Plenarübung LA II

(Inhalts)-Woche 01

Help Desk
Do 14–16h

Keine Plenarübung
zu Woche 3,5,6

Dafür VL

Link zu diesen Folien

Ziele und Komponenten der Plenarübungen

Ziele

(1) Einordnen neuer Inhalte
(2) Nachbearbeitung der Vorlesungen
(3) Ergänzung zu den Übungen
(4) Ansprechen weiterführender Themen

Typische Komponenten

(1) Wochenüberblick zu den Beziehungen der Inhalte
(2) (Grafische) Veranschaulichung von Inhalten
(3) Beweise einfacher Aussagen, Arbeiten mit den Begriffen
(4) (Wahr/Falsch) Aufgaben in Eigenregie

Ihre Mitgestaltungsmöglicheiten

(1) Fragen und Mitarbeit während der Plenarübung.

(2) Umfragen während der Inhaltswochen

Die Plenarübung markiert das Ende unserer Inhaltswochen und liegt nach dem Abgabezeitpunkt der Hausaufgaben. Sie ist also die beste Gelegenheit, verbliebene Unklarheiten aus dem Weg zu schaffen. Um sicher zu stellen, dass Sie den größten Mehrwert aus der relativ frei gestaltbaren Plenarübung ziehen können, haben wir die unten stehenden (sehr kurzen) anonymisierten Abfragen erstellt, in denen Sie uns bitte mitteilen sollen, worauf Sie in den jeweiligen Plenarübungen den Fokus sehen möchten.

- Umfrage Plenarübung Woche II-01

In der Plenarübung wird kein zusätzliches prüfungsrelevantes Material eingeführt. Die Teilnahme und aktive Mitgestaltung über die Umfragen und vor Ort wird jedoch empfohlen.

Diese Woche $\rightarrow$ Sehr konkretes Feedback zur Zielgruppengestaltung der Plenarübung
Im Grunde: Tempo runter, weniger weiterführende Themen

Die Umfrageergebnisse

Zusammenfassung für G01Q02

Was soll in der Plenarübung vorrangig behandelt werden?		
Antwort	**Anzahl**	**Brutto-Prozentsatz**
Wiederholung von Skriptinhalten Ansehen	10	9.62%
Erklärungen zu Skriptbeispielen Ansehen	5	4.81%
Lösungen der Hausaufgaben Ansehen	7	6.73%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	85	81.73%
Gesamt(Brutto)	**107**	**100.00%**

Zusammenfassung für G01Q01

Welche weiteren Fragen haben Sie zum Stoff der Veranstaltung?		
Antwort	**Anzahl**	**Brutto-Prozentsatz**
Antwort Ansehen	5	4.81%
Keine Antwort	14	13.46%
Nicht beendet oder nicht gezeigt	85	81.73%
Gesamt(Brutto)	**104**	**100.00%**

Gehäuftes Interesse an:

(1) Wiederholung von Kapitel 20 (v.a. Basiswechsel)

(2) Wiederholung und Vertiefung zu dualen Größen (v.a. Basen)

(3) Identifikation $(K^n)^*$ mit K^n (Lemma 21.15)

(4) Verständnisvertiefung Annihilatoren (Bspl. 21.22)

Ziele und Vorgehen für heute

Hauptziele

(1) Zusammenhänge der neuen Begriffe einordnen

(2) Anknüpfung an Kapitel 20 herstellen

(3) Duale Größen und Darstellung dualer Basen wiederholen

Arbeitsplan

(1) LA-I Rückblick und Wochenüberblick

(2) Wiederholung Isomorphie, Koordinatendarstellung, Basiswechsel, Rangnormalform/Eigenwerte

(3) Wiederholung dualer Konzepte
   - (1) Überblick dualer Größen
   - (2) Duale Basis
   - (3) Basisabhängigkeit von Dualraumisomorphismen
   - (4) Darstellung dualer Basen
   - (5) Beispiel und ÜA Erklärungen zu (Prä-)Annihilatoren

Basics
Mengen
Abbildungen

Ermöglichen →

(Halb-)Gruppen
Homomorphismen
Faktorgruppen

Zusätzliche innere Verkn. →

Ringe
Körper

Vektorräume

folgt noch

Basen, Unterräume, Faktorräume, Homomorphismen/Isomorphismen, Koordinaten

Isomorph ⇔ endlichdim.

