Plenarübung LA II

(Inhalts)-Wochen 02/03

Link zu diesen Folien

Die Umfrageergebnisse

Zusammenfassung für G01Q02

Was soll in der Plenarübung vorrangig behandelt werden?

Antwort	Anzahl	Brutto-Prozentsatz
Wiederholung von Skriptinhalten Ansehen	20	23.53%
Erklärungen zu Skriptbeispielen Ansehen	6	7.06%
Lösungen der Hausaufgaben Ansehen	1	1.18%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	61	71.76%
Gesamt(Brutto)	**88**	**100.00%**

Zusammenfassung für G01Q01

Welche Anmerkungen oder Fragen haben Sie zur Veranstaltung oder ihren Inhalten?

Antwort	Anzahl	Brutto-Prozentsatz
Antwort Ansehen	11	12.94%
Keine Antwort	13	15.29%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	61	71.76%
Gesamt(Brutto)	**85**	**100.00%**

Δ markiert Ende
Umgebungen im Skript

Gehäuftes Interesse an:

(1) Annihilatoren und Faktorräume in Dualräumen

(2) Wiederholung:

  (1) (Bi-)dualität

  (2) Tensoren

(3) Anwendungsbezug

Das heutige Programm

(1) Zusammenhänge der neuen Begriffe einordnen (Wochenüberblick)
(2) Zusammenhang Annihilatoren und Faktorräume wiederholen
(3) Übersicht zu (Bi-)Dualkonzepten
(4) Visualisierung (bi-)dualer Abbildungen
(5) Motivation, Wiederholung und Visualisierung von Tensorkonzepten
(6) Isomorphie von Tensorräumen
(7) Ausblick in die Quantenmechanik

Wochenüberblick Wochen 2/3

1-lineare Algebra
Vektorräume, lin. Abb.

V, V^*, V^{**} Dualräume

f, f^*, f^{**} Duale Abbild.

Darstellungsmatrizen A, A^T, A
bzgl. $B, B^*, B^{**} = iv(B)$
- Ranggleichheit f, f^*
- Bild/Kern zusammenhänge S 21.36
(Alle Kombin. Bild Kern, f/f^*)

$$\text{Bild}(f^*) = \text{Ker}(f)^0$$

- Faktorraumbeziehungen (gleichmäßig)
- $f^{**} \circ iv = iw \circ f$

$\in \mathbb{N}$

n-lineare Algebra
Multilinear

$\underline{n=2}$ Bilineare Abbildungen

$g(\cdot,\cdot) : U \times V \to W$

linear linear

Anderes Verhalten als $\text{HOM}(U \times V, W)$

$\rightsquigarrow$ Tensorprodukträume
- Explizite Konstruktion (Basiswahl)
- Rang von Tensoren

Ermöglicht Interpretation im Sinne der 1-lin Algebra (Universelle Eigenschaft)

$$\text{Bil}(U, V; W) \mathrel{\hat{=}} \text{HOM}(\underline{U \otimes V}; W)$$

via $g = f \circ \underline{\otimes}$ $\quad \underline{\underline{\delta}}$

Annihilatoren und Faktorräume

(endl. dim)

Es sei V ein K-Vektorraum, U ein UR von V und U^* ein UR von V^*.

Was motiviert die Definition des Annihilators?

Nehmen wir Paar Basen B, B^*

$$B^* = (\overbrace{v_1^* \dots v_k^*}^{\text{ev}(U):\, v_i^*(u)\neq 0}\ \overbrace{v_{k+1}^* \dots v_n^*}^{=0 \text{ auf } U,\ \langle\rangle = U^0})$$

$$\langle\rangle =: U^*\ (2) \qquad B = (\underbrace{v_1 \dots v_k}_{\langle\rangle = U}\ \underbrace{v_{k+1} \dots v_n}_{V\text{-kompl. zu } U})$$

$[v_{k+1}] \dots [v_n]$ (1) Basis V/U

Welche Bezüge zu Faktorräumen gibt es?

