normalform?

Nein, Nebendiagonaleintrag koppelt die falschen Werte

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ja, EW 0, 1

$\mu_{alg} = \mu_{geo} = 4$

$\mu_{alg} = 4$

$\mu_{geo} = 2$

Nein → Nicht-Null-Eintrag auf Subdiagonalen

Fast JNF, nur die Reihenfolge der Basisvektoren pro Block falsch herum

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ja

Aus der JNF ablesbare Informationen

Stufe 3

vEV (Stufe 2)

EV (Stufe 1)

Anzahl der Blöcke min 3×3 für alle λ

siehe 16

Stufe 4 Stufe 5

Größte Block 5×5

$$
\left[\begin{array}{ccccc|ccc|ccc|c|c}
\lambda_1 & 1 & & & & & & & & & & & \\
 & \lambda_1 & 1 & & & & & & & & & & \\
 & & \lambda_1 & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & \lambda_1 & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & \lambda_1 & & & & & & & & \\
\hline
 & & & & & \lambda_1 & 1 & & & & & & \\
 & & & & & & \lambda_1 & 1 & & & & & \\
 & & & & & & & \lambda_1 & & & & & \\
\hline
 & & & & & & & & \lambda_2 & 1 & & & \\
 & & & & & & & & & \lambda_2 & 1 & & \\
 & & & & & & & & & & \lambda_2 & & \\
\hline
 & & & & & & & & & & & \lambda_2 & \\
\hline
 & & & & & & & & & & & & \lambda_2
\end{array}\right]
$$

$\mu_A = (t-\lambda)^5$ für $\lambda_1 = \lambda_2$

$\mu_A = (t-\lambda_1)^5 (t-\lambda_2)^3$

Größter Block 3×3

8 5

char/min.-Pol zerfallen, $\chi_A = (t-\lambda_1)^8 (t-\lambda_2)^5$

Jeder Block entspricht einer Jordankette

Übersicht Normalformen

Diagonalform

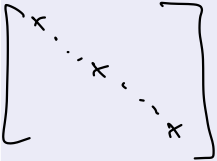
Optimale Blockgröße (1×1)

Keine Kopplung

Konstruktion unaufwändig (Lösen von LGS)

Reihenfolge nicht festgelegt

Benötigt Basis aus EV (− −)



Jordan-NF

Blockgröße n möglich

Übersichtliche Kopplung (Ketten)

Konstruktion unproblematisch (LGS mehrschrittig lösen)

Reihenfolge nicht festgelegt

Benötigt Basis aus verallgem. EVen (zerfallendes χ_A)

Frobenius-NF

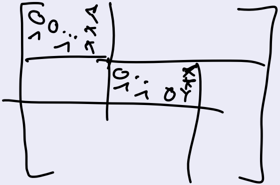
Blockgröße n möglich

Kopplung kann tatsächlich vollständig sein

Konstruktion kann aufwändiger sein (siehe letzte Woche)

Reihenfolge festgelegt

Immer möglich (+ +)



Übereinstimmung der Normalformen

DF = JNF

Die DF und die JNF von A stimmen genau dann überein, wenn

Basis aus EV existiert $\Leftrightarrow$ A diagonalisierbar $\longleftarrow$ Super :)

$\Leftrightarrow$ Jordanblöcke 1×1

$\Leftrightarrow$ χ_A zerfällt in LF und μ_A hat nur LF mit Potenz 1

DF = FNF

Die DF und die FNF von A stimmen genau dann überein, wenn

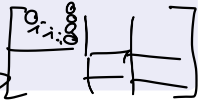
$A = \lambda I_n$ wegen der Teilbarkeitsforderung und weil $(t-\lambda_1) \mid (t-\lambda_2)$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$

JNF = FNF

Die JNF und die FNF von A stimmen genau dann überein, wenn $A = \lambda I$

weil Jordanblock $\hat{=}$ Begleitmatrixblock $\Leftrightarrow$ Block 1×1. Wenn wir Umordnen der Basisvektor innerhalb der Jordanketten erlauben ist auch möglich:



Die NF besteht aus Blöcken abnehmender Größe zum EW 0.