Raum V über K — Anwenden ← — Dualraum

Vektoren — $V^* = \mathrm{Hom}(V, K)$

Basis B — Einsetzen → — Covektoren

Basiswechsel — Duale Paarung ↔ — Duale Menge B^*

(i.A. nicht immer erzeugend)

Duale Basiswechsel

Prä-Annihilatoren of — Annihilatoren E^0

Isomorphie von Vektorräumen

Isomorphe/Äquivalente Vektorräume

Isomorphie von Vektorräumen ($\cong$) definiert eine Äquivalenzrelation auf der Klasse der Vektorräume.

Refl. $V \cong V$ (id)

Symm. $V \overset{f}{\cong} W \Leftrightarrow W \overset{f^{-1}}{\cong} V$

Trans. $V \overset{f}{\cong} W \overset{g}{\cong} Z \Rightarrow V \overset{g \circ f}{\cong} Z$

Wir müssen und können isomorphe VR bei Strukturuntersuch. nicht unterscheiden.

!

Ein besonders nützlicher Isomorphismus

Satz 18.3 (Unser vlt. stärkstes Isomorphie-Resultat)

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(V, +, \cdot)$, $(W, +, \cdot)$ zwei Vektorräume über K. Dann sind äquivalent:

(1) V und W sind isomorphe Vektorräume.

(2) Es gibt eine Basis $(v_i)_{i \in I}$ von V und eine Basis $(w_j)_{j \in J}$ von W, die gleichmächtig sind.

Insbesondere: Endlichdimensionale VR gleicher Dimension sind isomorph.

$$\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0 \Leftrightarrow V \cong K^n$$

Diesen kennen wir gut und haben einiges an "Darstellungsergebnissen" zur Verfügung.

Sind VR dadurch jetzt "langweilig"?

Nein! Es gibt viele unendliche Kardinalitäten.

Sätze 19.7 und 19.8 sagen uns, dass die folgenden Diagramme kommutieren:

$\sum_{i=1}^{n} y_i w_i$ $\qquad$ $\sum_{i=1}^{m} x_i v_i$

$$\begin{tikzcd}
W & V \arrow[l, "f"'] \arrow[d, "\Phi_{B_V}^{-1}"] \\
K^n \arrow[u, "\Phi_{B_W}"] & K^m \arrow[l, "f_A"]
\end{tikzcd}$$

$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ $\quad$ $\begin{pmatrix} f(v_1) \dots f(v_m) \end{pmatrix}$ $\quad$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[ddd, "\Phi_{B_W}^{-1}"'] & & U \arrow[ll, "f \circ g"'] \arrow[dl, "g"] \\
& V \arrow[ul, "f"] \arrow[d, shift left, "\Phi_{B_V}^{-1}"] & \\
& K^m \arrow[u, shift left, "\Phi_{B_V}"] \arrow[dl, "f_A"] & \\
K^n & & K^k \arrow[ll, "f_{AB}"] \arrow[ul, "f_B"'] \arrow[uuu, "\Phi_{B_U}"']
\end{tikzcd}$$

Bleibt bei Verkettung erhalten

Was nützt uns das?

Statt in V und W können wir in K^m / K^n arbeiten (z.B. um Abbildungen zu untersuchen)

Basiswechsel

Was muss ich tun, wenn ich andere Basen nutzen möchte?

