Plenarübung LA II

(Inhalts)-Wochen 08

Link zu diesen Folien

Die Umfrageergebnisse

Zusammenfassung für G01Q02		
Was soll in der Plenarübung vorrangig behandelt werden?		
Antwort	**Anzahl**	**Brutto-Prozentsatz**
Wiederholung von Skriptinhalten Ansehen	1	7.14%
Erklärungen zu Skriptbeispielen Ansehen	0	0.00%
Lösungen der Hausaufgaben Ansehen	0	0.00%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	12	85.71%
Gesamt(Brutto)	**13**	**100.00%**

Zusammenfassung für G01Q01		
Welche Anmerkungen oder Fragen haben Sie zur Veranstaltung oder ihren Inhalten?		
Antwort	**Anzahl**	**Brutto-Prozentsatz**
Antwort Ansehen	1	7.14%
Keine Antwort	1	7.14%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	12	85.71%
Gesamt(Brutto)	**14**	**100.00%**

Interesse an:

(1) Idealen

(2) Algebren

(3) Erzeugung

Das heutige Programm

(1) Wochenüberblick
(2) Wiederholung und (Nicht-)Beispiel Algebren
(3) Strukturzusammenspiel in Algebren A
(4) Wichtige Eigenschaften von Matrixpolynomen
(5) Wiederholung und Bspl. Ideale
(6) Bezug Ideal/Faktorringe I
(7) Übersicht Faktorkonzepte und Erzeugung
(8) Stabilität von Idealen
(9) Wiederholung und Bspl. Cayley-Hamilton und Minimalpolynome CH

Wochenüberblick

Algebren $(A,+,\cdot,*)$ über K

Unteralgebren, Homomorphis.,

Einsetzungshomomorph.

für Polynome $p \in K[t]$

$\Downarrow$ Ermöglichen

Satz von Cayley-Hamilton

$\chi_f(f) = 0 \in \mathrm{End}(V)$

$\Downarrow$ Korollar

f^{-1} ist Polynom in f

Ideale in Ringen $(R,+,\cdot)$

Unterring J mit $JR, RJ \subset J$

Erzeugung

z.B. $K[t]$

Hauptideale $\rightarrow$ Hauptidealringe

$\uparrow$ sind

Annullierende Polynome J_f zu $f \in \mathrm{End}(V)$

Hauptideal, also von einem El. erzeugt

$\uparrow$ Ideal-erzeugt

Minimalpolynom μ_f

teilt jedes annullierende Pol.

Wiederholung Algebren

Definition

Eine **Algebra** $(A, +, \cdot, \star)$ **über** K ist eine Menge A mit inneren und äußeren Verknüpfungen, so dass gilt:

Additivität

$(a+b)\star c = a\star c + b\star c$

(1) $(A, +, \cdot)$ ist ein K-Vektorraum.

(2) $(A, +, \star)$ ist ein Ring. ← Assoziativität von $\star$, Distributivgesetze

(3) Die Verknüpfung $\star$ ist verträglich mit der S-Multiplikation:

$$\star(\alpha a, b) = (\alpha \cdot a) \star b = \underbrace{\alpha \cdot (a \star b)}_{= \alpha \cdot \star(a,b)} = a \star (\alpha \cdot b) = \star(a, \alpha b)$$

für alle $\alpha \in K$ und $a, b \in A$. ← Homogenität beider Eingänge

Äquivalent zu (3): $\star$ ist bilinear

Behauptung:

Man kann jeden Vektorraum $(V, +, \cdot)$ zu einer Algebra ergänzen.

Bsp. $\star$ als Nullabbildung nehmen. Keine interessante Struktur.

Beispiel einer Nicht-Algebra

(Danke an Anna Schilling)

$\mathbb{C}$ als $\mathbb{C}$ Vektorraum mit komponentenweiser Ringmultiplikation

Wir betrachten

übliche Körper

$$\mathbb{C} := \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$
$$+ : (a + bi, c + di) \mapsto (a + c) + (b + d)i$$
$$\cdot : (a + bi, c + di) \mapsto (ab - bd) + (ad + bc)i$$
$$\star : (a + bi, c + di) \mapsto (ac) + (bd)i$$

(1+i)

