Plenarübung LA II

(Inhalts)-Wochen 09

Link zu diesen Folien

Organisatorisches zum Semesterende

		Samstag, 22. Juni 2024					
		Sonntag, 23. Juni 2024					
		Montag, 24. Juni 2024			Wechsel 10/11	10	
		Dienstag, 25. Juni 2024		11			
		Mittwoch, 26. Juni 2024					11
KW 26	SW 11	Donnerstag, 27. Juni 2024		11			11
		Freitag, 28. Juni 2024	11				11
		Samstag, 29. Juni 2024					
		Sonntag, 30. Juni 2024					
		Montag, 1. Juli 2024			Wechsel 11/12	11	
		Dienstag, 2. Juli 2024		12			
		Mittwoch, 3. Juli 2024					12
KW 27	SW 12	Donnerstag, 4. Juli 2024		12			12
		Freitag, 5. Juli 2024	12			12	12
		Samstag, 6. Juli 2024					
		Sonntag, 7. Juli 2024					
		Montag, 8. Juli 2024			Wechsel 12/13		
		Dienstag, 9. Juli 2024		13			
		Mittwoch, 10. Juli 2024					13
KW 28	SW 13	Donnerstag, 11. Juli 2024		13			13
		Freitag, 12. Juli 2024	13				13
		Samstag, 13. Juli 2024					
		Sonntag, 14. Juli 2024					
		Montag, 15. Juli 2024				13	
		Dienstag, 16. Juli 2024		14			
		Mittwoch, 17. Juli 2024					14
KW 29	SW 14	Donnerstag, 18. Juli 2024		14			14
		Freitag, 19. Juli 2024	14				14
		Samstag, 20. Juli 2024					
		Sonntag, 21. Juli 2024					
		Montag, 22. Juli 2024					
		Dienstag, 23. Juli 2024					
		Mittwoch, 24. Juli 2024					
KW 30	SW 15	Donnerstag, 25. Juli 2024					
		Freitag, 26. Juli 2024					
		Samstag, 27. Juli 2024	Beginn vorlesungsfreie Zeit				
		Sonntag, 28. Juli 2024					

Die Umfrageergebnisse

Zusammenfassung für G01Q02		
Was soll in der Plenarübung vorrangig behandelt werden?		
Antwort	**Anzahl**	**Brutto-Prozentsatz**
Wiederholung von Skriptinhalten Ansehen	6	27.27%
Erklärungen zu Skriptbeispielen Ansehen	1	4.55%
Lösungen der Hausaufgaben Ansehen	0	0.00%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	14	63.64%
Gesamt(Brutto)	**21**	**100.00%**

Zusammenfassung für G01Q01		
Welche Anmerkungen oder Fragen haben Sie zur Veranstaltung oder ihren Inhalten?		
Antwort	**Anzahl**	**Brutto-Prozentsatz**
Antwort Ansehen	5	22.73%
Keine Antwort	3	13.64%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	14	63.64%
Gesamt(Brutto)	**22**	**100.00%**

Interesse an:

(1) Lokalen Minimalpolynomen / maximalen Vektoren

(2) Lemma 29.7 (A-invariante komplementäre Unterräume)

(3) Algorithmischer Bestimmung der Frobenius-Normalform (FNF)

(4) Visualisierung von Normalformen

Das heutige Programm

(1) Wochenüberblick
(2) Wiederholung und Beispiele zu lokal annulierenden Polynomen und maximalen Vektoren
(3) Zusammenhang Begleitmatrizen und zyklische Vektoren
(4) Erinnerung: Normalformen
(5) Wiederholung Frobenius-Normalform (FNF)
(6) Vor- und Nachteile FNF
(7) FNF in Spezialfällen mit „Struktur“
(8) Wiederholung Fundament der FNF - Lemmata 29.6 und 29.7
(9) Algorithmische Bestimmung der FNF

Wochenüberblick

Lokales Minimalpolynom

Definition 29.2

Es sei K ein Körper. Es sei $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in K^n$.

