Plenarübung LA II

(Inhalts)-Wochen 03/04

Bitte prüfen

Link zu diesen Folien

Link war zwischenzeitlich falsch.

Die Umfrageergebnisse

6:13 min

Zusammenfassung für G01Q02

Was soll in der Plenarübung vorrangig behandelt werden?

Antwort	Anzahl	Brutto-Prozentsatz
Wiederholung von Skriptinhalten (Ansehen)	5	20.83%
Erklärungen zu Skriptbeispielen (Ansehen)	0	0.00%
Lösungen der Hausaufgaben (Ansehen)	0	0.00%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	17	70.83%
Gesamt(Brutto)	**22**	**100.00%**

Zusammenfassung für G01Q01

Welche Anmerkungen oder Fragen haben Sie zur Veranstaltung oder Ihren Inhalten?

Antwort	Anzahl	Brutto-Prozentsatz
Antwort (Ansehen)	3	12.50%
Keine Antwort	4	16.67%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	17	70.83%
Gesamt(Brutto)	**24**	**100.00%**

Gehäuftes Interesse an:

(1) Wiederholung und Visualisierung von Tensoren, Komponenten

(2) Anwendungsbezug

Das heutige Programm

(1) Kurzübersicht Begriffe der LA in der Quantenmechanik
(2) Wochenüberblick zu den Zusammenhängen der neuen Begriffe
(3) Übersicht Tensorkonzepte
(4) Beweis und Anwendung Isomorphie von Tensorprodukten
(5) Rang, (Schief-)Symmetrie von (r, s)-Tensoren
(6) Darstellung von bilinearen Abbildungen als lineare Abbildungen auf Tensorprodukträumen
(7) Wahr/Falsch Tensorprodukträume

Unsere Begriffe in der Quantenmechanik

(1) In der Quantenmechanik werden Systeme~~n~~ über Detektierwahrscheinlichkeiten ihrer möglichen Zustände (Elemente eines Vektorraums V mit Zusatzstruktur) beschrieben.

Es fehlen: Skalarprodukte, Vollständigkeit, Reflexivität

(2) Messgrößen (Observablen) werden durch O in $\mathrm{Hom}(V, V)$ dargestellt. Messwerte sind Eigenwerte von O, nach Messung befinden sich Systeme in einem Eigenzustand von O.

Erster Einblick schon gehabt. ⇒ Zerlegung in Eigenräume essentiell
folgt noch

(3) Das Verhalten des Systems wird durch die Schrödingergleichung(en) (partielle Differentialgleichung) beschrieben.

$A: V \to V^*$

$Ay = f \in V^*$

Schwache Form / FEM immer im Dualraum formuliert

(4) Mehrteilchensysteme sind multilinear und werden durch Tensorprodukte der Einteilchensysteme dargestellt.

$$(p_1 z_1 + p_2 z_2) \otimes (\tilde{p}_1 \tilde{z}_1 + \tilde{p}_2 \tilde{z}_2) = p_1 \tilde{p}_1 (z_1 + \tilde{z}_1) + \dots + p_2 \tilde{p}_2 (z_2 \otimes \tilde{z}_2)$$

$\in K$ $\in V$

Gem. Wkeiten multipl. sich

Wochenüberblick

1-lin Algebra

Unterräume

⋮

Faktorräume

⋮

Lin Abb.

⋮

Koordinatendarst.

2/n-lin Algebra

Bi-/n-lineare Abbildung

2-/n-Tensoren $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \in V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$

Universelle Eigenschaft $\mathrm{Mult}(V_1, \ldots, V_n; W) \ni g$

$\updownarrow$

$f \circ \otimes$

$\uparrow \in \mathrm{Hom}(\bigotimes_i V_i ; W)$

→ Rang

→ Komponenten

→ Basis einfacher Tensor

→ Symmetrie / Schiefsymmetrie ← Dimensionen

→ Projektionen

Multilinearität vs Linearität auf Tensoren

Es seien V_i, W K-Vektorräume, Basen B_i, $i = 1, \ldots, n$, V, W K-VR

Kreuzproduktraum $\bigtimes_{i=1}^n V_i := V_1 \times \ldots \times V_n$

Tensorproduktraum $\left(\bigotimes_{i=1}^n V_i , \otimes\right)$ Tensorprodukt

Elemente $\bigtimes_{i=1}^n v_i = (v_1, \ldots, v_n)$, $v_i \in V_i$

Kreuzprodukt n-Tupel

$\otimes$ anwenden

$\bigotimes_{i=1}^n v_i := \underbrace{v_1 \otimes \ldots \otimes v_n}_{\text{Tensor}}$ (Nicht alle Tensoren!)