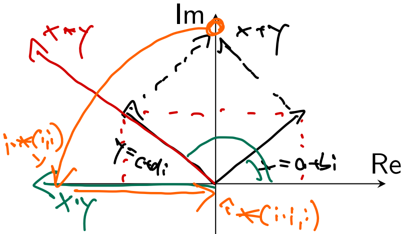
unitärer kommutativer Ring

$$i \cdot \star(i,i) = i \cdot (\underbrace{i \star i}_{i}) = i \cdot i = -1$$

?

$$\star(i \cdot i, i) = \star(-1, i) = 0$$

$\star$ nicht bilinear $\Rightarrow$ keine Algebra



Rotation und Achsenweise Multiplikation kommutieren nicht

Lemma:

Jede endlichdimensionale, nullteilerfreie und unitäre (assoziative) Algebra $(A, +, \cdot, \star)$ ist eine Divisionsalgebra. ⇐ In $A\setminus\{0\}$ gibt es $\star$-Inverse (aber evtl. keine Kommutativität)

Beweis:

Es gibt $1 \in A$ bzgl. $\star$. Nullteilerfreiheit bedeutet, dass $a \star b \neq 0 \; \forall a, b \in A\setminus\{0\}$

Ringeigenschaft

Also ist
$$f_b : a \longmapsto a \star b$$
$$f_a : b \longmapsto a \star b$$
lineare Abbildung! wegen Def. der Verträglichk.

sind injektive Endomorphismen auf A für $a, b \in A\setminus\{0\}$

Vektorraumeigenschaften

A endlichdimensional $\Rightarrow$ f_a, f_b auch surjektiv (Dimensionssatz)

$\Rightarrow \forall a \in A\setminus\{0\} \; \exists b : a \star b = 1$

"Das ist a^{-1}" $\square$ Ringeigenschaft

Es sei K ein Körper, V eine $n-\dim$ K-Algebra, $p \in K[t]$, $f \in \mathrm{End}(V)$.

Einsetzung

Es ist in $K[t]$: $(t-a_1)^2(t-a_2) = t^3 - (2a_1 + a_2)\,t^2 + (a_1^2 + 2a_1a_2)\,t + a_1^2a_2$.
Sind die Algebraeinsetzungen in beide Darstellungen gleichwertig?

Ja, es treten nur Potenzen von A auf, diese kommutieren untereinander, denn

$$A^kA^l = A^{k+l} = A^lA^k \quad (\text{Assoz.})$$

Ähnlichkeit

Wenn $A, B, T \in K^{n\times n}$ mit $B = T^{-1}AT$, was gilt dann für $p(A)$ und $p(B)$?

Für alle Potenzen ist $B^k = (T^{-1}AT)^k = T^{-1}A^kT$. wegen Distributivität gilt

$$p(B) = \sum_{i=0}^{l} a_k B^k = \sum_{i=0}^{l} a_k T^{-1}A^kT \overset{D}{=} T^{-1}\left(\sum a_k A^k\right)T = T^{-1}p(A)T$$

Eigenwerte

Wenn $\lambda \in K$ f-EW zu $v \in V$ ist, was wissen wir dann über $p(f)$?

Es ist $p(f)(v) = \left(\sum a_k f^k\right)(v) = \sum a_k \underbrace{f^{(k)}v}_{\lambda^k v} = \left(\sum a_k \lambda^k\right)v = p(\lambda)v$

Also ist v EV zum EW $p(\lambda)$ für $p(f)$

Wiederholung Ideale

Definition 27.1

$(J,+)$ Untergruppe,

$\Downarrow$ J ist mult. abgeschlossen

Es sei $(R,+,\cdot)$ ein Ring.

(1) $J \subseteq R$ heißt ein **Ideal** von $(R,+,\cdot)$, wenn J ein Unterring von R ist und zusätzlich gilt:

$$RJ \subseteq J \quad \text{und} \quad JR \subseteq J$$

impliziert

(2) Ein Ideal $(J,+,\cdot)$ von $(R,+,\cdot)$ heißt **echt**, wenn $J \subsetneq R$ gilt.

Sind folgende Mengen Ideale?

(1) $\{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid 2 \in A\}$ in $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \triangle, \cap)$ Nein, (J,Δ) schon keine Untergruppe da $\mathbb{N} \Delta \mathbb{N} = \emptyset$

(2) $\{p \in \mathbb{Q}[t] \mid p(-3) = 0\}$ in $(\mathbb{Q}[t],+,\cdot)$ Ja, $(J,+)$ ist UG und $p \cdot q(-3) = p(-3) \cdot q(-3) = 0 \, q(-3) = 0$ & komm.

