Plenarübung LA II

(Inhalts)-Wochen 03/04

Link zu diesen Folien

Die Umfrageergebnisse

Zusammenfassung für G01Q02		
Was soll in der Plenarübung vorrangig behandelt werden?		
Antwort	**Anzahl**	**Brutto-Prozentsatz**
Wiederholung von Skriptinhalten Ansehen	5	20.83%
Erklärungen zu Skriptbeispielen Ansehen	0	0.00%
Lösungen der Hausaufgaben Ansehen	0	0.00%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	17	70.83%
Gesamt(Brutto)	**22**	**100.00%**

Zusammenfassung für G01Q01		
Welche Anmerkungen oder Fragen haben Sie zur Veranstaltung oder Ihren Inhalten?		
Antwort	**Anzahl**	**Brutto-Prozentsatz**
Antwort Ansehen	3	12.50%
Keine Antwort	4	16.67%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	17	70.83%
Gesamt(Brutto)	**24**	**100.00%**

Gehäuftes Interesse an:

(1) Wiederholung und Visualisierung von Tensoren

(2) Anwendungsbezug

Das heutige Programm

(1) Kurzübersicht Begriffe der LA in der Quantenmechanik

(2) Wochenüberblick zu den Zusammenhängen der neuen Begriffe

(3) Übersicht Tensorkonzepte

(4) Beweis und Anwendung Isomorphie von Tensorprodukten

(5) Rang, (Schief-)Symmetrie von (r, s)-Tensoren

(6) Darstellung von bilinearen Abbildungen als lineare Abbildungen auf Tensorprodukträumen

(7) Wahr/Falsch Tensorprodukträume

Unsere Begriffe in der Quantenmechanik

(1) In der Quantenmechanik werden Systemen über Detektierwahrscheinlichkeiten ihrer möglichen Zustände (Elemente eines Vektorraums V mit Zusatzstruktur) beschrieben.

(2) Messgrößen (Observablen) werden durch O in $\mathrm{Hom}(V, V)$ dargestellt. Messwerte sind Eigenwerte von O, nach Messung befinden sich Systeme in einem Eigenzustand von O.

(3) Das Verhalten des Systems wird durch die Schrödingergleichung(en) (partielle Differentialgleichung) beschrieben.

(4) Mehrteilchensysteme sind multilinear und werden durch Tensorprodukte der Einteilchensysteme dargestellt.

Wochenüberblick

Multilinearität vs Linearität auf Tensoren

Es seien V_i, W K-Vektorräume, Basen B_i, $i = 1, \ldots, n$

Multilinearität vs Linearität auf Tensoren (Bspl.)

Welche Abbildungen haben Bezug zu $T := v_1 \otimes \ldots \otimes v_n$?

(1)

(2)

(3)

(r, s)-Tensoren

Ein Element

$$T \in \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{r\text{-mal}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{s\text{-mal}}$$

nennen wir (r, s)-Tensor. Neben seiner Rolle als „gewöhnlicher“ Tensor, möchten wir die Möglichkeit des Einsetzens von V^* bzw. V-Elementen nutzen.

Isomorphie von Tensorprodukträumen ($n = 2$)

Bemerkung 22.13

Es seien U und V zwei K-Vektorräume und $(U \otimes V, \otimes)$ sowie $(U \tilde{\otimes} V, \tilde{\otimes})$ Tensorprodukträume im Sinne der universellen Eigenschaft. Dann sind $U \otimes V$ und $U \tilde{\otimes} V$ isomorph und die $\otimes$ und $\tilde{\otimes}$ lassen sich ineinander überführen.

Basen von Tensorprodukträumen ($n = 2$)

Folgerung

Es seien U und V zwei K-Vektorräume und $(U \otimes V, \otimes)$ ein Tensorprodukt. Weiter seien B_U sowie B_V Basen von U bzw. V. Dann ist $\{u \otimes v \,|\, (u, v) \in B_U \times B_V\} = \otimes(B_U, B_V)$ eine Basis von $U \otimes V$.

Rangbestimmung von Tensoren der Stufe-2

Der **Rang** eines Tensors $T \in U \otimes V$ ist die minimale Anzahl von Summanden, mit denen eine Darstellung der Form $T = \sum_{k=1}^{n} u_k \otimes v_k$ mit $n \in \mathbb{N}_0$, $u_k \in U$ und $v_k \in V$ möglich ist.

U und V seien dreidimensionale $\mathbb{R}$-VR mit Basen $(u_1, \ldots, u_3)$ und $(v_1, \ldots, v_3)$. Wie sieht eine entprechende Rangdarstellung von

$$u_1 \otimes (v_1 + v_3) + 2(u_2 \otimes v_2) + 3u_3 \otimes (v_1 + v_3) \quad \text{aus?}$$

Beispiel für (Schief-)symmetrische Tensoren

Es sei $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ (jeweils über $\mathbb{R}$) durch seine Komponenten bzgl. der kanonischen Basis-Tensoren dargestellt. Wie sehen die symmetrischen und schiefsymmetrischen Tensoren aus?

Darstellung von Bilinearformen

Finden Sie eine Darstellung der bilinearen Abbildungen $\mathbb{R}_2[t] \times \mathbb{R}_2[s] \ni (p, q) \mapsto (p(0)q(1), p(1)q(0)) \in \mathbb{R}_2$ im Sinne der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts.

Wahr/Falsch (Tensoren)

(1) $v = 0 \vee w = 0 \Rightarrow v \otimes w = 0$

(2) Es gibt keine Vektoren $v \neq w$ in $V \setminus \{0\}$ mit $v \otimes w = w \otimes v$

(3) $\dim(U \otimes V) = 0 \Leftrightarrow U = \{0\} \vee V = \{0\}$

(4) $\otimes \colon U \times V \to U \otimes V$ ist injektiv

(5) $\otimes \colon U \times V \to U \otimes V$ ist surjektiv

(6) Der Rang von $T \in U \otimes V$ ist durch $\dim(U) \cdot \dim(V)$ beschränkt.