Darstellungen $v_i = \sum_{j_i=1}^{k_i} \alpha_{i j_i} e_{i j_i}$ $i = 1 \ldots n$

Komponenten der v_i

Basisvektoren von v_i in V_i

$\otimes$ anwenden & Multilin. von $\otimes$

$$\bigotimes_{i=1}^n v_i = \otimes\left(\sum_{j_1=1}^{k_1} \alpha_{1 j_1} e_{1 j_1}, \ldots, \sum_{j_n=1}^{k_n} \alpha_{n j_n} e_{n j_n}\right)$$

$$= \sum_{j_1=1}^{k_1} \ldots \sum_{j_n=1}^{k_n} \underbrace{\alpha_{1 j_1} \cdots \alpha_{n j_n}}_{\text{Komponenten des Tensors}} (e_{1 j_1} \otimes \ldots \otimes e_{n j_n})$$

Multilineare Abb $\mathrm{Mult}(V_1, \ldots, V_n; W) \ni g \xleftrightarrow{\text{Isomorph / univers.}} f \in \mathrm{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^n V_i ; W\right)$

$g = f \circ \otimes$

Existenz durch konkrete Konstruktion (basisabhängig) gesichert

Multilinearität vs Linearität auf Tensoren (Bspl.)

$V_1 = \mathbb{R}^2$, $V_2 = \mathbb{R}[t]$, $K = \mathbb{R}$, Basen $\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ und Monombasis

$V_1 \times V_2 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}[t]$

$\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}, p\right)$ z.B. $\left(\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}, 1+3t^2+5t^4\right)$

$V_1 \otimes V_2 = \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}[t]$

z.B. $\{f : \{1,2\} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid$ endlich getragen$\}$

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \otimes p$ z.B. $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \otimes (1+3t^2+5t^4)$

$\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = \underset{\alpha_{11}}{3} e_1 + \underset{\alpha_{12}}{2} e_2$, $1+3t^2+5t^4 = \underset{\alpha_{21}}{1} \cdot 1 + \underset{\alpha_{23}}{3} \cdot t^2 + \underset{\alpha_{25}}{5} \cdot t^4 \Rightarrow \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \otimes (1+3t+5t^4)$

$= (3 \cdot 1)\,(e_1 \otimes 1) + (3 \cdot 3)\,(\overbrace{e_1 \otimes t^2}^{\text{Basistensor}})$

$+ \ldots + (2 \cdot 5)\,(e_2 \otimes t^4)$

$\alpha_{11} \cdot \alpha_{21}$ (Komponente des Tensors)

Graph gesehen

Bspl.

$g : \left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}, p\right) \longmapsto \underbrace{x_2 \cdot p(0)}_{\text{Korrektur}} \in \underset{=:W}{\mathbb{R}}$ $\;\hat{=}\;$ $f : \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \otimes p \longmapsto \underbrace{x_2 \cdot p(0)}_{\text{Korrektur}}$

(1) T ist Bild von $(v_1, \ldots, v_n)$ unter $\otimes$ ⟵ multil. Abbildung.

(2) In den basisabhängigen konstruierten Tensorprodukträumen ist $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n$ eine Abbildung auf $I_1 \times \ldots \times I_n$ ⟵ Indexbereiche von Basen

(3) Wir können $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n$ als Multilineare Abb auf $V_1^* \ldots V_n^*$ interpretieren

$$v_1 \otimes \ldots \otimes v_n (w_1, \ldots, w_n) = \langle w_1, v_1 \rangle \ldots \langle w_n, v_n \rangle$$

Endlich dim, (r,s)-Tensoren $\underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{r\text{-mal}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{s\text{-mal}}$

(r,s)-Tensoren

n-dim K-VR, Basen dual gewählt

Ein Element

$$T \in \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{r\text{-mal}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{s\text{-mal}}$$

nennen wir (r,s)-Tensor. Neben seiner Rolle als „gewöhnlicher“ Tensor, möchten wir die Möglichkeit des Einsetzens von V^* bzw. V-Elementen nutzen.

Isomorph identifizierbar

$$T = \underbrace{\sum_{i_1=1}^{n} \ldots \sum_{i_r=1}^{n} \sum_{j_1=1}^{n} \ldots \sum_{j_s=1}^{n}} T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} \underbrace{e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r}} \otimes \underbrace{\varepsilon^{j_1} \otimes \ldots \otimes \varepsilon^{j_s}}$$

Einsteinsche Summenkonvention → weglassen

r-mal $\in V$, also $\mathrm{id}(\cdot) \in V^{**}$. Hier ist $w \in V^*$ einsetzbar.

s-mal $\in V^*$, hier erst $v \in V$ einsetzbar → Interpretation als Multilineare Abb.