$V/U \cong U^0$ (1)

$V^*/U^0 \cong U^*$ (2)

Übersicht zu (Bi-)Dualräumen und -funktionen

Es seien V, W K-Vektorräume.

$$
\begin{tikzcd}
V^{**}, B_{V^{**}} \arrow[rr, "f^{**}(v^{**}) = v^{**}(f^{*}(\cdot))"'] \arrow[d, leftrightarrow, "\dim < \infty"'] & & W^{**}, B_{W^{**}} \arrow[d, leftrightarrow, "\dim < \infty"] \\
V^{*}, B_{V^{*}} \arrow[d, leftrightarrow, "\dim < \infty"'] & & W^{*}, B_{W^{*}} \arrow[ll, "f^{*} \text{ u.4 } f^{*}(w^{*}) = w^{*} \circ f"] \arrow[d, leftrightarrow, "\dim < \infty"] \\
V, B_V \arrow[rr, "f"'] \arrow[uu, bend left, "i_V"] & & W, B_W
\end{tikzcd}
$$

f^* transferiert die Anweisung von f auf V so auf W^*, dass die duale Paare gleich bleibt

$\langle v^*, v\rangle = ?$

$\langle w^*, w\rangle = ?$

$\langle w^*, f(v)\rangle = ?$

Hausaufgabe II-2.1

Die (Bi)-Dualabbildungen zu den folgenden Beispielabb. (genannt f):

(1) $\mathbb{Q}^3 \ni x \mapsto \lambda x \in \mathbb{Q}^3$, $\lambda \in \mathbb{Q}$ jeweils über $\mathbb{Q}$

$q_i^*(\lambda q_j) = (\lambda q_i^*) q_j$

(2) $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ni (x_1, x_2, \ldots) \mapsto (x_2, x_3, \ldots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ jeweils über $\mathbb{R}$

(3) $U \ni u \mapsto u \in V$ für einen Unterraum U von V, jeweils über dem gleichen Körper K

$U^* \xleftarrow{f^*} V^*$

$U \xrightarrow{f} V$

V^* vergisst, was es außerhalb von U macht

U sieht sich als Teil von V

(4) $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_4) \ni A \mapsto A \cap \{1, 3\} \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)$, jeweils über $\mathbb{Z}_2$

Wahr/Falsch (Dualität)

Es seien V, W K-Vektorräume, $f\colon V \to W$.

(1) V^* ist genau dann der Nullraum, wenn V ein Nullraum ist.

„⇐“ V NR $\Leftrightarrow \dim(V)=0 \Leftrightarrow \dim(V^*)=0 \Leftrightarrow V=\{0\}$ — Wahr

„⇒“ weil $0 \neq v \in$ Basis, darauf kann man $f \neq 0$ definieren.

(2) $\mathrm{Hom}(V, W) \ni f \mapsto f^* \in \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$ ist ein Vektorraumisomorphismus.

Falsch. Immer injektiv, Surj. nur wenn W endlichdim oder $V=\{0\}$

Korrektur!

(3) $\dim(\mathrm{Kern}(f)) = \dim(\mathrm{Kern}(f^*)) = \dim(\mathrm{Kern}(f^{**}))$

Endlichdimensional wahr, denn $= \dim(\mathrm{Bild}(f)^0) = \dim(V) - \dim(\mathrm{Bild}(f)) = \dim(\mathrm{Kern}(f))$

Unendlichdimensional nicht. Linksshift 1-dim Kern, Rechtsshift 0-dim, siehe HA

(4) Die kanonische Injektion ist die duale Abbildung zur kanonischen Surjektion.