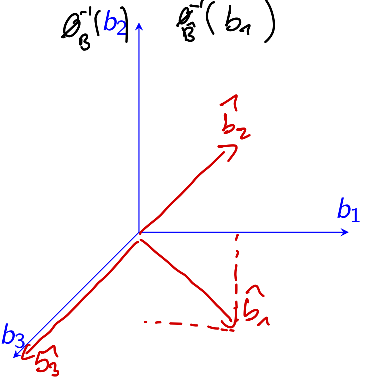
Invariantenteiler sind t^r

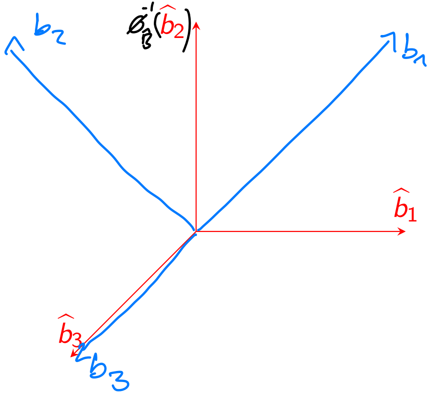
Visualisierung von Normalformen 1: Basiswechsel

Drehstreckung Drehstauchung

$$\text{Wie arbeitet } \mathcal{T}_{\widehat{B}}^{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ -0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \mathcal{T}_{B}^{\widehat{B}\,-1}?$$

$M^{B}_{\widehat{B}}(\mathrm{id}) =$



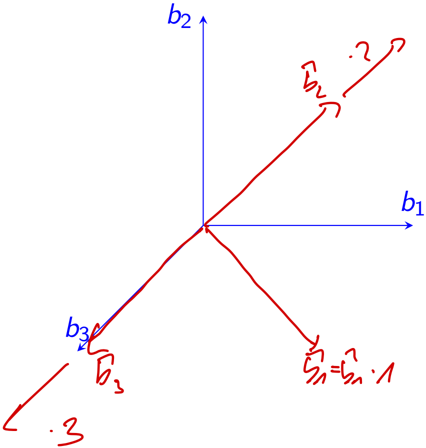


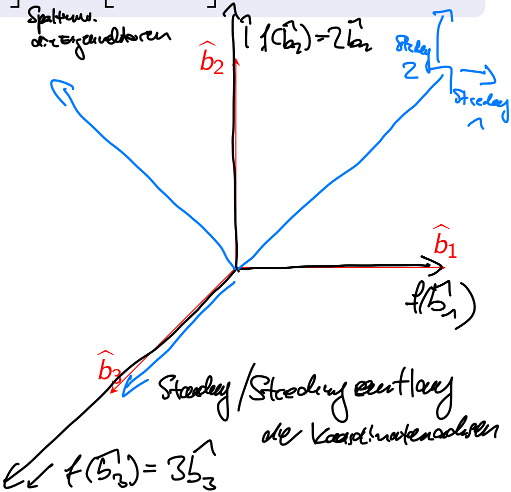
Keine Basis ist "richtiger". Es kommt immer d.a. was man untersucht

Visualisierung von Normalformen 2: Diagonalform

Wie arbeitet $\mathcal{M}_B^B(f) = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \mathcal{T}_B^{\widehat{B}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \mathcal{T}_{\widehat{B}}^B = \mathcal{T}_B^{\widehat{B}} \mathcal{M}_{\widehat{B}}^{\widehat{B}}(f) \mathcal{T}_{\widehat{B}}^B$?

Spaltenw. d. Eigenvektoren





Visualisierung von Normalformen 3: Jordan-Normalform

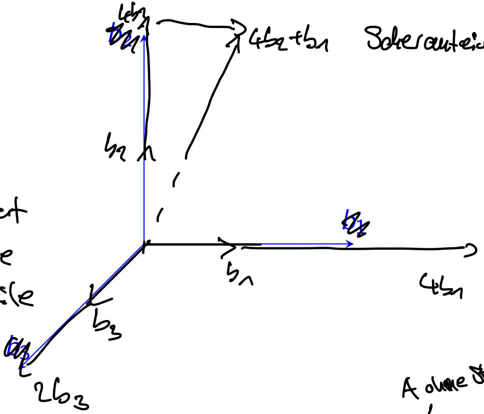
Hier ohne das "ursprüngliche" Koordinatensystem

Eigenvektoren direkt ablesbar

$$\text{Wie arbeitet } \underbrace{\mathcal{M}_B^B(f)}_{J} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} ?$$

A streckt und schert Anteile geringerer Ordnung rein.

