Plenarübung LA II

(Inhalts)-Wochen 05/06/07

Link zu diesen Folien

Die Umfrageergebnisse

Zusammenfassung für G01Q02

Was soll in der Plenarübung vorrangig behandelt werden?

Antwort	Anzahl	Brutto-Prozentsatz
Wiederholung von Skriptinhalten Ansehen	6	14.63%
Erklärungen zu Skriptbeispielen Ansehen	3	7.32%
Lösungen der Hausaufgaben Ansehen	1	2.44%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	33	80.49%
Gesamt(Brutto)	**43**	**100.00%**

Zusammenfassung für G01Q01

Welche Anmerkungen oder Fragen haben Sie zur Veranstaltung oder ihren Inhalten?

Antwort	Anzahl	Brutto-Prozentsatz
Antwort Ansehen	4	9.76%
Keine Antwort	4	9.76%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	33	80.49%
Gesamt(Brutto)	**41**	**100.00%**

Interesse an:

(1) Visualisierung und Anwendungen für/von der Determinante

(2) Visualisierung und Anwendungen für/von Eigenwerte(n)

(3) Praktischer Bezug der Inhalte

(4) Wiederholung Diagonalisierbarkeit

(5) Intuition zur Spur und invarianten Unterräumen

Das heutige Programm

(1) Wochenzusammenfassungen 5,6,7

(2) Zusammenfassung Nutzung der Determinante (bisher)
(3) Visualisierung der Determinante/Volumina von Parallelotopen
(4) Flowchart Berechnung der Determinante
(5) Bestimmen „nicer“ Matrizen

(6) Exkurs zu Eigenwerten in der Anwendung
(7) Vorgehen, Beispiel und Anwendung der Diagonalisierung
(8) Wiederholtes Anwenden von Endomorphismen
(9) Eigenwerte von Endomorphismustensoren
(10) Ähnlichkeitsinvarianz der Spur

(11) (Re-)Motivation und Wiederholung zu Algebren
(12) Polynome und Auswertung an Matrizen

Wochenüberblick

Die Determinante als Werkzeug

Wofür konnten wir die Determinante bisher nutzen?

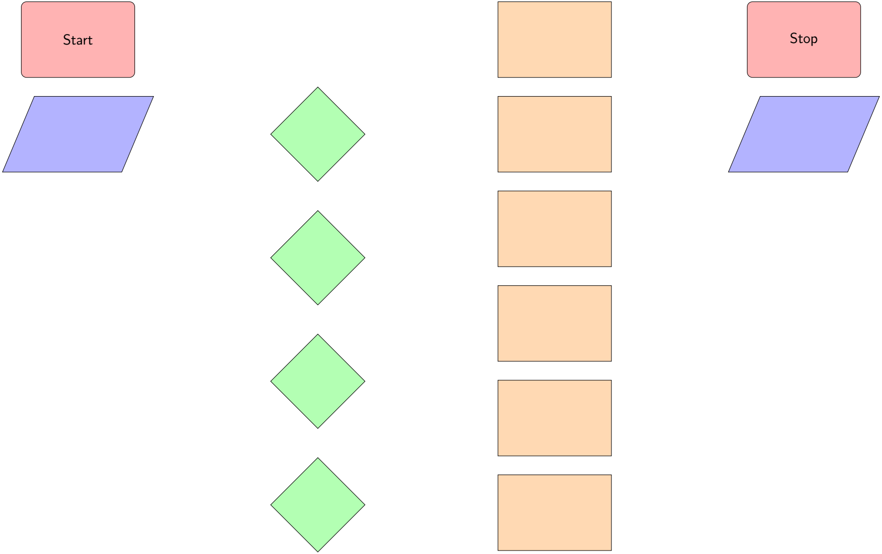
-
-
-
-
-
-

Volumen von Parallelotopen

Bemerkung

Man hört/liest häufig: Die Determinante liefert „den Flächeninhalt eines von Vektoren aufgespannten Parallelograms“.

Flowchart (Programmablaufplan) Determinantenberechnung



Aufgabe: Ganzzahlige Inverse bestimmen

Bestimmen Sie eine vollbesetzte ganzzahlige Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit ganzzahliger Inversen A^{-1}.

Bedeutung von Eigenwerten in der Anwendung (Bspl.)

Beispiel: Quantenmechanik

Beispiel: Harmonischer Oszillator (Klassische Mechanik)

Masse m and Feder mit Konstante k.

Diagonalisierung eines Endomorphismus (Wdh.)

