Plenarübung LA II

(Inhalts)-Wochen 08

Link zu diesen Folien

Die Umfrageergebnisse

Zusammenfassung für G01Q02		
Was soll in der Plenarübung vorrangig behandelt werden?		
Antwort	**Anzahl**	**Brutto-Prozentsatz**
Wiederholung von Skriptinhalten Ansehen	1	7.14%
Erklärungen zu Skriptbeispielen Ansehen	0	0.00%
Lösungen der Hausaufgaben Ansehen	0	0.00%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	12	85.71%
Gesamt(Brutto)	**13**	**100.00%**

Zusammenfassung für G01Q01		
Welche Anmerkungen oder Fragen haben Sie zur Veranstaltung oder ihren Inhalten?		
Antwort	**Anzahl**	**Brutto-Prozentsatz**
Antwort Ansehen	1	7.14%
Keine Antwort	1	7.14%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	12	85.71%
Gesamt(Brutto)	**14**	**100.00%**

Interesse an:

(1) Idealen

(2) Algebren

(3) Erzeugung

Das heutige Programm

(1) Wochenüberblick
(2) Wiederholung und (Nicht-)Beispiel Algebren
(3) Strukturzusammenspiel in Algebren
(4) Wichtige Eigenschaften von Matrixpolynomen
(5) Wiederholung und Bspl. Ideale
(6) Bezug Ideal/Faktorringe
(7) Übersicht Faktorkonzepte und Erzeugung
(8) Stabilität von Idealen
(9) Wiederholung und Bspl. Cayley-Hamilton und Minimalpolynome

Wochenüberblick

Wiederholung Algebren

Definition

Eine **Algebra** $(A, +, \cdot, \star)$ **über** K ist eine Menge A mit inneren und äußeren Verknüpfungen, so dass gilt:

(1) $(A, +, \cdot)$ ist ein K-Vektorraum.

(2) $(A, +, \star)$ ist ein Ring.

(3) Die Verknüpfung $\star$ ist verträglich mit der S-Multiplikation:

$$(\alpha \cdot a) \star b = \alpha \cdot (a \star b) = a \star (\alpha \cdot b)$$

für alle $\alpha \in K$ und $a, b \in A$.

Behauptung:

Man kann jeden Vektorraum $(V, +, \cdot)$ zu einer Algebra ergänzen.

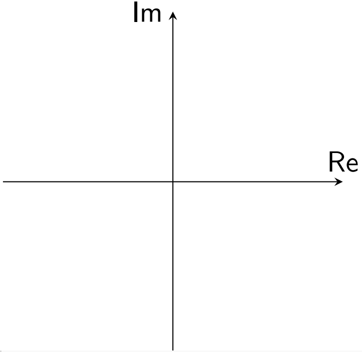
Beispiel einer Nicht-Algebra

(Danke an Anna Schilling)

$\mathbb{C}$ als $\mathbb{C}$ Vektorraum mit komponentenweiser Ringmultiplikation

Wir betrachten

$$\begin{aligned}
\mathbb{C} &:= \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\} \\
+ &: (a + bi, c + di) \mapsto (a + c) + (b + d)i \\
\cdot &: (a + bi, c + di) \mapsto (ab - bd) + (ad + bc)i \\
\star &: (a + bi, c + di) \mapsto (ac) + (bd)i
\end{aligned}$$



Zusammenspiel der Vektorraum- und Ringeigenschaften

Lemma:

Jede endlichdimensionale, nullteilerfreie und unitäre (assoziative) Algebra $(A, +, \cdot, \star)$ ist eine Divisionsalgebra.

Beweis:

Matrixpolynome (Einsetzung, Ähnlichkeit, Eigenwerte)

Es sei K ein Körper, V eine $n-\dim$ K-Algebra, $p \in K[t]$, $f \in \mathrm{End}(V)$.

Einsetzung

Es ist in $K[t]$: $(t-a_1)^2(t-a_2) = t^3 - (2a_1 + a_2)\,t^2 + (a_1^2 + 2a_1a_2)\,t + a_1^2a_2$.
Sind die Algebraeinsetzungen in beide Darstellungen gleichwertig?

Ähnlichkeit

Wenn $A, B, T \in K^{n\times n}$ mit $B = T^{-1}AT$, was gilt dann für $p(A)$ und $p(B)$?

Eigenwerte

Wenn $\lambda \in K$ f-EW zu $v \in V$ ist, was wissen wir dann über $p(f)$?

Wiederholung Ideale

Definition 27.1

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring.

(1) $J \subseteq R$ heißt ein **Ideal** von $(R, +, \cdot)$, wenn J ein Unterring von R ist und zusätzlich gilt:

$$R\,J \subseteq J \quad \text{und} \quad J\,R \subseteq J$$

(2) Ein Ideal $(J, +, \cdot)$ von $(R, +, \cdot)$ heißt **echt**, wenn $J \subsetneq R$ gilt.