$J - \lambda I \leftarrow J$ reduziert um λ-fache Streckanteile



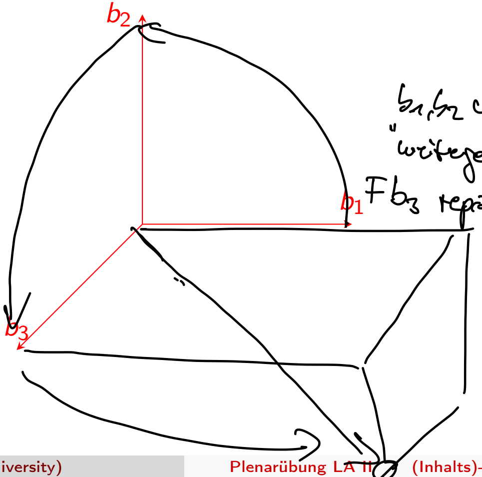
Scheranteil & Streckungsanteil

A ohne Streckung = Scheranteil

b_2 Hauptvektor d. Stufe 2 also $0 = (J-\lambda I)\, b_2 = (J-\lambda I)(J-\lambda I) b_2$

Visualisierung von Normalformen 4: Frobenius-Normalform

Wie arbeitet $\underbrace{\mathcal{M}_{\widehat{B}}^{\widehat{B}}(f)}_{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 32 \\ 1 & 0 & -32 \\ 0 & 1 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$?



b_1, b_2 werden "weitergeschoben"

Fb_3 repräsentiert das gesamte restl. Verhalten der Abbildung

Transformationsmatrizen bestimmen (Beispiel 30.9 (*ii*))

Bestimmen Sie die JNF und dazugehörige Transformationsmatrizen von der Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$

$A = TJT^{-1}$ bzw $J = T^{-1}AT$

1. Bestimmen $\chi_A = (t-2)^3$, $\mu_A = (t-2)^2 \Rightarrow J = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & \\ & 2 & \\ \hline & & 2 \end{array}\right]$

2. Bestimme $\mathrm{Ker}(2I-A)$ über hom. LGS $\Rightarrow \mathrm{Ker}(\ ) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ (Stufe 1) ✓

3. Bestimme $\mathrm{Ker}(2I-A)^2$ über Lösung von $(2I-A)x = v$ für passendes $v \in \mathrm{Eig}(A,2)\setminus\{0\}$

Nicht jeder EV ist geeignet, um eine Jordankette zu starten!
Es gibt aber geeignete, die müssen wir "nur" finden.

$$(2I-A)x = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} x = \underbrace{\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in \mathrm{Eig}(A,2)} = \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$\alpha \neq 0$ oder $\beta \neq 0 \rightsquigarrow \alpha = -\beta \neq 0$

Bestimmen Sie die JNF und dazugehörige Transformationsmatrizen von der Matrix
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3} \qquad A = TJT^{-1}$$

- EV zu $\alpha = -\beta = 1$

Skript:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & \alpha+2\beta \\ -1 & 1 & 2 & \alpha \\ 1 & -1 & -2 & \beta \end{array}\right] \overset{\text{ZSF}}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & \alpha+2\beta \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha+2\beta \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+\beta \end{array}\right] \rightsquigarrow$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Allgemeiner:
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} x = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

-1

-1

ist äquivalent zu
$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\overset{\text{ZSF}}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 & -2 & 0 \\ & & & 1 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \alpha = -\beta$$

Lösungsraum ist Unterraum aller EV zu denen HV d. Stufe 2 existieren.

Transformationsmatrizen bestimmen (Beispiel 30.9 (*ii*))

Bestimmen Sie die FNF und dazugehörige Transformationsmatrizen von der Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ $\quad A = \hat{T} F \hat{T}^{-1}$

1. Wir wissen schon, dass $\chi = (t-2)^3$, $\mu = (t-2)^2$, also $F = \begin{bmatrix} 0 & -4 & \\ 1 & 4 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$

2. Die dazugehörige Basis hat die Form (x_1, Ax_1, x_2) für maximale Vektoren x_1, x_2

Maximalen Vektor können wir bestimmen (z.B. HV der Stufe 2, also $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$)

$\rightsquigarrow \hat{T} \mathrel{\widehat{=}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

max vek A max vekt. maxvektor für Rest, analog auf Einschränkung $f|_W$ bestimmbar

In diesem Fall EV_2

Im Allgemeinen aufwändiger

Transformationen zwischen JNF und FNF

Die Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ ist also ähnlich zu ihrer JNF (J) und ihrer FNF (F). Also sind J und F auch ähnlich und es gilt:

$A = TJT^{-1}$, $A = \tilde{T} F \tilde{T}^{-1}$

EV bzgl. B_F — HV Stufe 2 — weiterer EV — max Vektoren zu J

$$\overset{F}{\begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}} = \overset{\tilde{T}^{-1}T}{\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \overset{J}{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}} \overset{T^{-1}\tilde{T}}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

und

$$\overset{J}{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}} = \overset{T^{-1}\tilde{T}}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \overset{F}{\begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}} \overset{\tilde{T}^{-1}T}{\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

HV

max Vektor — JV — weiterer max Vektor bzgl B_J

Algorithmus (Bestimmung von JNF-Transformationsmatrizen i. A.)