Inverse hinreichend

(3) $A\,\mathbb{R}^{2\times 2}$ in $(\mathbb{R}^{2\times 2},+,\cdot)$, $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

Untergruppe ✓

Rechtsseitig $(A \cdot R) \cdot R \subseteq A \cdot (R \cdot R)$ ✓, Links. $\forall\, C D \in R\ \exists\, B$ s.d. $CAD = AB$ $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$D = I \ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow CA = AB \leftarrow \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ideale ermöglichen Faktorringe

$a+N=N+a \ \forall a\in G$

Erinnerung: Faktorgruppen

Es sei $(G,+)$ eine Gruppe und $N\subseteq G$ ein Normalteiler. Dann heißt

$$G\,/\,N := \{[a]=a+N \mid a\in G\} \quad \text{mit} \quad [a]\,\tilde{+}\,[b] := [a+b]$$

Wohldefiniertheit TGK

die Faktorgruppe von G bzgl. N.

$$[a_1]\tilde{+}[b_1]=[a_1+b_1]=a_1+b_1+N=a_1-a_2+a_2+b_1-b_2+b_2+N=a_1-a_2+a_2+\underbrace{(b_1-b_2)+N}_{=N}+b_2$$

$$=a_1\ldots=N+a_2+b_2=\ldots=a_2+b_2+N=[a_2+b_2]$$

Definition: Faktorring

Es sei $(R,+,\cdot)$ ein Ring und $J\subseteq R$ ein Ideal. Dann heißt

$$R\,/\,J := \{[a]=a+J \mid a\in R\} \quad \text{mit} \quad [a]\,\tilde{+}\,[b] := [a+b],\ [a]\,\tilde{\cdot}\,[b] := [a\cdot b]$$

wohldef. ausarbeiten Gr

der Faktorring von R bzgl. J.

$$[a_1]\tilde{\cdot}[b_1]=a_1b_1+J=a_1b_1-a_1b_2+a_1b_2-a_2b_2+a_2b_2+J=$$

$$=\underbrace{a_1(b_1-b_2)}_{\in J}+\underbrace{(a_1-a_2)b_2}_{\in J}+a_2b_2+J=a_2\cdot b_2+J$$

Vergleich Erzeugung

Erinnerung: Erzeugte Untergruppe ← Unterstrukturen

Es sei $(G,+)$ eine Gruppe. Dann ist die von $E \subseteq G$ erzeugte Untergruppe

$$\langle E \rangle := \bigcap \{ U \mid (U,+) \text{ ist Untergruppe von } (G,+) \text{ und } E \subseteq U \}$$
$$= \Big\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \;\Big|\; \exists n \in \mathbb{N}_0 \; \forall i = 1, \dots, n \, (a_i \in E \cup -E) \Big\}$$

Definition konsistent, Schnittstabilität!

Wiederholung: Erzeugtes Ideal ← Faktorstrukturen

Darstellungen iterativ

Es sei $(R,+,\cdot)$ ein Ring. Dann ist das von $E \subseteq R$ erzeugte Ideal

„alle zulässigen Verknüpfungen"

$$(E) := \bigcap \{ J \mid (J,+,\cdot) \text{ ist Ideal von } (R,+,\cdot) \text{ und } E \subseteq J \}$$
$$= \Big\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \;\Big|\; \exists n \in \mathbb{N}_0 \; \forall i = 1, \dots, n \, \big(a_i \in E \cup -E \cup RE \cup ER \cup RER\big) \Big\}$$

Übersicht: Erzeugung in Abschlusssystemen

$\Leftrightarrow g+N = N+g \Leftrightarrow$ normal.

