Übung II - 13

Ausgabedatum: 8. Juli 2024

Hausaufgabe II-13.1 (Affinität von Isometrien) 4 + 1 = 5 Punkte

Es seien V, W zwei endlichdimensionale K-Vektorräume für $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ mit Innenprodukten γ_V, γ_W und $f\colon V \to W$ eine (möglicherweise nichtlineare) Isometrie, also eine Abbildung, für die $\|f(u)-f(v)\|_{\gamma_W} = \|u-v\|_{\gamma_V}$ für alle $u, v \in V$ gilt. Zeigen Sie:

(a) Ist $K = \mathbb{R}$, dann ist $f = f(0) + g$ für eine (γ_V, γ_W)-orthogonale Abbildung $g \in \operatorname{Hom}(V, W)$.

(b) Ist $K = \mathbb{C}$, dann gibt es nicht für jedes f eine Darstellung wie in Aufgabenteil (a).

Hinweis: Zeigen Sie in Aufgabenteil (a), dass $f - f(0)$ schon linear sein muss und betrachten Sie die komplexe Konjugation in Aufgabenteil (b).

Hausaufgabe II-13.2 (Selbstadjungiertheit und Normalität über $\mathbb{R}$) 2 + 2 + 2 = 6 Punkte

(a) Untersuchen Sie, ob $x \mapsto \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} x$ in $\operatorname{End}(\mathbb{R}^2)$ bezüglich des Standardinnenprodukts selbstadjungiert, respektive normal, ist.

(b) Es sei (V, γ) ein euklidischer Raum und $U = \langle u \rangle$ für $u \in V \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass die Abbildungen S_U und $\operatorname{proj}_U^\gamma$ aus Hausaufgabe II-12.1 und Hausaufgabe II-11.3 γ-selbstadjungiert sind.

(c) Zeigen Sie Lemma 34.52, also Folgendes:

(i) Es sei (V, γ) ein Euklidischer Raum. Weiter sei $f \in \operatorname{End}(V)$ γ-selbstadjungiert. Ist $U \subseteq V$ ein f-invarianter Unterraum, dann ist auch $U^\perp$ ein f-invarianter Unterraum.

(ii) Es sei $(\mathbb{R}^n, \gamma_M)$ ein Euklidischer Raum, also $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit. Weiter sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n \in \mathbb{N}_0$ eine γ_M-selbstadjungierte Matrix. Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein A-invarianter

Unterraum, dann ist auch $U^\perp$ ein A-invarianter Unterraum.

Hausaufgabe II-13.3 (Selbstadjungiertheit und Normalität über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$) 6 + 1 + 2 = 9 Punkte

(a) Es sei (V, γ) ein euklidischer bzw. ein unitärer Raum (also $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) und $f, g \in \operatorname{End}(V)$ zwei γ-selbstadjungierte Abbildungen sowie $\alpha \in K$. Zeigen oder widerlegen Sie die γ-Selbstadjungiertheit der folgenden Abbildungen i. A.:

(i) $\alpha f + g$

(ii) $f \circ g$

(iii) f^k für $k \in \mathbb{N}_0$

(iv) $f \circ g + g \circ f$

(b) Es sei (V, γ) ein endlichdimensionaler unitärer Raum. Weiter sei $f \in \operatorname{End}(V)$ γ-normal und f habe 3 und 4 als Eigenwerte. Zeigen Sie, dass $v \in V$ existiert mit $\|v\|_\gamma = \sqrt{2}$ und $\|f(v)\|_\gamma = 5$.

(c) Es sei (V, γ) ein endlichdimensionaler unitärer Raum und $f \in \operatorname{End}(V)$ γ-normal mit $f^5 = f^4$. Zeigen Sie, dass f sogar γ-selbstadjungiert ist und dass $f^2 = f$ gilt.

Für dieses Übungsblatt ist keine Abgabe mehr vorgesehen.