Sind folgende Mengen Ideale?

(1) $\{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \,|\, 2 \in A\}$ in $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \triangle, \cap)$

(2) $\{p \in \mathbb{Q}[t] \,|\, p(-3) = 0\}$ in $(\mathbb{Q}[t], +, \cdot)$

(3) $A\,\mathbb{R}^{2\times 2}$ in $(\mathbb{R}^{2\times 2}, +, \cdot)$, $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

Ideale ermöglichen Faktorringe

Erinnerung: Faktorgruppen

Es sei $(G, +)$ eine Gruppe und $N \subseteq G$ ein Normalteiler. Dann heißt

$$G \,/\, N := \{[a] = a + N \mid a \in G\} \quad \text{mit} \quad [a] \mathbin{\tilde{+}} [b] := [a + b]$$

die Faktorgruppe von G bzgl. N.

Definition: Faktorring

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring und $J \subseteq R$ ein Ideal. Dann heißt

$$R \,/\, J := \{[a] = a+J \mid a \in R\} \quad \text{mit} \quad [a] \mathbin{\tilde{+}} [b] := [a+b],\ [a] \mathbin{\tilde{\cdot}} [b] := [a \cdot b]$$

der Faktorring von R bzgl. J.

Vergleich Erzeugung

Erinnerung: Erzeugte Untergruppe

Es sei $(G, +)$ eine Gruppe. Dann ist die von $E \subseteq G$ erzeugte Untergruppe

$$\begin{aligned}\langle E\rangle &:= \bigcap \big\{ U \,\big|\, (U,+) \text{ ist Untergruppe von } (G,+) \text{ und } E \subseteq U \big\} \\ &= \Big\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \,\Big|\, \exists n \in \mathbb{N}_0 \; \forall i = 1, \ldots, n \, \big(a_i \in E \cup -E\big) \Big\}\end{aligned}$$

Wiederholung: Erzeugtes Ideal

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. Dann ist das von $E \subseteq R$ erzeugte Ideal

$$(E) := \bigcap \big\{ J \,\big|\, (J,+,\cdot) \text{ ist Ideal von } (R,+,\cdot) \text{ und } E \subseteq J \big\}$$

$$= \Big\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \,\Big|\, \exists n \in \mathbb{N}_0 \; \forall i = 1, \ldots, n \, \big(a_i \in E \,\cup\, -E \,\cup\, R\,E \,\cup\, E\,R \,\cup\, R\,E\,R\big) \Big\}$$

Übersicht: Erzeugung in Abschlusssystemen

Struktur	Unterstruktur	Faktorstruktur
Gruppe $(G, +)$	Untergruppe. $E \subseteq G$ erzeugt $\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i \,\middle|\, a_i \in \pm E\right\}$	Normalteiler. $E \subseteq G$ erzeugt
Ring $(R, +, \cdot)$	Unterring. $E \subseteq R$ erzeugt	Ideal. $E \subseteq R$ erzeugt $\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i \,\middle|\, a_i \in \pm E \cup ER \cup RE \cup RER\right\}$
Körper $(K, +, \cdot)$	Unterkörper. $E \subseteq K$ erzeugt	
Vektorraum $(V, +, \cdot)$	Unterraum. $E \subseteq V$ erzeugt $\left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \,\middle|\, v_i \in E, \alpha_i \in K\right\}$	Unterraum. $E \subseteq V$ erzeugt $\left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \,\middle|\, v_i \in E, \alpha_i \in K\right\}$
Algebra $(A, +, \cdot, \star)$	Unteralgebra. $E \subseteq A$ erzeugt	

Verknüpfung von Idealen

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring und J_1, J_2 zwei Ideale. Welche der folgenden Mengen sind (wann) Ideale?

(1) $J_1 \cup J_2$

(2) $J_1 \cap J_2$

(3) $J_1 + J_2$

(4) $J_1 \cdot J_2$

(5) $J_1 \setminus J_2$

(6) $J_1 \cdot R$

Wiederholung Cayley-Hamilton und Minimalpolynom

Satz 26.1 (Version für Matrizen)

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Dann gilt $\widetilde{\chi_A}(A) = 0 \in K^{n \times n}$.

Lemma 28.1

Es sei K ein Körper. Es sei $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Die Menge

$$J_A := \left\{ p \in K[\lambda] \,\middle|\, \widetilde{p}(A) = 0 \right\}$$

ist ein Ideal in $K[\lambda]$ ungleich dem Nullideal.

Definition 28.2

Es sei K ein Körper. Es sei $A \in K^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Das eindeutig bestimmte normierte Polynom μ_A geringsten Grades mit der Eigenschaft $\mu_A \in J_A$ heißt das **Minimalpolynom von A**.

Beispiele

Was sind die charakteristischen und Minimalpolynome der folgenden Matrizen?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$