$$
\begin{tikzcd}
W & V \arrow[l, "f"'] \arrow[d, "\Phi_{B_V}^{-1}"] \\
K^n \arrow[u, "\Phi_{B_W}"] & K^m \arrow[l, "f_A"]
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
V & V \arrow[l, "\mathrm{id}"'] \arrow[d, "\Phi_{B}^{-1}"] \\
K^m \arrow[u, "\Phi_{\widehat{B}}"] & K^m \arrow[l, "T_{\widehat{B}}^{B}(\cdot)"]
\end{tikzcd}
$$

$$T_{\hat{B}}^{B} = \left(\Big| \hat{B} \Big| \right)^{-1} \left(\Big| B \Big| \right) \to T_{\hat{B}}^{B} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \vdots \\ \hat{x}_n \end{pmatrix}$$ Koordinatentraf

$$M_{\hat{B}}^{\hat{B}}(f) = T_{\hat{B}}^{B} \underline{M_{B}^{B}(f)}\, T_{B}^{\hat{B}} \quad \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \\ \hat{x} \end{pmatrix}$$ Abbildungstransformation

Normalformen und Eigenwerte

Folgerung 20.11 (Rangnormalform, Äquivalenztransformationen)

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper, $n, m \in \mathbb{N}_0$ und $A \in K^{n \times m}$ mit $\operatorname{Rang}(A) = r$. Dann existieren reguläre Matrizen $S \in K^{n \times n}$ und $T \in K^{m \times m}$, sodass gilt:

$$S\,A\,T^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \in K^{n \times m}.$$

Resultat zur Darstellung von Homomorph $f: V \to W$.

Wir Basen so geschickt wählen, dass die Darstellungsmatrix einfachste Struktur.

Normalformen und Eigenwerte

Satz 20.17

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum über K mit $\dim(V) = n \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus und $N \in \mathbb{N}_0$. Dann sind äquivalent:

Darstellung nicht ganz so einfach

(1) Es existieren f-invariante Unterräume $U_1, \dots, U_N$ der Dimensionen $\dim(U_j) = n_j \in \mathbb{N}_0$, sodass $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_L$.

(2) Es existiert eine Basis B_V von V, sodass die Darstellungsmatrix von f die Blockdiagonalgestalt

Blockgestalt

$$\mathcal{M}_{B_V}^{B_V}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & \cdots & n_L \end{array} \\ \begin{bmatrix} \boxed{A_{11}} & & & \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{N_L N_L} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_L \end{array}$$

besitzt, wobei für die Blöcke $A_{jj} \in K^{n_j \times n_j}$, $j = 1, \dots, N$ gilt.

Definition 21.1

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K. Der Vektorraum

$$V^* := \mathrm{Hom}(V, K) = \{f\colon V \to K \mid f \text{ ist linear}\}$$

der linearen Abbildungen $V \to K$ heißt der **Dualraum** von V.

Duale Basis(elemente)

Ist V ein VR mit Basis $B := (v_i)_{i\in I}$, dann ist die Menge der dualen Menge $B^* := (v_i^*)_{i\in I}$ mit

$$v_i^*(v_j) := \delta_{ij}$$

linear unabhängig in V^*.

B^* ist genau dann erzeugend (und damit Basis), wenn I endlich ist.

Endl. dim.: Siehe Skript

Unendlich dim.: C.a. analog, konstante 1-Fkt in V^* ist durch die B^* nicht erzeugbar

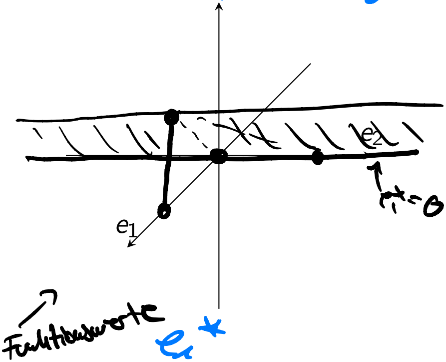
Dualraumisomorphie ist nicht kanonisch

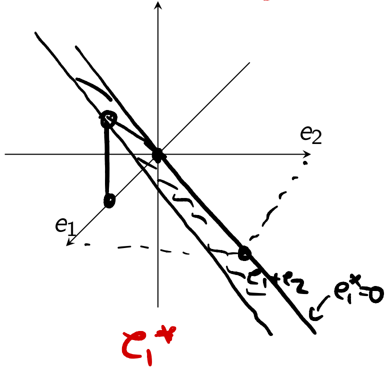
$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

