R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung II - 12

Ausgabedatum: 1. Juli 2024
Abgabedatum: 8. Juli 2024

Hausaufgabe II-12.1 (Orthogonalität und Isometrie) 3 + 2 + 6 = 11 Punkte

(a) Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ungleich dem Nullraum und für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $f_\alpha \colon V \ni v \mapsto \alpha v \in V$. Zeigen Sie:

(i) Für $\alpha \in \{\pm 1\}$ und jedes beliebige Innenprodukt γ auf V ist f_α ein γ-orthogonaler Endomorphismus auf (V, γ).

(ii) Für $\alpha \notin \{\pm 1\}$ gibt es kein Innenprodukt γ auf V, so dass f_α ein γ-orthogonaler Endomorphismus auf (V, γ) ist.

(iii) Für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und jedes beliebige Innenprodukt γ_1 auf V existiert ein Innenprodukt γ_2, so dass f_α (γ_1, γ_2)-orthogonal als Homomorphismus von (V, γ_1) nach (V, γ_2) ist.

(b) Es seien (V, γ_1) und (W, γ_2) zwei Euklidische Räume. Zeigen Sie Lemma 34.22, also die folgenden Aussagen:

(i) Ist $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ eine (γ_1, γ_2)-orthogonale Abbildung, dann ist f injektiv.

(ii) Ist $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ eine (γ_1, γ_2)-orthogonale Abbildung und gilt zusätzlich $\dim(V) = \dim(W) = n \in \mathbb{N}_0$, dann ist f bijektiv und f^{-1} ebenfalls eine bijektive orthogonale Abbildung.

(c) Es sei (V, γ) ein Euklidischer Raum und $U = \langle u \rangle$ für $u \in V \setminus \{0\}$. Die Abbildung

$$S_U \colon V \to V, \quad S_U(v) \coloneqq v - 2 \operatorname{proj}_U^\gamma(v)$$

heißt die **Spiegelung an $U^\perp$**.

(i) Zeigen Sie, dass S_U ein γ-orthogonaler, selbstinverserser Endomorphismus ist.

(ii) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von S_U.

(iii) Zeigen Sie, dass es für jedes Paar $v, w \in V$ mit $\|v\| = \|w\|$ und $v \neq w$ genau einen eindimensionalen Unterraum U gibt, so dass $S_U(v) = w$ ist.

Hausaufgabe II-12.2 (Orthogonale Gruppe) 2 + 3 = 5 Punkte

Es sei (V, γ) ein endlichdimensionaler Euklidischer Raum. Zeigen Sie Lemma 34.30 zur orthogonalen und speziellen orthogonalen Gruppe, also die folgenden Aussagen:

(i) Die Menge
$$\mathrm{O}(V, \gamma) := \{f \in \mathrm{End}(V) \mid f \text{ ist } \gamma\text{-orthogonal}\} \tag{34.13}$$
bildet mit der Komposition eine Gruppe.

(ii) Ist V endlich-dimensional, dann ist die Menge
$$\mathrm{SO}(V, \gamma) := \{f \in \mathrm{O}(V, \gamma) \mid \det(f) = 1\} \tag{34.14}$$
ein Normalteiler in $\mathrm{O}(V, \gamma)$.

Hausaufgabe II-12.3 (Riesz-Isomorphismus und Adjungierte) 3 + 3 + 2 = 8 Punkte

(a) Es sei $\mathbb{R}_2[t]$ mit dem Innenprodukt $\gamma\colon \mathbb{R}_2[t]^2 \ni (p, q) \mapsto \sum_{i=0}^{2} p(i)q(i) \in \mathbb{R}$ gegeben. Bestimmen Sie $(\Gamma_{\mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_2[t]^*})^{-1}(p \mapsto p''(0)) \in \mathbb{R}_2[t]$.

(b) Für $m, n \in \mathbb{N}$ sei auf $\mathbb{R}^{m \times n}$ das Innenprodukt $\gamma_{m,n}(A, B) := \mathrm{Spur}(A^\intercal B)$ definiert.

Nun seien $m, n, r, s \in \mathbb{N}$ und $C \in \mathbb{R}^{r \times m}$, $D \in \mathbb{R}^{n \times s}$. Bestimmen Sie die $(\gamma_{m,n}, \gamma_{r,s})$-adjungierte Abbildung von $\mathbb{R}^{m \times n} \ni X \mapsto C\,X\,D \in \mathbb{R}^{r \times s}$.

Hinweis: Für Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gilt $\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)$.

(c) Es sei (V, γ) ein Euklidischer Raum sowie $f, g \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen Sie, dass

(i) $(\alpha f)^\circ = \alpha(f^\circ)$

(ii) $(f \circ g)^\circ = g^\circ \circ f^\circ$

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf Mampf ein.