Wenig sinnvoll, Begriffe vermischt

Kan. Inj. $i_V\colon V \to V^{**}$

Kan. Surj. $\pi\colon V \to V/U$

Bilinearität (Nicht Bidualität, Themenwechsel)

Definition 22.1

Es seien U, V, W Vektorräume über dem Körper K. Eine Abbildung $f\colon U \times V \to W$ heißt **bilinear**, wenn für jedes feste $\overline{u} \in U$ und jedes feste $\overline{v} \in V$

$$f(\overline{u}, \cdot)\colon V \ni v \mapsto f(\overline{u}, v) \in W$$

$$f(\cdot, \overline{v})\colon U \ni u \mapsto f(u, \overline{v}) \in W$$

beide linear sind. $\Leftrightarrow \forall u, \bar{u}, v, \bar{v}, \alpha, \beta: f(\alpha u + \bar{u}, \beta v + \bar{v}) = \alpha\beta f(u,v) + \alpha f(u,\bar{v}) + \beta f(\bar{u}, v) + f(\bar{u},\bar{v})$

Frage: Was ist $\dim(\mathrm{Hom}(U \times V; W) \cap \mathrm{Bil}(U, V; W))$?

~~(1) Der Schnitt ist leer.~~ $\Rightarrow$ Teilraum von $W^{U\times V}$ $\quad U\times V \to W$

(2) 0

~~(3) 1~~

~~(4) Hängt von $\dim(U)$ und $\dim(V)$ ab.~~

lin. (Hom)

$f \in \mathrm{HOM}(\ldots) \cap \mathrm{Bil}(\ldots) \Rightarrow \forall u,v \in U\times V \quad f(u,v) = \underbrace{f(u,0)}_{=0} + \underbrace{f(0,v)}_{=0 \leftarrow \mathrm{Bil.}} = 0$

Zusammenfassung der Tensoreinführung

Das Problem

Manchmal muss man Vektoren "kombinieren". Die Objekte, für die man sich interessiert, verhalten in jeder Komponente linear, also bilinear.
Wir haben kein gutes Verständnis von Bilinearität.

Der Wunsch

Wir möchten Bilinearität direkt in den kombinierten Vektorraum einbauen. Auf diesem Raum dürfen wir dann mit lin. Abb. arbeiten.
($U \times V$ bietet sich nicht an)

Was wir genau dafür brauchen

Einen Vektorraum $U \otimes V$, so dass $\mathrm{Bil}(U,V;W) \overset{g \longleftrightarrow f}{\cong} \mathrm{Hom}(U \otimes V; W)$
basierend auf einer (notw. bil.) Abbildung $\otimes : U \times V \to U \otimes V$ s.d. $g = f \circ \otimes$

Universelle Eig.

Existenznachweis durch Konstruktion

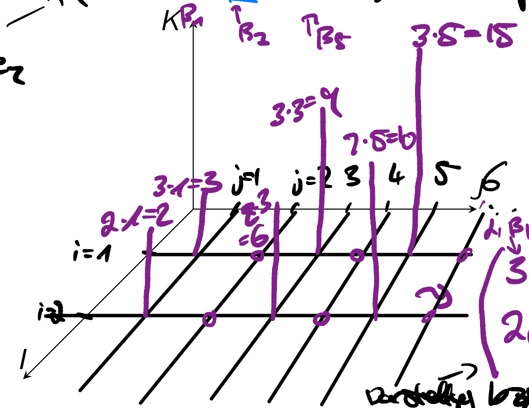
Wir bauen uns basisabhängige Instanzen solcher Objekte als TR von $K^{I \times J} \leftarrow$ Indexbereiche von Basen

$U \otimes V := \{ T \colon I \times J \to K \mid T(i,j) \neq 0$ für endlich viele $(i,j) \in I \times J \}$
mit Basis $B := (u_i \otimes v_j)_{(i,j) \in I \times J}$

Bspl. $U = \mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$, $B_U \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $V = \mathbb{R}[t]$, B_V = Monombasis

Darstellung des Tensor $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \otimes (\underbrace{1}_{\beta_1} + \underbrace{3}_{\beta_2} t^2 + \underbrace{5}_{\beta_5} t^4)$ als Graph

$\underbrace{3}_{\alpha_1} e_1 + \underbrace{2}_{\alpha_2} e_2$



$\alpha \beta^T$

$\shortparallel$

$\begin{array}{cc} \alpha_1\beta_1 & \alpha_1\beta_2 \end{array}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 & 0 & 15 & 0 & \dots \\ 2 & 0 & 6 & 0 & 10 & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

