Übung II - 13 (Lösung)

Ausgabedatum: 8. Juli 2024

Hausaufgabe II-13.1 (Affinität von Isometrien) 4 + 1 = 5 Punkte

Es seien V, W zwei endlichdimensionale K-Vektorräume für $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ mit Innenprodukten γ_V, γ_W und $f\colon V \longrightarrow W$ eine (möglicherweise nichtlineare) Isometrie, also eine Abbildung, für die $\|f(u)-f(v)\|_{\gamma_W} = \|u-v\|_{\gamma_V}$ für alle $u, v \in V$ gilt. Zeigen Sie:

(a) Ist $K = \mathbb{R}$, dann ist $f = f(0) + g$ für eine (γ_V, γ_W)-orthogonale Abbildung $g \in \operatorname{Hom}(V, W)$.

(b) Ist $K = \mathbb{C}$, dann gibt es nicht für jedes f eine Darstellung wie in Aufgabenteil (a).

Hinweis: Zeigen Sie in Aufgabenteil (a), dass $f - f(0)$ schon linear sein muss und betrachten Sie die komplexe Konjugation in Aufgabenteil (b).

Lösung.

(a) Wir schreiben $f = f - f(0) + f(0)$ und nennen $g \coloneqq f - f(0)$. Dann gilt offensichtlich $g(0) = 0$ und weiterhin $\|g(u) - g(v)\|_{\gamma_W} = \|u - v\|_{\gamma_V}$. Wie im linearen Fall können wir nun zeigen, dass g auch Winkel erhält, denn es ist

$$\begin{aligned}
\gamma_V(u,u) + 2\gamma_V(u,v) + \gamma_V(u,u) &= \gamma_V(u-v, u-v) \\
&= \gamma_W(g(u) - g(v), g(u) - g(v)) \\
&= \gamma_W(g(u), g(u)) + 2\gamma_W(g(u), g(v)) + \gamma_W(g(v), g(v)) \\
&= \gamma_W(g(u) - g(0), g(u) - g(0)) + 2\gamma_W(g(u), g(v)) + \gamma_W(g(v) - g(0), g(v) - g(0)) \\
&= \gamma_V(u-0, u-0) + 2\gamma_V(g(u), g(v)) + \gamma_V(v-0, v-0) \\
&= \gamma_V(u,u) + 2\gamma_V(g(u), g(v)) + \gamma_V(v,v)
\end{aligned}$$

und damit $\gamma_V(u,v) = \gamma_W(g(u), \gamma(v))$ für alle $u, v \in V$.

Wir zeigen nun, dass g linear ist durch Betrachtung der Norm er Differenz der Ausdrucke, die in der Definition auftauchen, denn hier ist

$$\begin{aligned}
\|g(\alpha u+v)-\alpha g(u)-g(v)\|_{\gamma_W}^2 &= \gamma_W\left(g(\alpha u+v)-\alpha g(u)-g(v), g(\alpha u+v)-\alpha g(u)-g(v)\right)\\
&= \gamma_W\left(g(\alpha u+v),\, g(\alpha u+v)\right)+\gamma_W\left(\alpha g(u),\, \alpha g(u)\right)+\gamma_W(g(v),\, g(v))\\
&\quad -2\alpha\gamma_W\left(g(\alpha u+v), g(u)\right)-2\gamma_W\left(g(\alpha u+v), g(v)\right)+2\alpha\gamma_W(g(u), g(v))\\
&= \gamma_V\left(\alpha u+v,\, \alpha u+v\right)+\gamma_V\left(\alpha u,\, \alpha u\right)+\gamma_V(v,\, v)\\
&\quad -2\alpha\gamma_V\left(\alpha u+v, u\right)-2\gamma_V\left(\alpha u+v, v\right)+2\alpha\gamma_V(u,v)\\
&= 2\alpha^2\gamma_V(u,u)+2\gamma_V(\alpha u,v)+2\gamma_V(v,v)\\
&\quad -2\alpha^2\gamma_V(u,u)-2\alpha\gamma_V(u,v)-2\gamma_V(v,v)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

(4 Punkte)

(b) Die Abbildung $\mathbb{C} \ni z \mapsto \bar{z} \in \mathbb{C}$ ist eine Isometrie. Sie ist allerdings nicht linear, denn $\bar{i} = -i \neq i \cdot \bar{1} = i$. Betrachtet man $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$ Vektorraum ergibt sich kein Widerspruch zum ersten Aufgabenteil, denn die komplexe Konjugation ist ja $\mathbb{R}$-linear. (1 Punkt)

Hausaufgabe II-13.2 (Selbstadjungiertheit und Normalität über $\mathbb{R}$) 2 + 2 + 2 = 6 Punkte

(a) Untersuchen Sie, ob $x \mapsto \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} x$ in $\operatorname{End}(\mathbb{R}^2)$ bezüglich des Standardinnenprodukts selbstadjungiert, respektive normal, ist.