Wie bestimmen wir, ob (bzw. wodurch) ein Endomorphismus $f \in \mathrm{End}(V)$ mit $\dim(V) < \infty$ diagonalisierbar ist?

(1)

(2)

(3)

(4)

(5)

Diagonalisierung eines Endomorphismus (Bspl.)

Aufgabe: Matrixwurzel bestimmen

Gegeben sei

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Finden Sie eine Matrix B mit $B^2 = A$.

Wiederholte Anwendung eines Endomorphismus

Frage: Wie verhält sich eigentlich $f^n(v)$?

Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$ sowie $v \in V$. Wie verhält sich $f^n(v)$ mit wachsendem n?

Eigenwerte von Tensorproduktendomorphismen

Es seien V, W K-Vektorräume und $f \in \mathrm{End}(V)$, $g \in \mathrm{End}(W)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \Phi\colon\ \mathrm{End}(V) \otimes \mathrm{End}(W) &\to \mathrm{End}(V \otimes W) \\ f \otimes g &\mapsto [(v, w) \mapsto f(v) \otimes g(w)] \end{aligned}$$

eine Vektorrauminjektion (und ein -isomorphismus genau dann, wenn V, W endlichdimensional sind).

Was können wir über die Eigenwerte von $\Phi(f \otimes g)$ sagen?

Zur Spur ähnlicher Matrizen

Kommutativität im Spuroperator

Für Matrizen $A \in K^{n\times m}$, $B \in K^{m\times n}$ ist .

Die Matrixspur ist invariant unter Ähnlichkeitstransformationen

Sind $A, B, T \in K^{n\times n}$ mit $A = T^{-1}BT$, dann ist

$$\mathrm{Spur}\,(A) = \qquad = \qquad = \mathrm{Spur}\,(B)$$

Motivation für Algebren

Das Ziel

Wir wollen Vektoren (insbesondere Matrizen) in Polynome der Form

$$a_0 t^0 + a_1 t^1 + \cdots + a_n t^n \in K[t] \qquad (\star)$$

einsetzen.

Ein Polynom der Form $(\star)$ können wir mit

$$a_0 I\, t^0 + a_1 I\, t^1 + \cdots + a_n I\, t^n \in \mathbb{K}^{n \times n}[t]$$

identifizieren. Warum setzen wir hier nicht einfach Matrizen im Sinne des Ringeinsetzungshomomorphismus ein?

Wiederholung Algebra

Definition

Eine **Algebra** $(A, +, \cdot, \star)$ **über** K ist eine Menge A mit inneren und äußeren Verknüpfungen, so dass gilt:

(1) $(A, +, \cdot)$ ist ein K-Vektorraum.

(2) $(A, +, \star)$ ist ein Ring.

(3) Die Verknüpfung $\star$ ist verträglich mit der S-Multiplikation:

$$(\alpha \cdot a) \star b = \alpha \cdot (a \star b) = a \star (\alpha \cdot b)$$

für alle $\alpha \in K$ und $a, b \in A$.

Behauptung:

Man kann jeden Vektorraum $(V, +, \cdot)$ zu einer Algebra ergänzen.

Zusammenspiel von Vektorraum- und Ringeigenschaften

Lemma:

Jede endlichdimensionale, nullteilerfreie und unitäre (assoziative) Algebra $(A, +, \cdot, \star)$ ist eine Divisionsalgebra.

Matrixpolynome, Ähnlichkeit und Eigenwerte

Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und ein $n-\dim$ K-Vektorraum V. Gegeben sei außerdem ein Polynom $p \in K[t]$.

Ähnlichkeit

Wenn A, B, T aus $K^{n\times n}$ mit $B = T^{-1}AT$ sind, in welchem Verhältnis stehen $p(A)$ und $p(B)$?

Eigenwerte

Wenn $f \in \mathrm{End}(V)$ mit Eigenwert $\lambda \in K$ zum Eigenvektor $v \in V$ ist, was können wir über die Eigenwerte von $p(f)$ aussagen?

Einsetzung in verschiedene Darstellungen von Polynomen

Es ist in $\mathbb{R}[t]$:

$$p(t) = (t-1)^2(t-2) = (t-2)(t^2-2t+1) = t^3 - 4t^2 + 5t - 2.$$

Der Matrizenring $(\mathbb{R}^{n \times n}, +, \cdot)$ ist für $n > 1$ nicht kommutativ. Dürfen wir für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Auswertung $p(A)$ mit jeder der obigen Darstellungen bestimmen?