Darstellung bzgl. $(u_i \otimes v_j)$

Das Symbol „$\otimes$“

Wir verwenden das Symbol „$\otimes$“ in 2-3 verschiedenen Bedeutungen, nämlich:

1. Für VR U und V bez. wir den TPR mit $U \otimes V$
2. $\otimes$ ist die universelle bil. Abbildung $U \times V \to U \otimes V$
3. Für u und v ist $u \otimes v$ gerade $\otimes(u,v)$ $\in U \otimes V$

Isomorphie von Tensorprodukträumen

Lemma

Es seien U und V zwei K-Vektorräume mit Basen $B_U, \widehat{B}_U$ und $B_V, \widehat{B}_V$. Dann sind die zu (B_U, B_V) und $(\widehat{B}_U, \widehat{B}_V)$ konstruierten Tensorprodukträume isomorph.

Skizze: Folgt im nächsten Plenarübungstermin

Isomorphie von Tensorprodukträumen 2

Bemerkung 22.13

Es seien U und V zwei K-Vektorräume und $(U \otimes V, \otimes)$ sowie $(U \tilde{\otimes} V, \tilde{\otimes})$ Tensorprodukträume im Sinne der universellen Eigenschaft. Dann sind $U \otimes V$ und $U \tilde{\otimes} V$ isomorph und die $\otimes$ und $\tilde{\otimes}$ lassen sich ineinander überführen.

Folgt im nächsten Plenarübungstermin

Rang von Tensoren

Der **Rang** eines Tensors $T \in U \otimes V$ ist die minimale Anzahl von Summanden, mit denen eine Darstellung der Form $T = \sum_{k=1}^{n} u_k \otimes v_k$ mit $n \in \mathbb{N}_0$, $u_k \in U$ und $v_k \in V$ möglich ist.

U und V seien zweidimensionale K-VR. Welchen Rang hat

$$2u_1 \otimes v_1 + 5u_2 \otimes v_1 + u_1 \otimes v_2 + 2u_2 \otimes v_2 \quad ?$$

Folgt im nächsten Plenarübungstermin

Wahr/Falsch (Tensoren)

(1) $v = 0 \vee w = 0 \Rightarrow v \otimes w = 0$

(2) $\dim(U \otimes V) = 0 \Leftrightarrow U = \{0\} \vee V = \{0\}$

(3) Es gibt keine Vektoren $v \neq w$ in $V \setminus \{0\}$ mit $v \otimes w = w \otimes v$

(4) $\otimes\colon U \times V \to U \otimes V$ ist injektiv

(5) $\otimes\colon U \times V \to U \otimes V$ ist surjektiv

Folgt im nächsten Plenarübungstermin

Darstellung von Bilinearformen

Finden Sie Darstellungen der folgenden bilinearen Abbildungen im Sinne der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts.

(1) $V^* \times V \ni (v^*, v) \mapsto \langle v^*, v \rangle \in K$

(2) $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \ni (x, y) \mapsto x^{\mathsf{T}} M y \in \mathbb{R},\ M \in \mathbb{R}^{m \times n}$

(3) $\mathbb{R}[t] \times \mathbb{R}[s] \ni (p, q) \mapsto (p(0)q(1), p(1)q(0)) \in \mathbb{R}_2$

Folgt im nächsten Plenarübungstermin

Unsere Begriffe in der Quantenmechanik

Folgt im nächsten Plenarübungstermin

(1) In der Quantenmechanik werden Systemen über Detektierwahrscheinlichkeiten ihrer möglichen Zustände (Elemente eines Vektorraums V mit Zusatzstruktur) beschrieben.

(2) Messgrößen (Observablen) werden durch O in $\mathrm{Hom}(V, V)$ dargestellt. Messwerte sind Eigenwerte von O, nach Messung befinden sich Systeme in einem Eigenzustand von O.

(3) Das Verhalten des Systems wird durch die Schrödingergleichung(en) (partielle Differentialgleichung) beschrieben.

(4) Mehrteilsysteme sind multilinear und werden durch Tensorprodukte der Einteilchensysteme dargestellt.