(b) Es sei (V, γ) ein euklidischer Raum und $U = \langle u \rangle$ für $u \in V \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass die Abbildungen S_U und $\operatorname{proj}_U^\gamma$ aus Hausaufgabe II-12.1 und Hausaufgabe II-11.3 γ-selbstadjungiert sind.

(c) Zeigen Sie Lemma 34.52, also Folgendes:

(i) Es sei (V, γ) ein Euklidischer Raum. Weiter sei $f \in \operatorname{End}(V)$ γ-selbstadjungiert. Ist $U \subseteq V$ ein f-invarianter Unterraum, dann ist auch $U^\perp$ ein f-invarianter Unterraum.

(ii) Es sei $(\mathbb{R}^n, \gamma_M)$ ein Euklidischer Raum, also $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit. Weiter sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \in \mathbb{N}_0$ eine γ_M-selbstadjungierte Matrix. Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein A-invarianter Unterraum, dann ist auch $U^\perp$ ein A-invarianter Unterraum.

Lösung.

(a) Bezüglich des Standardbasis liegt die Darstellungsmatrix der Abbildung bereits vor, es ist nämlich gerade $A := \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Das Standardinnenprodukt hat bezüglich der Standardbasis gerade die Einheitsmatrix als Darstellungsmatrix, wir müssen also prüfen, ob $I^\intercal A^\intercal I = A^\intercal = A$ ist. Die Matrix ist aber nicht symmetrisch, die Abbildung ist also nicht selbstadjungiert bezüglich des Standardinnenprodukts. (1 Punkt)

Die Normalität der Abbildung liegt genau dann vor, wenn

$$AI^{-1}A^\intercal I = I^{-1}A^\intercal IA,$$

in diesem Fall also genau dann, wenn A mit seiner transponierten Matrix kommutiert, was der Fall ist, denn beide Produkte ergeben

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

(1 Punkt)

(b) Für alle $v_1, v_2 \in V$ ist

$$\begin{aligned} \gamma(v_1, \operatorname{proj}_U^\gamma(v_2)) &= \gamma\left(v_1, \frac{\gamma(v_2, u)}{\gamma(u, u)} u\right) \\ &= \frac{\gamma(v_2, u)}{\gamma(u, u)} \gamma\left(v_1, u\right) \\ &= \frac{1}{\gamma(u, u)} \gamma\left(v_1, u\right) \gamma(v_2, u) \\ &= \gamma\left(v_2, \frac{\gamma(v_1, u)}{\gamma(u, u)} u\right) \\ &= \gamma(v_2, \operatorname{proj}_U^\gamma(v_1)) \\ &= \gamma(\operatorname{proj}_U^\gamma(v_1), v_2) \end{aligned}$$

und die Projektion daher γ-selbstadjungiert.

Die Abbildung $S_U := \operatorname{id} - \operatorname{proj}_U^\gamma$ ist als Linearkombination von γ-selbstadjungierten Abbildungen ebenfalls wieder selbstadjungiert, siehe auch **??** (2 Punkte)

(c) **??**: Wir müssen nachweisen: $f(U) \subseteq U$ impliziert $f(U^\perp) \subseteq U^\perp$. In der Tat gilt für $u \in U$ und $w \in U^\perp$ auch

$$\begin{aligned} \gamma(f(w), u) &= \gamma(w, f(u)) && \text{wegen der } \gamma\text{-Selbstadjungiertheit von } f \\ &= 0 && \text{wegen } f(u) \in U \text{ und } w \in U^\perp. \end{aligned}$$

??: Wir müssen nachweisen: $A\,U \subseteq U$ impliziert $A\,U^\perp \subseteq U^\perp$. In der Tat gilt für $x \in U$ und $y \in U^\perp$ auch

$$\begin{aligned} (A\,y)^\intercal M\,x &= y^\intercal M\,A\,x && \text{wegen der } \gamma_M\text{-Selbstadjungiertheit von } A\text{, siehe (34.30)} \\ &= 0 && \text{wegen } A\,x \in U \text{ und } y \in U^\perp. \end{aligned}$$

Hier hätte man natürlich auch mit Darstellungsmatrizen argumentieren können. (2 Punkte)

Hausaufgabe II-13.3 (Selbstadjungiertheit und Normalität über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$) 6 + 1 + 2 = 9 Punkte

(a) Es sei (V, γ) ein euklidischer bzw. ein unitärer Raum (also $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) und $f, g \in \operatorname{End}(V)$ zwei γ-selbstadjungierte Abbildungen sowie $\alpha \in K$. Zeigen oder widerlegen Sie die γ-Selbstadjungiertheit der folgenden Abbildungen i. A.:

(i) $\alpha f + g$ (ii) $f \circ g$
(iii) f^k für $k \in \mathbb{N}_0$ (iv) $f \circ g + g \circ f$

(b) Es sei (V, γ) ein endlichdimensionaler unitärer Raum. Weiter sei $f \in \operatorname{End}(V)$ γ-normal und f habe 3 und 4 als Eigenwerte. Zeigen Sie, dass $v \in V$ existiert mit $\|v\|_\gamma = \sqrt{2}$ und $\|f(v)\|_\gamma = 5$.

