Plenarübung LA II

(Inhalts)-Wochen 05/06/07

Link zu diesen Folien

Die Umfrageergebnisse

Zusammenfassung für G01Q02

Was soll in der Plenarübung vorrangig behandelt werden?

Antwort	Anzahl	Brutto-Prozentsatz
Wiederholung von Skriptinhalten Ansehen	6	14.63%
Erklärungen zu Skriptbeispielen Ansehen	3	7.32%
Lösungen der Hausaufgaben Ansehen	1	2.44%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	33	80.49%
Gesamt(Brutto)	**43**	**100.00%**

Zusammenfassung für G01Q01

Welche Anmerkungen oder Fragen haben Sie zur Veranstaltung oder ihren Inhalten?

Antwort	Anzahl	Brutto-Prozentsatz
Antwort Ansehen	4	9.76%
Keine Antwort	4	9.76%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	33	80.49%
Gesamt(Brutto)	**41**	**100.00%**

Interesse an:

(1) Visualisierung und Anwendungen für/von der Determinante
(2) Visualisierung und Anwendungen für/von Eigenwerte(n)
(3) Praktischer Bezug der Inhalte
(4) Wiederholung Diagonalisierbarkeit
(5) Intuition zur Spur und invarianten Unterräumen

Das heutige Programm

(1) Wochenzusammenfassungen 5,6,7

(2) Zusammenfassung Nutzung der Determinante (bisher)
(3) Visualisierung der Determinante/Volumina von Parallelotopen
(4) Flowchart Berechnung der Determinante
(5) Bestimmen „nicer“ Matrizen

(6) Exkurs zu Eigenwerten in der Anwendung
(7) Vorgehen, Beispiel und Anwendung der Diagonalisierung
(8) Wiederholtes Anwenden von Endomorphismen
(9) Eigenwerte von Endomorphismustensoren
(10) Ähnlichkeitsinvarianz der Spur

(11) (Re-)Motivation und Wiederholung zu Algebren
(12) Polynome und Auswertung an Matrizen

Wochenüberblick

Multilineare Algebra

liefert

Determinantenformen
- n-Linearität $V^n \to K$
- alternierend
- nicht null

liefert

Determinante det

$\Delta(a_1, \ldots, a_n) = \det(A)\,\Delta(b_1, \ldots, b_n)$

verschiedene Mögl. der Berechnung, Eigenschaften für A^{-1} ...

Orientierung eines VR über einem geordneten Körper
- Gleichorientierung

Ermöglicht

Normalformen von Endomorphismen

Frage: Wann sind Endomorphismen diagonalisierbar?

Diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ $\exists$ Basis von Eigenvektoren

- Eigenwerte, -vektoren, -paare, -Räume
- geometrische Vielfachheit

LGS

- charakteristische Polynom
  EW sind die Nullstellen
  (Nullstellensuche kritisch!)
- algebra. Vielfachheit

rationale Fkt. körper

Einschub Algebra

(assoziativ)

Ring

$(V, +, \cdot, *)$

VR

Liefert weiteren

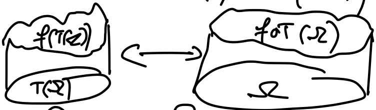
→ Einsetzungshomom.

Die Determinante als Werkzeug

Wofür konnten wir die Determinante bisher nutzen?

- Prüfen linearer Unabhängigkeit ($\{v_1, .., v_n\}$ l.u. $\Leftrightarrow$ $\det(a_1,\dots,a_n)\neq 0$)
- Invertierbarkeit prüfen (A invertierbar $\Leftrightarrow$ $\det(A)\neq 0$)
- Eigenwerteigenschaft prüfen (λ EW $\Leftrightarrow$ $\det(\lambda I - A) = 0$)
- Cramersche Regel (Bestimmen von Komponenten von LGS-Lösungen)
- Vektorräume orientieren (Det. von Transformationsmatrizen)
- Charakteristische Polynome berechnen ($\det(\lambda I - f) =: \chi_f(\lambda)$)

In der Analysis



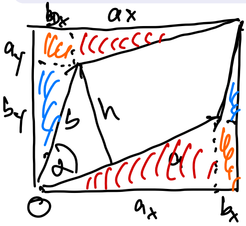
- Transformation zur Integrationsbereichen $\int_{T(\Omega)} f \, d\mu = \int_{\Omega} f \circ T \, |\det(T')| \, d\mu$

Volumen von Parallelotopen

Bemerkung

Man hört/liest häufig: Die Determinante liefert „den Flächeninhalt eines von Vektoren aufgespannten Parallelograms“.