Einsetzen verringert die Stufe

z.B. $T = v_1 \otimes \ldots \otimes v_r \otimes v_1^* \otimes \ldots \otimes v_s^*$ Einsetzen von $w = \sum_{i=1}^{n} w_i \varepsilon^i$ an Stelle $r-1$

$$\rightsquigarrow \underbrace{\langle w, v_{r-1} \rangle}_{\text{GK}} \underbrace{v_1 \otimes \ldots \otimes v_{r-2} \otimes v_r \otimes v_1^* \otimes \ldots \otimes v_s^*}_{\text{Stufe } (r-1)+s} = \sum_{i=1}^{n} w_i \alpha_i \, v_1 \otimes \ldots \otimes v_s^*$$

Isomorphie von Tensorprodukträumen ($n = 2$)

Bemerkung 22.13

Es seien U und V zwei K-Vektorräume und $(U \otimes V, \otimes)$ sowie $(U \tilde{\otimes} V, \tilde{\otimes})$ Tensorprodukträume im Sinne der universellen Eigenschaft. Dann sind $U \otimes V$ und $U \tilde{\otimes} V$ isomorph und die $\otimes$ und $\tilde{\otimes}$ lassen sich ineinander überführen.

Genauer: Es gibt $f \in \mathrm{Iso}(U \otimes V; U \tilde{\otimes} V)$ und $\tilde{\otimes} = f \circ \otimes$. Univers. Eig.

Beweis: $\otimes \in \mathrm{Bil}(U \times V; U \otimes V)$, $\tilde{\otimes} \in \mathrm{Bil}(U \times V; U \tilde{\otimes} V) \Rightarrow \exists!$ Homomorph.

$f \in \mathrm{Hom}(U \otimes V; U \tilde{\otimes} V)$ und $\tilde{f} \in \mathrm{Hom}(U \tilde{\otimes} V; U \otimes V)$ mit

$\tilde{\otimes} = f \circ \otimes$ $\qquad$ $\otimes = \tilde{f} \circ \tilde{\otimes}$ $\Rightarrow \tilde{\otimes} = f \circ \tilde{f} \circ \tilde{\otimes}$, $\otimes = \tilde{f} \circ f \circ \otimes$

Allerdings ist auch

$\tilde{\otimes} = \mathrm{id} \circ \tilde{\otimes}$ $\qquad$ $\otimes = \mathrm{id} \circ \otimes$

$\Rightarrow f \circ \tilde{f} = \mathrm{id}_{\tilde{\otimes}}$, $\tilde{f} \circ f = \mathrm{id}_{\otimes}$ $\Rightarrow f, \tilde{f}$ bijektiv, $\tilde{f} = f^{-1}$ $\square$

Basen von Tensorprodukträumen ($n = 2$)

Folgerung

Es seien U und V zwei K-Vektorräume und $(U \otimes V, \otimes)$ ein Tensorprodukt. Weiter seien B_U sowie B_V Basen von U bzw. V. Dann ist $\{u \otimes v \,|\, (u, v) \in B_U \times B_V\} = \otimes(B_U, B_V)$ eine Basis von $U \otimes V$.

Wir wissen, dass $\tilde{\otimes}(B_U, B_V)$ eine Basis des zu B_U, B_V konstr. Tensorprodukts $(U \tilde{\otimes} V, \tilde{\otimes})$ ist. Dieses TP ist isomorph zu $U \otimes V$ mit

$$u \otimes v = \tilde{f}(u \tilde{\otimes} v) \quad \forall u, v \in U \times V$$

Also ist $B_U \otimes B_V = \underset{\uparrow \atop \in \text{Iso}}{\tilde{f}}(B_U \tilde{\otimes} B_V) \Rightarrow B_U \otimes B_V$ ist Basis von $U \otimes V$ $\square$

Hier ist entscheidend, was „$\otimes$ und $\tilde{\otimes}$ lassen sich ineinander überführen" genau heißt.

Rangbestimmung von Tensoren der Stufe-2 (Stufe ≥ 3 ist aufwändig Forschungsfrage)

Der **Rang** eines Tensors $T \in U \otimes V$ ist die minimale Anzahl von Summanden, mit denen eine Darstellung der Form $T = \sum_{k=1}^{n} u_k \otimes v_k$ mit $n \in \mathbb{N}_0$, $u_k \in U$ und $v_k \in V$ möglich ist.

U und V seien dreidimensionale $\mathbb{R}$-VR mit Basen $(u_1, \ldots, u_3)$ und $(v_1, \ldots, v_3)$. Wie sieht eine entprechende Rangdarstellung von

$$u_1 \otimes (v_1 + v_3) + 2(u_2 \otimes v_2) + 3u_3 \otimes (v_1 + v_3) \quad \text{aus?}$$

Rang des Tensors entspricht Rang der Matrix der Komponenten (doppelt indizierte Familie). Rang findet sich über Zeilenstufenform. Rangzerlegung findet man, indem man sich die Transformationsmatrizen merkt (siehe LA I).