$g+N-g = N \quad \forall g \in G$

Struktur	Unterstruktur	Faktorstruktur
Gruppe $(G,+)$	Untergruppe. $E \subseteq G$ erzeugt $\left\{\sum_{i=1}^n a_i \,\middle\|\, a_i \in \pm E\right\}$	Normalteiler. $E \subseteq G$ erzeugt $\{\sum \underbrace{g_i + a_i - g_i}_{\text{konjugiert} \in E} \mid a_i \in \pm E, g_i \in G\}$ $= \langle \{g+E-g \mid g \in G\} \rangle$
Ring $(R,+,\cdot)$	Unterring. $E \subseteq R$ erzeugt $\left\{\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m_i} a_{ij} \,\middle\|\, a_{ij} \in \pm E\right\}$	Ideal. $E \subseteq R$ erzeugt $\left\{\sum_{i=1}^n a_i \,\middle\|\, a_i \in \pm E \cup ER \cup RE \cup RER\right\}$
Körper $(K,+,\cdot)$	Unterkörper. $E \subseteq K$ erzeugt $\left\{\frac{\sum_i \prod_j a_{ij}}{\sum_k \prod_\ell b_{k\ell}} \,\middle\|\, a_{ij}, b_{k\ell} \in \pm E,\ \sum_k \prod_\ell b_{k\ell} \neq 0\right\}$	Macht keinen Sinn. Körperhomomorph. injektiv, schon als Ring hat nur triviale Ideale
Vektorraum $(V,+,\cdot)$	Unterraum. $E \subseteq V$ erzeugt $\left\{\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \,\middle\|\, v_i \in E, \alpha_i \in K\right\}$ ☺ $=$	Unterraum. $E \subseteq V$ erzeugt $\left\{\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \,\middle\|\, v_i \in E, \alpha_i \in K\right\}$
Algebra $(A,+,\cdot,\star)$	Unteralgebra. $E \subseteq A$ erzeugt $\left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bigstar_{j=1}^{m_i} a_{ij} \,\middle\|\, \alpha_i \in K, a_{ij} \in E\right\}$	Algebra-Ideal: Unterraum in $(A,+,\cdot)$, Ideal in $(A,+,\star)$ E erzeugt $\{\sum \alpha_i a_i \mid a_i \in E \cup A \star E \cup E \star A \ldots\}$

Verknüpfung von Idealen

Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring und J_1, J_2 zwei Ideale. Welche der folgenden Mengen sind (wann) Ideale?

(1) $J_1 \cup J_2$ $\Leftarrow$ g.d.w. $J_1 \subseteq J_2 \vee J_2 \subseteq J_1$ wegen der UG Struktur

(2) $J_1 \cap J_2$ $\Leftarrow$ klar

(3) $J_1 + J_2$ $\Leftarrow$ Ja

(4) $J_1 \cdot J_2$ $\Leftarrow$ Nicht i.A. z.B. $\mathbb{Z}[t]$: $J_1 = (2,t)$, $J_2 = (3,t)$

$t \in (J_1 \cdot J_2)$ aber $t \notin J_1 \cdot J_2$

(5) $J_1 \setminus J_2$ $\Leftarrow$ 0 liegt nicht drin

$\uparrow$ $3t - 2t$; $" = (6,t)$

(6) $J_1 \cdot R = \{ j \cdot r \mid j \in J_1, r \in R \}$ $\Leftarrow$ wenn R unitär, dann ja. sonst unklar

Wiederholung Cayley-Hamilton und Minimalpolynom

Satz 26.1 (Version für Matrizen)

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Dann gilt $\widetilde{\chi_A}(A) = 0 \in K^{n\times n}$.

Lemma 28.1

Es sei K ein Körper. Es sei $A \in K^{n\times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Die Menge

$$J_A := \left\{ p \in K[\lambda] \,\middle|\, \widetilde{p}(A) = 0 \right\}$$

ist ein Ideal in $K[\lambda]$ ungleich dem Nullideal.

Definition 28.2

Es sei K ein Körper. Es sei $A \in K^{n\times n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Das eindeutig bestimmte normierte Polynom μ_A geringsten Grades mit der Eigenschaft $\mu_A \in J_A$ heißt das **Minimalpolynom von A**.

Beispiele für charakteristische und Minimalpolynome

Was sind die charakteristischen und Minimalpolynome der folgenden Matrizen?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\mu^{geo}(A, 2) = 1$

$\chi = (t-1)(t-2)(t-3)$

$\mu = \chi$

μ hat dieselben Nullstellen

$\chi = (t-1)(t-2)^2$

$\mu = (t-1)(t-2)$

Da $\mu | \chi$ und gleiche NS hat und es gibt eine Basis aus EV

$\chi = (t-1)(t-2)^2$

$\mu = \chi$

egsu

und es gibt keine Basis von EV