4-Eck mit parallelen Seiten ohne Kreuzungspunkte



$$\mathrm{vol}_2(P) = |a|\cdot|h| = |a|\cdot|b|\cdot\sin(\alpha) = a_x b_y - b_x a_y = \det\overbrace{\begin{pmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{pmatrix}}^{M}$$

$$(a_x+b_x)\cdot(a_y+b_y) - 2\cdot\frac{a_x a_y}{2} - 2\,\frac{b_x b_y}{2} - 2 a_y b_x$$

Bessere Sichtweise: $\Omega : P$ $\quad \mathrm{vol}_\mu(P) = \int_P 1\,d\mu = \mu(P)$ z.B. μ Lebesgue-Maß

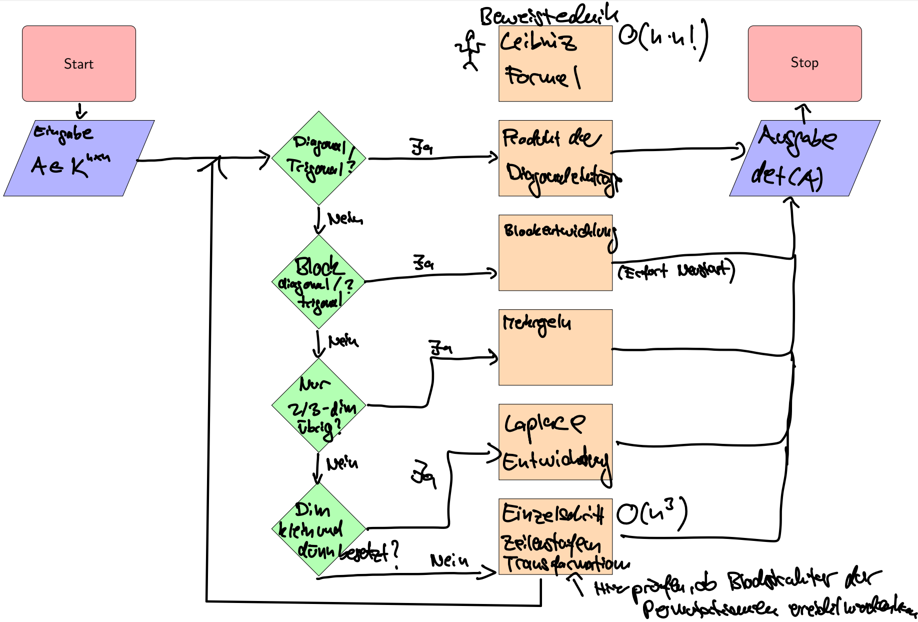
Allgemein:
Parallelotop affine Trafo des Einheitswürfels in $\mathbb{R}^n$
$W := \{(x_1,\dots,x_n) \mid x_i \in [0,1]\ \forall i\}$

also $P = T(W) = y + MW$

$$\Rightarrow \mathrm{vol}_\mu(P) = \int_P 1\,d\mu \overset{\text{Trafosatz}}{=} \int_W \underbrace{1_P(y+T(w))}_{1}\,|\det(A)|\,d\mu$$

$$= |\det(A)|\int_W 1\,d\mu = \mathrm{vol}(W)\cdot|\det(A)|$$

(persönlich) Flowchart (Programmablaufplan) Determinantenberechnung



Aufgabe: Ganzzahlige Inverse bestimmen

Bestimmen Sie eine vollbesetzte ganzzahlige Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit ganzzahliger Inversen A^{-1}. ↑ vollbesetzte "nice Matrix"

Hilfreich beim Erstellen von Übungsaufgaben. z.B. Diagonalisierung $A = T^{-1} D T$ alle ganzzahlig

Wir wissen aus HA: A, A^{-1} ganzzahlig $\Leftrightarrow$ A ganzzahlig und $\det(A) \in \{-1,1\}$. nice Matrix

Determinante ändert sich höchstens im VZ, wenn

- Zeilenstufentrafoschritte, Spalten/Zeilen tauschen, mit ± 1 multiplizieren.