(c) Es sei (V, γ) ein endlichdimensionaler unitärer Raum und $f \in \operatorname{End}(V)$ γ-normal mit $f^5 = f^4$. Zeigen Sie, dass f sogar γ-selbstadjungiert ist und dass $f^2 = f$ gilt.

Lösung.

(a) Zuerst einmal sortieren wir die Darstellungen der γ-adjungierten der gelisteten Abbildungen. Dabei gilt (auf Grund der Resultate, die wir bereits für die dualen Abbildungen gezeigt haben), dass

$$\begin{aligned} (\alpha f + g)^\circ &= \alpha f^\circ + g^\circ \\ (f \circ g)^\circ &= g^\circ \circ f^\circ \\ (f^k)^\circ &= (f^\circ)^k \\ (f \circ g + g \circ f)^\circ &= g^\circ \circ f^\circ + f^\circ \circ g^\circ. \end{aligned}$$

(2 Punkte)

Entsprechend gilt:

(i) Für γ-selbstadjungierte f und g ist $(\alpha f + g)^\circ = \alpha f^\circ + g^\circ = \alpha f + g$, also auch deren Linearkombination γ-selbstadjungiert. Man sieht also, dass γ-selbstadjungierte Endomorphismen einen linearen Unterraum der Endomorphismen bilden. (1 Punkt) (*ii*) Für γ-selbstadjungierte f und g ist $(f \circ g)^\circ = g^\circ \circ f^\circ = g \circ f$. Dda die Endomorphismen eine nicht-abelsche Gruppe mit der Verkettung bilden liegt hier im Allgemeinen keine γ-Selbstadjungiertheit vor. (1 Punkt)

(*iii*) Wie im vorherigen Punkt erhalten wir für γ-selbstadjungiertes f: $(f^k)^\circ = ((f)^\circ)^k = f^k$ (da f immer mit sich selbst kommutiert) und damit die γ-selbstadjungiertheit von f^k für alle $k \in \mathbb{N}$. (1 Punkt)

(*iv*) Für γ-selbstadjungierte f und g ist $(f \circ g + g \circ f)^\circ = g^\circ \circ f^\circ + f^\circ \circ g^\circ = f^\circ \circ g^\circ + g^\circ \circ f^\circ = f \circ g + g \circ f$, hier liegt also im Allgemeinen auch γ-Selbstadjungiertheit vor. (1 Punkt)

(b) Über $\mathbb{C}$ sind die Eigenvektoren von γ normalen $f \in \operatorname{End}(V)$ γ-orthogonal, zwei normierte Eigenvektoren v und w zu 3 respektive 4 sind also orthogonal und es gilt

$$\|v + w\|_\gamma^2 = \gamma(v + w, v + w) = \gamma(v, v) + \gamma(w, w) = 2.$$

Außerdem gilt

$$\|f(v+w)\|_\gamma^2 = \|f(v)+f(w)\|_\gamma^2 = \|3v+4w\|_\gamma^2 = \gamma(3v+4w, 3v+4w) = 9\gamma(v,v)+16\gamma(w,w) = 25.$$

(1 Punkt)

(c) Nach dem Spektralsatz wissen wir, dass eine γ-Orthonormalbasis aus Eigenvektoren $v_1, \dots, v_n$ zu den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ existiert. Es gilt nach Voraussetzung, dass

$$\lambda_i^5 v_i = f^5(v_i) = f^4(v_i) = \lambda_i^4 v_i$$

und damit $\lambda_i \in \{0, 1\}$ für alle $i = 1, \dots, n$, also insbesondere, dass die Eigenwerte alle reell sind. Wir erhalten also direkt $f^2 = f$. Außerdem ist für beliebige $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
\gamma\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, f\left(\sum_{j=1}^n \beta_j v_j\right)\right) &= \gamma\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^n \lambda_j \beta_j v_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \gamma(\alpha_i v_i, \lambda_i \beta_i v_i) \\
&= \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{\beta}_i \lambda_i \gamma(v_i, v_i) \\
&= \sum_{i=1}^n \gamma(\alpha_i \lambda_i v_i, \beta_i v_i) \\
&= \gamma\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i v_i, \sum_{i=1}^n \beta_i v_i\right)
\end{aligned}$$

$$= \gamma\left(f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right), \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j\right).$$

(2 Punkte)

Für dieses Übungsblatt ist keine Abgabe mehr vorgesehen.