Plenarübung LA II

(Inhalts)-Wochen 02/03

Link zu diesen Folien

Die Umfrageergebnisse

Zusammenfassung für G01Q02		
Was soll in der Plenarübung vorrangig behandelt werden?		
Antwort	**Anzahl**	**Brutto-Prozentsatz**
Wiederholung von Skriptinhalten Ansehen	20	23.53%
Erklärungen zu Skriptbeispielen Ansehen	6	7.06%
Lösungen der Hausaufgaben Ansehen	1	1.18%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	61	71.76%
Gesamt(Brutto)	**88**	**100.00%**

Zusammenfassung für G01Q01		
Welche Anmerkungen oder Fragen haben Sie zur Veranstaltung oder ihren Inhalten?		
Antwort	**Anzahl**	**Brutto-Prozentsatz**
Antwort Ansehen	11	12.94%
Keine Antwort	13	15.29%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	61	71.76%
Gesamt(Brutto)	**85**	**100.00%**

Gehäuftes Interesse an:

(1) Annihilatoren und Faktorräume in Dualräumen

(2) Wiederholung:

  (1) (Bi-)dualität

  (2) Tensoren

(3) Anwendungsbezug

Das heutige Programm

(1) Zusammenhänge der neuen Begriffe einordnen (Wochenüberblick)
(2) Zusammenhang Annihilatoren und Faktorräume wiederholen
(3) Übersicht zu (Bi-)Dualkonzepten
(4) Visualisierung (bi-)dualer Abbildungen
(5) Motivation, Wiederholung und Visualisierung von Tensorkonzepten
(6) Isomorphie von Tensorräumen
(7) Ausblick in die Quantenmechanik

Wochenüberblick

Annihilatoren und Faktorräume

Es sei V ein K-Vektorraum, U ein UR von V und U^* ein UR von V^*.

Was motiviert die Definition des Annihilators?

Welche Bezüge zu Faktorräumen gibt es?

Übersicht zu (Bi-)Dualräumen und -funktionen

Es seien V, W K-Vektorräume.

Hausaufgabe II-2.1

Die (Bi)-Dualabbildungen zu den folgenden Beispielabb. (genannt f):

(1) $\mathbb{Q}^3 \in x \mapsto \lambda x \in \mathbb{Q}^3$, $\lambda \in \mathbb{Q}$ jeweils über $\mathbb{Q}$

(2) $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ni (x_1, x_2, \dots) \mapsto (x_2, x_3, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ jeweils über $\mathbb{R}$

(3) $U \ni u \mapsto u \in V$ für einen Unterraum U von V, jeweils über dem gleichen Körper K

(4) $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_4) \ni A \mapsto A \cap \{1, 3\} \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_6)$, jeweils über $\mathbb{Z}_2$

Wahr/Falsch (Dualität)

Es seien V, W K-Vektorräume, $f\colon V \to W$.

(1) V^* ist genau dann der Nullraum, wenn V ein Nullraum ist.

(2) $\mathrm{Hom}(V, W) \ni f \mapsto f^* \in \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$ ist ein Vektorraumisomorphismus.

(3) $\dim(\mathrm{Kern}(f)) = \dim(\mathrm{Kern}(f^*)) = \dim(\mathrm{Kern}(f^{**}))$

(4) Die kanonische Injektion ist die duale Abbildung zur kanonischen Surjektion.

Bilinearität (Nicht Bidualität, Themenwechsel)

Definition 22.1

Es seien U, V, W Vektorräume über dem Körper K. Eine Abbildung $f\colon U \times V \to W$ heißt **bilinear**, wenn für jedes feste $\overline{u} \in U$ und jedes feste $\overline{v} \in V$

$$f(\overline{u}, \cdot)\colon V \ni v \mapsto f(\overline{u}, v) \in W$$
$$f(\cdot, \overline{v})\colon U \ni u \mapsto f(u, \overline{v}) \in W$$

beide linear sind.

Frage: Was ist $\dim(\mathrm{Hom}(U \times V; W) \cap \mathrm{Bil}(U, V; W))$?

(1) Der Schnitt ist leer.

(2) 0

(3) 1

(4) Hängt von $\dim(U)$ und $\dim(V)$ ab.