Vorgehen: Starten mit trigonaler Matrix mit $\det \in \{-1,1\}$ und transformieren

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ & 1 & 0 \\ & & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & -2 \\ -3 & 6 & -4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ 2 & -1 & -1 \\ 5 & -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot(-1) \longrightarrow \begin{bmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -2 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$(-1)^3$ ← 3x getauscht; $(-1)^3$ ← $n=3$

$$\mathrm{Det} = 1 \xrightarrow{\cdot 1} 1 \xrightarrow{\cdot(-1)^3} -1 \xrightarrow{\cdot(-1)^3} 1$$

$$\boxed{\mathrm{inv} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 8 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}}$$

Bedeutung von Eigenwerten in der Anwendung (Bspl.)

Beispiel: Quantenmechanik

Observablen entsprechen Operatoren, Messwerte EW

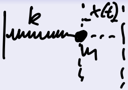
Hamilton Operator ≙ Energie des Systems, Schrödingergl.: $\begin{cases} \frac{d}{dt}\psi(x,t) = k \cdot H(\psi(x,t)) \\ \psi(x,0) = \psi_0(x) \end{cases}$ — EV?

H zeitunabhängig, ψ_0 EV zu E $\rightsquigarrow \psi(x,t) = e^{kEt} \cdot \psi_0(x)$

Lösungsmöglichkeit: Bestimmen von EV/EW zu H, Darstellung von ψ_0, Superpos.

Beispiel: Harmonischer Oszillator (Klassische Mechanik)

Masse m and Feder mit Konstante k.



$$m \cdot \frac{d^2}{dt^2} + k\,x(t) = 0 \quad (\text{oder } f(t))$$

$$x(0) = x_0, \quad \frac{d}{dt}x(0) = v_0$$

umstellen $\rightsquigarrow$

$$\underbrace{\frac{d^2}{dt^2}}_{f}\underbrace{x(t)}_{v} = \underbrace{-\frac{k}{m}}_{\lambda}\underbrace{x(t)}_{v}$$

Eigenwertproblem für die zweite Abl.

Lösung: $v_0 \sin\left(\sqrt{\tfrac{k}{m}}\,t\right) + x_0 \cos\left(\sqrt{\tfrac{k}{m}}\,t\right)$

$\sqrt{\frac{k}{m}}$ ist in der Strukturmechanik wichtig

Diagonalisierung eines Endomorphismus (Wdh.)

Wie bestimmen wir, ob (bzw. wodurch) ein Endomorphismus $f \in \mathrm{End}(V)$ mit $\dim(V) < \infty$ diagonalisierbar ist?

(1) Basis wählen, Darstellungsmatrix bestimmen (A)

(2) Charakteristisches Polynom bestimmen $(\chi_A = \chi_f)$

(3) Nullstellen berechnen (von χ_f), das sind die EW $\left(\sum_{i=1}^{k} \mu^{alg}(f, \lambda_i) < n \Rightarrow \text{nicht diag.}\right)$ Bspl. 24.27(i)

(4) Eigenräume bestimmen $\left(\dim(\mathrm{Eig}(f, \lambda_i)) = \mu^{geo}(f, \lambda_i)\right)$ $\left(\mu^{geo}(f, \lambda_i) < \mu^{alg}(f, \lambda_i) \Rightarrow \text{nicht diag.}\right)$ Bspl. 24.27(ii)

(5) Basen der ER bestimmen, Basisvektoren zu Transformationsmatrix T zusammenfassen

EV als Spalten

$$A = T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{pmatrix} T^{-1}$$

Diagonalisierung eines Endomorphismus (Bspl.)