Das eindeutig bestimmte normierte Polynom $\mu_{A,x} \neq 0$ geringsten Grades mit der Eigenschaft $\mu_{A,x} \in J_{A,x}$ heißt das **(lokale) Minimalpolynom von A bzgl. x**.

Lokale Minimalpolynome und maximale Vektoren 1

Gegeben sei $A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in K^{n \times n}$.

Was sind die lokalen Minimalpolynome bzgl. der Elemente der kanonischen Basis? Wie sieht die Menge der maximalen Vektoren aus?

Lokale Minimalpolynome und maximale Vektoren 2

Behauptung:

Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{n \times N}$. Dann beinhaltet jede Basis einen maximalen Vektor bzgl. A.

Begleitmatrizen und zyklische Vektoren

Lemma (Hausaufgabe II-9.4)

Es sei $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$. Dann sind äquivalent:

(1) $\mu_A = \chi_A$

(2) A ist ähnlich zu C_{χ_A}.

(3) Es gibt einen Vektor $x \in K^n$ mit $\left\langle x,\ Ax,\ A^2 x, \ldots, A^{n-1} x \right\rangle = K^n$

Storyline Normalformen (Wiederholung)

Für n-dimensionale VR V kann $f \in \mathrm{End}(V)$ durch Basiswahl durch $A \in K^{n \times n}$ dargestellt werden.

Alle Darstellungsmatrizen sind ähnlich, Ähnlichkeitstransformationen entsprechen Basiswechseln.

Basiswahl/-wechsel beeinflusst die Struktur der Darstellungsmatrix.

Wir wünschen uns Blockdiagonalstruktur der Darstellungsmatrix.

Der Bestfall (Diagonalform) ist nicht immer erreichbar.

Frage: Gibt es Blockdiagonalformen, die immer erreichbar sein?

Ja, die Frobeniusnormalform

Frobenius-Normalform (FNF) (Wiederholung)

Definition Frobenius-Normalform

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Die zu A ähnliche, eindeutige Blockdiagonalmatrix

$$\begin{bmatrix} C_{p_1} & & & \\ & C_{p_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_{p_k} \end{bmatrix}$$

aus Begleitmatrizen C_{p_i} zu normierten, nicht-konstanten Polynomen $p_1, \ldots, p_k$, $k \in \mathbb{N}$ mit $p_1 = \mu_A$ und $p_{j+1} \mid p_j$ für $j = 1, \ldots, k-1$. heißt die **Frobenius-Normalform**.

Erkennen einiger FNF (Warmup)

Welche der folgenden Matrizen sind in Frobenius-Normalform?

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Pros / Cons der FNF

Pros

- Eindeutige Existenz für jeden Endomorphismus
- Erlaubt Ähnlichkeitstest
- Minimalpolyom direkt ablesbar
- Genauer: Alle Invariantenteiler ablesbar, daher charaktersistisches Polynom leicht berechenbar

Cons

- Kann nur aus einem Block bestehen
- Stimmt i. A. nicht mit der Diagonalform überein
- Berechnung per Hand kann aufwändig werden (algorithmisch kein Problem)

Strukturausnutzende Beispiele für Frobenius-Normalformen

Was sind die Frobenius-Normalformen folgender Matrizen aus $\mathbb{R}^{4\times 4}$?