Rang 2

$$\text{Hier: } T \mathrel{\hat{=}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Tensor —— Rangdarstellung

Komp-Matrix —— Rangzerl. —— Dyad.-Produkte

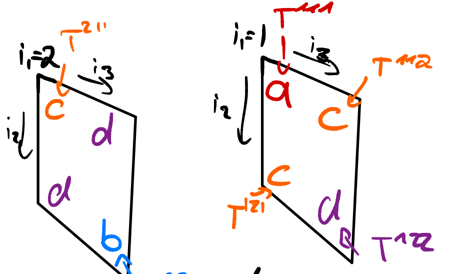
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} (1\ 0\ 1) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (0\ 2\ 0) \Rightarrow T = (u_1 + 3u_3) \otimes (v_1 + v_3) + u_2 \otimes 2v_2$$

Beispiel für (Schief-)symmetrische Tensoren

Es sei $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ (jeweils über $\mathbb{R}$) durch seine Komponenten bzgl. der kanonischen Basis-Tensoren dargestellt. Wie sehen die symmetrischen und schiefsymmetrischen Tensoren aus?

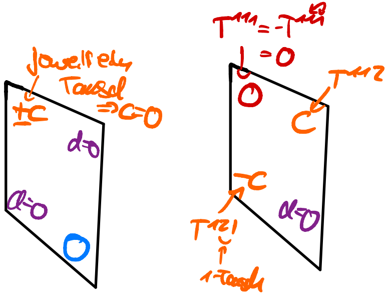
Tensor $T := \sum_{i_1=1}^{2} \sum_{i_2=1}^{2} \sum_{i_3=1}^{2} \underbrace{T^{i_1 i_2 i_3}}_{\in \mathbb{R}} (e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes e_{i_3})$

Symmetrie: $T^{i_1 i_2 i_3} = T^{i_{\sigma(1)} i_{\sigma(2)} i_{\sigma(3)}} \ \forall \sigma \in S_3$



4 Parameter frei

Schiefsymm. $T^{i_1 i_2 i_3} = \mathrm{sgn}(\sigma) T^{i_{\sigma(1)} i_{\sigma(2)} i_{\sigma(3)}}$



$\Rightarrow T=0$ passt, da $\dim = \binom{2}{3} = 0$

Darstellung von Bilinearformen

Finden Sie eine Darstellung der bilinearen Abbildungen $\mathbb{R}_2[t] \times \mathbb{R}_2[s] \ni (p, q) \mapsto (p(0)q(1), p(1)q(0)) \in \mathbb{R}_2$ im Sinne der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts.

$g \in \mathrm{Bil}(\mathbb{R}_2[t], \mathbb{R}_2[t]; \mathbb{R}_2) \longleftrightarrow f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}_2[t] \otimes \mathbb{R}_2[t]; \mathbb{R}_2)$

$f(p \otimes q) := (p(0)q(1), p(1)q(0))$ Die Übersetzungsarbeit steckt in den Tensoren! Man kann natürlich noch eine Darstellungsmatrix zu f bestimmen (bzgl. Basen). Z.B. für Monombasen im Urbild und kanonische Basis im Bild

↑ Einfachheitshalber, zweiter Index läuft zuerst:

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 & \uparrow \; \uparrow \; \uparrow \; \cdots \; \uparrow \\
\text{zu} & 1\otimes 1 \;\; 1 \otimes t \;\; 1 \otimes t^2 \;\; \cdots \;\; t^2 \otimes t^2
\end{array}$$

Wahr/Falsch (Tensoren)

(1) $v = 0 \vee w = 0 \Rightarrow v \otimes w = 0$

Wahr, Bilinearität

(2) Es gibt keine Vektoren $v \neq w$ in $V \setminus \{0\}$ mit $v \otimes w = w \otimes v$

Falsch, Bilinearität $v \otimes \lambda v = \lambda (v \otimes v) = \lambda v \otimes v$, $v \neq 0, \lambda \neq 0$

(3) $\dim(U \otimes V) = 0 \Leftrightarrow U = \{0\} \vee V = \{0\}$

Wahr, $\dim(U \otimes V) = \dim U \cdot \dim V$ ✓

(4) $\otimes : U \times V \to U \otimes V$ ist injektiv

Falsch $\otimes^{-1}(\{0\}) \supseteq 0 \otimes V$

(5) $\otimes : U \times V \to U \otimes V$ ist surjektiv

Falsch, nicht jeder Tensor hat Rang 1

(6) Der Rang von $T \in U \otimes V$ ist durch $\dim(U) \cdot \dim(V)$ beschränkt.

Wahr, Dimension des Raums