Zusammenfassung der Tensoreinführung

Das Problem

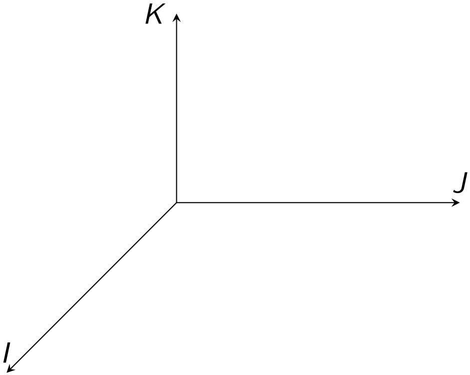
Der Wunsch

Was wir genau dafür brauchen

Existenznachweis durch Konstruktion

Visualisierung von Tensorinstanzen

$U \otimes V := \{ T\colon I \times J \to K \mid T(i,j) \neq 0 \text{ für endlich viele } (i,j) \in I \times J \}$
mit Basis $B := (u_i \otimes v_j)_{(i,j) \in I \times J}$



Das Symbol „$\otimes$“

Wir verwenden das Symbol „$\otimes$“ in verschiedenen Bedeutungen, nämlich:

Isomorphie von Tensorprodukträumen

Lemma

Es seien U und V zwei K-Vektorräume mit Basen $B_U, \widehat{B}_U$ und $B_V, \widehat{B}_V$. Dann sind die zu (B_U, B_V) und $(\widehat{B}_U, \widehat{B}_V)$ konstruierten Tensorprodukträume isomorph.

Skizze:

Isomorphie von Tensorprodukträumen 2

Bemerkung 22.13

Es seien U und V zwei K-Vektorräume und $(U \otimes V, \otimes)$ sowie $(U \tilde{\otimes} V, \tilde{\otimes})$ Tensorprodukträume im Sinne der universellen Eigenschaft. Dann sind $U \otimes V$ und $U \tilde{\otimes} V$ isomorph und die $\otimes$ und $\tilde{\otimes}$ lassen sich ineinander überführen.

Rang von Tensoren

Der **Rang** eines Tensors $T \in U \otimes V$ ist die minimale Anzahl von Summanden, mit denen eine Darstellung der Form $T = \sum_{k=1}^{n} u_k \otimes v_k$ mit $n \in \mathbb{N}_0$, $u_k \in U$ und $v_k \in V$ möglich ist.

U und V seien zweidimensionale K-VR. Welchen Rang hat

$$2u_1 \otimes v_1 + 5u_2 \otimes v_1 + u_1 \otimes v_2 + 2u_2 \otimes v_2 \quad ?$$

Wahr/Falsch (Tensoren)

(1) $v = 0 \vee w = 0 \Rightarrow v \otimes w = 0$

(2) $\dim(U \otimes V) = 0 \Leftrightarrow U = \{0\} \vee V = \{0\}$

(3) Es gibt keine Vektoren $v \neq w$ in $V \setminus \{0\}$ mit $v \otimes w = w \otimes v$

(4) $\otimes \colon U \times V \to U \otimes V$ ist injektiv

(5) $\otimes \colon U \times V \to U \otimes V$ ist surjektiv

Darstellung von Bilinearformen

Finden Sie Darstellungen der folgenden bilinearen Abbildungen im Sinne der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts.

(1) $V^* \times V \ni (v^*, v) \mapsto \langle v^*, v \rangle \in K$

(2) $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \ni (x, y) \mapsto x^\mathsf{T} M y \in \mathbb{R}$, $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$

(3) $\mathbb{R}[t] \times \mathbb{R}[s] \ni (p, q) \mapsto (p(0)q(1), p(1)q(0)) \in \mathbb{R}_2$

Unsere Begriffe in der Quantenmechanik

(1) In der Quantenmechanik werden Systemen über Detektierwahrscheinlichkeiten ihrer möglichen Zustände (Elemente eines Vektorraums V mit Zusatzstruktur) beschrieben.

(2) Messgrößen (Observablen) werden durch O in $\mathrm{Hom}(V, V)$ dargestellt. Messwerte sind Eigenwerte von O, nach Messung befinden sich Systeme in einem Eigenzustand von O.

(3) Das Verhalten des Systems wird durch die Schrödingergleichung(en) (partielle Differentialgleichung) beschrieben.

(4) Mehrteilsysteme sind multilinear und werden durch Tensorprodukte der Einteilchensysteme dargestellt.