Es seien $B := (e_1, e_2)$ und $\widehat{B} := (e_1, e_1 + e_2)$ zwei Basen von $\mathbb{R}^2$.
Die dualen Basen sind

$$B^* = \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto y \right), \widehat{B}^* = \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x - y, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto y \right)$$

e_1^* e_2^* e_1^* e_2^*

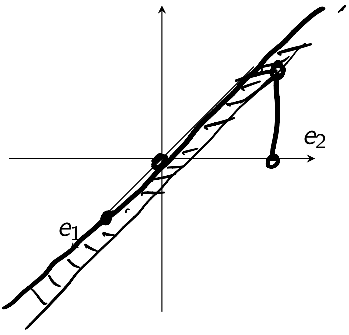




Dualraumisomorphie ist nicht kanonisch

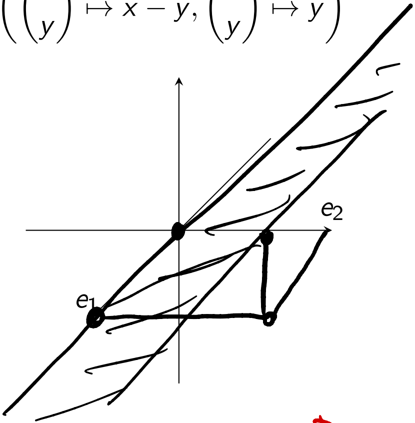
Es seien $B := (e_1, e_2)$ und $\widehat{B} := (e_1, e_1 + e_2)$ zwei Basen von $\mathbb{R}^2$.
Die dualen Basen sind

$$B^* = \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto y \right), \widehat{B}^* = \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x - y, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto y \right)$$



$e_1^* = 0$

e_2^*



Keine Änderung

e_2^*

Dualraumisomorphie ist nicht kanonisch (2)

Es seien $B := (e_1, e_2)$ und $\widehat{B} := (e_1, e_1 + e_2)$ zwei Basen von $\mathbb{R}^2$.
Die dualen Basen sind

$$B^* = \left(\overset{\binom{1}{0}}{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} \mapsto x, \overset{\binom{0}{1}}{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} \mapsto y \right), \widehat{B}^* = \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \overset{\binom{1}{-1}}{x - y}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \overset{\binom{0}{1}}{y} \right)$$

$e_1^* - e_2^*$

bzgl. e_1^*, e_2^* Dargestellt

Wie bestimmt man diese Größen?

$$T^{B}_{\widehat{B}} = \widehat{B}^{-1} B$$

$$T^{\widehat{B}^*}_{B^*} = \left(T^{\widehat{B}}_{B}\right)^{-T} = \left(B^{-1}\widehat{B}\right)^{-T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ZSF und transpon.

Darstellung dualer Basen

Wie stellt man eigentlich duale Basen dar?

Wir betrachten $K_n[t]$ mit der Monombasis $(1, t, \dots, t^n)$ (Beispiel 21.16). Die duale Basis $B^* = (v_0^*, \dots, v_n^*)$ hat die Darstellung

$$\text{t losgeworden} \qquad v_i^* = \frac{1}{i!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t^i}(0).$$

$$\frac{d}{dt^i} 1 = \dots = \frac{d}{dt^i} t^{i-1} = 0, \quad \frac{d}{dt^i} t^i = i!, \quad \frac{d}{dt^i} t^{i+1} = (i+1)!\,t, \dots \overset{10}{=} 0$$

t übrig

Wir betrachten $(\mathcal{P}(\{x_1, \dots, x_4\}), \triangle, \cdot)$ mit der Basis $B = (\{x_1\}, \dots, \{x_4\})$. Die duale Basis B^* hat die Darstellung

$$B^* = \{ \underset{\mathcal{P}(\{x_1, .., x_4\})}{M} \longmapsto \#(M \cap \{x_i\}) \mid i = 1, .., 4 \}$$

Braucht es immer solch eine geschlossene Form?

Identifikation $(K^n)^* \cong K^n$

In K^n mit der Standardbasis $B = (e_1, \dots, e_n)$ stimmen Vektoren v mit ihren Koordinatenvektoren x überein.