Aufgabe: Matrixwurzel bestimmen

Gegeben sei

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Finden Sie eine Matrix B mit $B^2 = A$. Einfach, wenn A diagonalisierbar ist mit EW≥0

A diagonalisierbar: $A = T\underset{\text{Diag.}}{D}T^{-1} \Rightarrow B = \underset{\text{Eigenvektoren als Spalten}}{T}\underset{\text{Diagonale gewurzelt}}{D^{\frac12}}T^{-1} \Rightarrow B^2 = T D^{\frac12} \underbrace{T^{-1}T}_{I} D^{\frac12} T^{-1}$: A D

$$\chi_A = \det\begin{pmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 2 \\ -1 & -1 & \lambda-3 \end{pmatrix} = (\lambda-1)\cdot[\lambda(\lambda-3)+2] = (\lambda-1)\cdot\underbrace{[\lambda^2-3\lambda+2]}_{(\lambda-1)(\lambda-2)}$$

$\mu^{alg}(A,1)=2$

$\mu^{alg}(A,2)=1$

$$\mathrm{Ker}(I-A) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \mathrm{Ker}(2I-A) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\Rightarrow B = T\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \sqrt{2} \end{bmatrix}T^{-1}$ mit $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

Gilt: A hat EW $\lambda<0 \Rightarrow$ keine Matrixwurzel? Falsch: Drehung um 180° hat Drehung um 90° als Matrixwurzel!

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wiederholte Anwendung eines Endomorphismus

Frage: Wie verhält sich eigentlich $f^n(v)$?

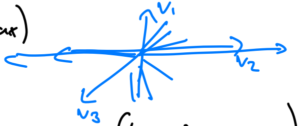
Es sei V ein endlichdimensionaler $\cancel{\mathbb{R}}\,K$-Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$ sowie $v \in V$. Wie verhält sich $f^n(v)$ mit wachsendem n?

f diagonalisierbar $\Rightarrow \exists$ Basis aus EV v_i $\Rightarrow$ $v=\sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ $\Rightarrow$ $f^n(v)=\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^n a_i v_i$ $(*)$

λ_{max} sei der betragsmäßig größte EW, der an $(*)$ beteiligt ist.

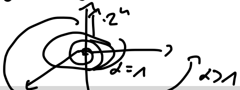
Dann $\frac{f^n(v)}{\lambda_{max}^n} = \sum_{i,|\lambda_i|<|\lambda_{max}|} \underbrace{\frac{\lambda_i^n}{\lambda_{max}^n}}_{|\ \ |<1 \xrightarrow{n\to\infty} 0} a_i v_i + \underbrace{\sum_{i,\lambda_i=\lambda_{max}} a_i v_i}_{\in \mathrm{Eig}(f,\lambda_{max})}$ $\Rightarrow$ Anteil zum betragsgrößten EW überwiegt

Bspl.: $M_B^B(f)=\begin{bmatrix}-2&&\\&1&\\&&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$, $\lambda_{max}=-2$, $f^n(v)=\begin{pmatrix}(-2)^n v_1\\ v_2\\ (\frac{1}{2})^n v_3\end{pmatrix}$



f nicht diagonalisierbar? $M_B^B(f)=\left[\begin{array}{c|c}\lambda_1 \cdots \lambda_k & A\\ \hline 0 & B\end{array}\right]$, $M_B^B(f)(v)=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 x_1\\ \vdots\\ \lambda_k x_k\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}v_{k+1}\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}\\ B\begin{pmatrix}v_{k+1}\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}\end{pmatrix}$

Unklares Verhalten, z.B. $\left[\begin{array}{c|c}2 & \\ \hline & \alpha\cdot D(\varphi)\end{array}\right]$ ← Drehstreckung



Eigenwerte von Tensorproduktendomorphismen

Es seien V, W K-Vektorräume und $f \in \mathrm{End}(V)$, $g \in \mathrm{End}(W)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \Phi\colon\ \mathrm{End}(V) \otimes \mathrm{End}(W) &\to \mathrm{End}(V \otimes W) \\ f \otimes g &\mapsto [(v \otimes w) \mapsto f(v) \otimes g(w)] \end{aligned}$$

eine Vektorrauminjektion (und ein -isomorphismus genau dann, wenn V, W endlichdimensional sind).