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&2\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&2\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}4&-1&-2&3\\-1&5&2&-4\\0&1&3&-1\\-1&2&2&1\end{bmatrix}$$

Fundament der FNF

Lemma 29.6

Sei $x \in K^n$ und $\mu_{A,x} = \sum_{j=0}^{d-1} \alpha_j \lambda^j + \lambda^d$ das lokale Minimalpolynom bzgl. x. Dann ist der Unterraum

$$U_x := \left\langle x,\ A\,x,\ A^2\,x, \ldots, A^{d-1}\,x \right\rangle$$

ein A-invarianter Unterraum mit der Basis

$$B_x = \left(x,\ A\,x,\ A^2\,x, \ldots, A^{d-1}\,x\right).$$

Lemma 29.7

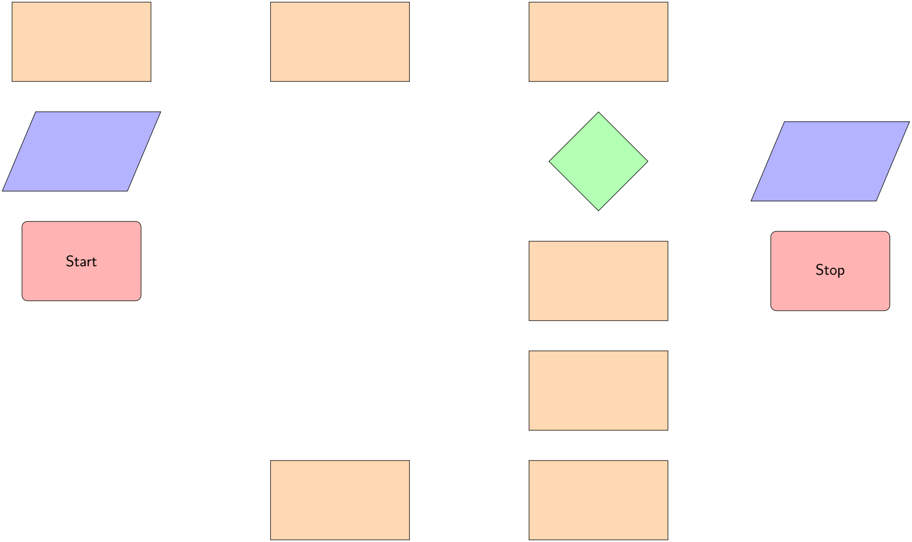
Sei $x \in K^n$ ein maximaler Vektor bzgl. A mit $d := \deg(\mu_{A,x})$. Ergänzen wir die Basis B_x von U_x zu irgendeiner Basis $B = (x_1, \ldots, x_d, x_{d+1}, \ldots, x_n)$von K^n und definieren die Linearform ξ durch $\xi(x_j) = \delta_{jd}$, dann ist

$$W := \left\{ w \in K^n \,\middle|\, \xi(A^j\,w) = 0 \text{ für alle } j = 0, \ldots, d-1 \right\}$$

A-invarianter Unterraum der Dimension $\dim(W) = n - d$ und erfüllt

$$K^n = U \oplus W.$$

Algorithmus zur Bestimmung der FNF i. A.



Beispiel zur algorithmischen Bestimmung einer FNF (1)

$$\mathbb{R}^{5\times 5} \ni A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ hat die FNF } \begin{bmatrix} \quad & & & & \quad \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix}$$

Das finden wir auch algorithmisch heraus.
Schritt 1:

Beispiel zur algorithmischen Bestimmung einer FNF (2)

Bestimmen maximaler Vektoren

Das Bestimmen maximaler Vektoren für $A \in K^{n \times n}$ ist keine triviale Aufgabe. Zwei Möglichkeiten sind:

(1) Heuristisch: Man untersucht für alle Polynome

$$\{p \in K[t] \mid \deg(p) < \mu_A,\ p \text{ ist normiert}, p \mid \mu_A\}$$

den Kern($p(A)$) und sucht ein Element aus, das nicht in der Vereinigung dieser Kerne liegt.

(2) Man verwendet einen effizienten Algorithmus aus M. Geck. „On Jacob's construction of the rational canonical form of a matrix". *The Electronic Journal of Linear Algebra* 36.36 (2020), S. 177–182. DOI: `10.13001/ela.2020.5055`, der auf dem Euklidischen Algorithmus und Basistransformationen basiert.