Eine Linearform v^* in $(K^n)^*$ können wir durch ihren Koeffizientenvektor $\xi \in K^n$ bzgl. der dualen Basis darstellen. Die Zuordnung $v^* \mapsto \xi$ ist ein Isomorphismus, daher können wir auch direkt $(K^n)^*$ mit K^n identifizieren.

Die duale Paarung ist dann $\xi^\mathsf{T} x$.

Genau wie auf Folie 9, nur dass $V = K^n$, $W = K^{n*}$

$$v^* = \sum_{i=1}^{n} \xi_i v_i^*$$

Darstellungsmatrix $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$

$\rightsquigarrow$ Darstellungsmatrix $(\xi_1, \dots, \xi_n) \;\hat{=}\; \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}^\mathsf{T}$

Prä-(Annihilatoren)

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K.

(1) Für $M \subseteq V$ heißt

$$\begin{aligned} M^0 &:= \{v^* \in V^* \mid \langle v^*, v\rangle = 0 \text{ für alle } v \in M\} \\ &= \{v^* \in V^* \mid M \subseteq \operatorname{Kern}(v^*)\} \subseteq V^* \end{aligned}$$

der **Annihilator** von M.

(2) Für $F \subseteq V^*$ heißt

$$\begin{aligned} {}^0F &:= \{v \in V \mid \langle v^*, v\rangle = 0 \text{ für alle } v^* \in F\} \\ &= \bigcap_{v^* \in F} \operatorname{Kern}(v^*) \subseteq V \end{aligned}$$

der **Prä-Annihilator** von F.

Diese Objekte entstehen natürlich, wenn man duale Basen anschaut

$$V^* \qquad \underbrace{v_1^* \dots v_k^*}_{\langle\ \rangle =: U^*} \;\Big|\; \underbrace{v_{k+1}^* \dots v_n^*}_{\langle\ \rangle = U^0}$$

Erweiterung auf Mengen und unendlichdim.

$$V \qquad \underbrace{v_1 \dots v_k}_{\langle\ \rangle =: U} \;\Big|\; \underbrace{v_{k+1} \dots v_n}_{\langle\ \rangle = {}^0(U^*)}$$

Beispiel 21.22

Es sei $V := \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $U := \mathbb{R}^{2\times 2}_{\text{sym}} \subseteq V$ der Unterraum der symmetrischen Matrizen $B_V = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \,\middle|\, \underline{a_{12} - a_{21} = 0} \right\}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \Phi_{B_V}(M) = 0$$

$$= {}^0\Big\{ \underbrace{\Big\langle \Phi_{B^*}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Big\rangle}_{U^0} \Big\}$$

Ist schon Prä-Annihilator definiert

Unterräume sind Prä-Annihilatoren

Beispiel 21.22

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und U ein Unterraum von V. Dann gilt

$$U = \underbrace{{}^0(\underbrace{U^0}_{\subseteq V^*})}_{\subseteq V}.$$

Siehe Skript

Gilt das auch andersrum?

Also $U^* = ({}^0U^*)^0$

Duale Unterräume sind (nicht immer) Annihilatoren

Lemma

Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K und U^* ein Unterraum von V^*. Dann gilt

$$U^* = ({}^0U^*)^0$$

genau dann, wenn V (und V^*) endlichdimensional ist.

V endlichdim : siehe Folie 18

V unendlich : V mit B_V, dann $(B_V)^*$ l.u. aber nicht erzeugend da

$\underbrace{\langle B_V^* \rangle}_{U^* :=} \neq V^*$ (1-Fkt)

$\Rightarrow {}^0(U^*) = \{0\} \leq V$

$\Rightarrow ({}^0U^*)^0 = (\{0\})^0 = V^* \neq U^*$

Weitere Beispiele für (Prä-)Annihilatoren

Hausaufgabe II-1.4

(a) Bestimmen Sie eine Basis von $\{(0,1,2)\}^0$ in $\mathbb{R}_3^*$ über $\mathbb{R}$.

(b) Bestimmen Sie eine Basis von ${}^0\{p \mapsto p(1) - p(0)\}$ in $(\mathbb{R}_1[t])^*$ über $\mathbb{R}$.

Siehe Musterlösung