Was können wir über die Eigenwerte von $\Phi(f \otimes g)$ sagen?

Sind λ_f, λ_g EW zu v, w für f, g dann ist:

$(\lambda_f \lambda_g)$ EW z $\underset{\in V \otimes W}{v \otimes w}$ für $\Phi(f \otimes g)$

Denn $\Phi(f \otimes g)(v \otimes w) = f(v) \otimes g(w) = (\lambda_f v) \otimes (\lambda_g w) = \lambda_f (v \otimes \lambda_g w)$
$= \lambda_f \lambda_g (v \otimes w)$

Es sind tatsächlich genau alle EW, andere kommen nicht dazu. Geom. Vielfachheit multipliziert sich.

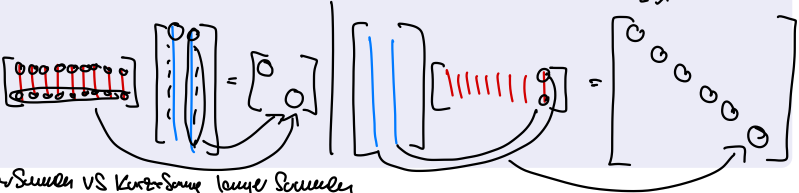
Zur Spur ähnlicher Matrizen

Kommutativität im Spuroperator

Für Matrizen $A \in K^{n\times m}$, $B \in K^{m\times n}$ ist $\mathrm{Spur}(\underbrace{AB}_{\in K^{n\times n}}) = \mathrm{Spur}(\underbrace{BA}_{\in K^{m\times m}})$.

Denn $\mathrm{Spur}(AB) = \sum_{k=1}^{n} (AB)_{kk} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} a_{kl} b_{lk} = \sum_{l=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} b_{lk} a_{kl} = \sum_{l=1}^{m} (BA)_{ll} = \mathrm{Spur}(BA)$

Visuell:



Lange Summe kurzer Summen vs Kurze Summe langer Summen

Die Matrixspur ist invariant unter Ähnlichkeitstransformationen

Sind $A, B, T \in K^{n\times n}$ mit $A = T^{-1}BT$, dann ist

$$\mathrm{Spur}(A) = \mathrm{Spur}(T^{-1}BT) = \mathrm{Spur}(\underbrace{T^{-1}T}_{\mathrm{Id}}B) = \mathrm{Spur}(B)$$

Das Ziel

Wir wollen Vektoren (insbesondere Matrizen) in Polynome der Form

$$\underset{\in K}{a_0} t^0 + a_1 t^1 + \cdots + a_n t^n \in K[t] \qquad (\star)$$

einsetzen.

Ein Polynom der Form ($\star$) können wir mit

$$\begin{pmatrix} a_0 & & \\ & \ddots & \\ & & a_0 \end{pmatrix} \rightarrow a_0 I\, t^0 + a_1 I\, t^1 + \cdots + a_n I\, t^n \in \underbrace{\mathbb{K}^{n \times n}}_{\text{bilden Ring mit } (+,\cdot)}[t]$$

$$\begin{pmatrix} a_n & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$$

identifizieren. Warum setzen wir hier nicht einfach Matrizen im Sinne des Ringeinsetzungshomomorphismus ein?

kennen wir bereits

Kein kommutativer Ring! Polynome haben wir dafür nicht definiert (Koeffizientenprodukte)

Was ist mit dem Unterring der Diagonalmatrizen? Dann dürfen wir nur Diagonalmatrizen einsetzen → Also Algebren nötig

Definition

Eine **Algebra** $(A, +, \cdot, \star)$ **über** K ist eine Menge A mit inneren und äußeren Verknüpfungen, so dass gilt:

≙ Additivität beider Eing.

$a\star(b+c) = a\star b + a\star c$

Distributivges.:

(1) $(A, +, \cdot)$ ist ein K-Vektorraum.