Eingabe: Matrix $A \in K^{n \times n}$, $n \in \mathbb{N}$ mit zerfallendem χ_A
Ausgabe: $J, T \in K^{n \times n}$ mit $A = TJT^{-1}$

Setze $B_J = \emptyset$
Bestimme $\Lambda := \{\lambda \in K \mid \lambda \text{ EW von } A\}$
for $\lambda \in \Lambda$ **do**
  Bestimme Blockgrößen $R := \{r \in \mathbb{N} \mid \exists \lambda\text{-Block mit Größe } r\}$
  while $R \neq \emptyset$ **do**
    Setze $r := \max(R)$
    Erweiter $B_J \cap \operatorname{Kern}(\lambda I - A)^{r-1}$ zu Basis B_{r-1} v $\operatorname{Kern}(\lambda I - A)^{r-1}$
    Erweiter $B_{r-1} \cup (B_J \cap \operatorname{Kern}(\lambda I - A)^r)$ zu Basis B_r v $\operatorname{Kern}(\lambda I - A)^r$
    for $x \in B_r \setminus (B_J \cup B_{r-1})$ **do**
      Erweiter B_J um $\big(\underbrace{\cancel{(\lambda I - A)}^{r-1}}_{(A-\lambda I)^{r-1}} x, \dots, \underbrace{\cancel{(\lambda I - A)}}_{(A-\lambda I)} x, x\big)$
    end for
    Setze $R := R \setminus r$
  end while
  Schreibe B_J spaltenweise in T.
end for

Wiederholung Bilinearformen

Wiederholung Bilinearform

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K.

Eine Abbildung $\gamma\colon V \times V \to K$ heißt eine **Bilinearform** auf $V \times V$, wenn für jedes feste $\overline{u} \in V$ und jedes feste $\overline{v} \in V$ die Abbildungen

$$\gamma(\overline{u}, \cdot)\colon V \ni v \mapsto \gamma(\overline{u}, v) \in K$$
$$\gamma(\cdot, \overline{v})\colon V \ni u \mapsto \gamma(u, \overline{v}) \in K$$

beide linear sind.

$$\gamma(u,v) = \phi^{-1}(u)^T M \phi^{-1}(v)$$

$$f(v) = M \phi^{-1}(v)$$

Identifikationen, Darstellungen und Dualität

Bei ⊗ Dualität sinnvoll

$\tilde{\gamma}_1 \in \mathrm{Hom}(V, V^*)$

$u \mapsto \gamma(u, \cdot)$

$M^B_{B^*}(\tilde{\gamma}_1) = \left[\ \Theta^{-1}_{B^*}(\gamma(e_j, \cdot))\ \right]$

$\left[\gamma(e_j, e_i)\right] \xrightarrow{\text{Transponieren}} \left[\gamma(e_i, e_j)\right]$

$M^B_{B^*}(\tilde{\gamma}_2) = \left[\ \Theta^{-1}_{B^*}(\gamma(\cdot, e_j))\ \right]$

$\tilde{\gamma}_2 \in \mathrm{Hom}(V, V^*)$

$v \mapsto \gamma(\cdot, v)$

$\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

Umgeformt

$\gamma(u,v) = \Theta^{-1}_B(v)\, M^B_{B^*}(\tilde{\gamma}_1)\, \Theta^{-1}_B(u)$

$\gamma \in \mathrm{Bil}(V \times V; K)$

$(u,v) \mapsto \gamma(u,v)$

Darstellungsmatrix $M_1^{B \otimes B}(\tilde{\gamma})$

$= \left[\gamma(e_1,e_1), \gamma(e_2,e_1) \ldots \gamma(e_n,e_n)\right]$

vektorisierte Form von $M^B_{B^*}(\tilde{\gamma}_1)$

Dualität für l.o.r.o.

$\tilde{\gamma}_2 : V \to \tilde{\gamma}_2(\cdot, v) \in V^*$

$\tilde{\gamma}_2^* : V^{**} \to V^{**}(\tilde{\gamma}_2(\cdot)) = \gamma(v, \cdot) = \tilde{\gamma}_1$

$\tilde{\gamma} \in V^* \otimes V^*$

$\tilde{\gamma} = \sum \alpha_{ij}\, \varepsilon^i \otimes \varepsilon^j$

$e_k \otimes e_l$ einsetzen $\to$ das $\gamma(e_k, e_l)$

Tensorkomponenten $\hat{=}$ Darstellungsmatrix

$\hat{\gamma} \in \mathrm{Hom}(V \otimes V; K)$

$u \otimes v \mapsto \gamma(u,v)$

$\hat{\gamma}^* : K^* \to (V \otimes V)^*$