(2) $(A, +, \star)$ ist ein Ring. ← assoziativ, Potenzen auswertbar denn $(A, \star)$ Halbgruppe

(3) Die Verknüpfung $\star$ ist verträglich mit der S-Multiplikation:

$$\star(\alpha a, b) = (\alpha \cdot a) \star b = \underset{\alpha\cdot\star(a,b)}{\alpha \cdot (a \star b)} = a \star (\alpha \cdot b) = \star(a, \alpha b)$$

für alle $\alpha \in K$ und $a, b \in A$.

Homogenität der beiden Eingängen von $\star$ bzgl. VR-Struktur

Äquivalent (3): $\otimes$ ist bilinear.

Behauptung:

Man kann jeden Vektorraum $(V, +, \cdot)$ zu einer Algebra ergänzen.

Korrekt: $\star$ als die Nullfunktion definieren. Witzlose Algebra...

Endliche Divisionsalgebren sind Körper

Lemma: $\overset{A}{\vee}$

Jede endlichdimensionale, nullteilerfreie (assoziative) Algebra ist eine Divisionsalgebra. ← Es gibt $*$-Inverse Elemente, evtl. liegt aber keine Kommutativität vor.

$\Rightarrow$ surjektiv

Beweis: Es gibt 1 bzgl. $\circledast$. Nullteilerfreiheit bed. $a*b \neq 0 \; \forall a,b$

Ringeigensch.

also $\quad a \mapsto a*b$

$\quad b \mapsto a*b$ injektive Endomorphismen auf A.

VR-Eig.

A endlichdimensional $\Rightarrow$ Beide Abb. sind surjektiv (Dimensionssatz)

$\forall a \; \exists b : a*b = 1$ Ringeigenschaft $\square$

Das ist gerade a^{-1}

Schönes Zusammenspiel von Ring und Vektorraumeigenschaften.

Matrixpolynome, Ähnlichkeit und Eigenwerte

Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und ein $n-\dim$ K-Vektorraum V. Gegeben sei außerdem ein Polynom $p \in K[t]$. $p = \sum_{k=0}^{\ell} a_k t^k$

Ähnlichkeit (Satz 25.12)

Wenn A, B, T aus $K^{n\times n}$ mit $B = T^{-1}AT$ sind, in welchem Verhältnis stehen $p(A)$ und $p(B)$? Für alle Potenzen $k \in \mathbb{N}$ ist $B^k = (T^{-1}AT)^k = T^{-1}A^kT$.

Wegen des Distributivgesetzes im Matrixring ist also

$$p(B) = \sum_{k=0}^{\ell} a_k B^k = \sum_{k=0}^{\ell} a_k T^{-1}A^kT = T^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\ell} a_k A^k\right)T = T^{-1}p(A)T$$

Eigenwerte

Wenn $f \in \mathrm{End}(V)$ mit Eigenwert $\lambda \in K$ zum Eigenvektor $v \in V$ ist, was können wir über die Eigenwerte von $p(f)$ aussagen?

Es ist

$$p(f)(v) = \left(\sum_{k=0}^{\ell} a_k f^k\right)(v) = \sum_{k=0}^{\ell} a_k \underbrace{f^k(v)}_{\lambda^k v} = \left(\sum_{k=0}^{\ell} a_k \lambda^k\right) v = p(\lambda) v$$

Also ist v EV zum EW $p(\lambda)$ von $p(f)$.

Kommutativität in $\mathbb{R}$ bzw $\mathbb{R}[t]$

Es ist in $\mathbb{R}[t]$:

$$p(t) = (t-1)^2(t-2) = (t-2)(t^2-2t+1) = t^3 - 4t^2 + 5t - 2.$$

~~A ∈~~ $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist für $n > 1$ nicht kommutativ. Dürfen wir für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Auswertung $p(A)$ mit jeder der obigen Darstellungen bestimmen?

Ja, denn bei der Auswertung tauchen nur Potenzen von A auf und die kommutieren miteinander, da

$$A^k A^\ell = A^{k+\ell} = A^{\ell+k}$$

✓