R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung II - 12 (Lösung)

Ausgabedatum: 1. Juli 2024
Abgabedatum: 8. Juli 2024

Hausaufgabe II-12.1 (Orthogonalität und Isometrie) 3 + 2 + 6 = 11 Punkte

(a) Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ungleich dem Nullraum und für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $f_\alpha \colon V \ni v \mapsto \alpha v \in V$. Zeigen Sie:

(i) Für $\alpha \in \{\pm 1\}$ und jedes beliebige Innenprodukt γ auf V ist f_α ein γ-orthogonaler Endomorphismus auf (V, γ).

(ii) Für $\alpha \notin \{\pm 1\}$ gibt es kein Innenprodukt γ auf V, so dass f_α ein γ-orthogonaler Endomorphismus auf (V, γ) ist.

(iii) Für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und jedes beliebige Innenprodukt γ_1 auf V existiert ein Innenprodukt γ_2, so dass f_α (γ_1, γ_2)-orthogonal als Homomorphismus von (V, γ_1) nach (V, γ_2) ist.

(b) Es seien (V, γ_1) und (W, γ_2) zwei Euklidische Räume. Zeigen Sie Lemma 34.22, also die folgenden Aussagen:

(i) Ist $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ eine (γ_1, γ_2)-orthogonale Abbildung, dann ist f injektiv.

(ii) Ist $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ eine (γ_1, γ_2)-orthogonale Abbildung und gilt zusätzlich $\dim(V) = \dim(W) = n \in \mathbb{N}_0$, dann ist f bijektiv und f^{-1} ebenfalls eine bijektive orthogonale Abbildung.

(c) Es sei (V, γ) ein Euklidischer Raum und $U = \langle u \rangle$ für $u \in V \setminus \{0\}$. Die Abbildung

$$S_U \colon V \to V, \quad S_U(v) \coloneqq v - 2 \operatorname{proj}_U^\gamma(v)$$

heißt die **Spiegelung an $U^\perp$**.

(i) Zeigen Sie, dass S_U ein γ-orthogonaler, selbstinverserser Endomorphismus ist.

(ii) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von S_U.

(iii) Zeigen Sie, dass es für jedes Paar $v, w \in V$ mit $\|v\| = \|w\|$ und $v \neq w$ genau einen eindimensionalen Unterraum U gibt, so dass $S_U(v) = w$ ist.

Lösung.

(a) (i) Für $\alpha \in \{\pm 1\}$ ist $\alpha^2 = 1$ und damit für beliebige Innenprodukte γ und Vektoren $u, v \in V$ entsprechend

$$\gamma(f_\alpha(u), f_\alpha(v)) = \gamma(\alpha u, \alpha v) = \alpha^2 \gamma(u, v) = \gamma(u, v),$$

was die Orthogonalität zeigt. (1 Punkt)

(ii) Für $\alpha \notin \{\pm 1\}$ ist jedes $v \in V \setminus 0$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, was einen Widerspruch zu Lemma 34.29 liefert. (1 Punkt)

(iii) Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und γ_1 ein Innenprodukt auf V. Wir definieren $\gamma_2 := \frac{1}{\alpha^2}\gamma_1$. Dann ist

$$\gamma_2(f_\alpha(v), f_\alpha(v)) = \frac{1}{\alpha^2}\gamma_1(\alpha v, \alpha v) = \gamma_1(v, v).$$

(1 Punkt)

(b) (i) Es sei $v \in \operatorname{Kern}(f)$, also $f(v) = 0$. Das heißt $\|f(v)\|_{\gamma_2} = 0$, und wegen Aussage (ii) in Satz 34.21 ist auch $\|v\|_{\gamma_1} = 0$, also $v = 0$. Nach Lemma 17.6 ist f also injektiv. (1.5 Punkte)

(ii) Die Aussage folgt aufgrund der Endlichdimensionalität sofort aus Folgerung 18.9. (0.5 Punkte)

(c) (i) Die Linearität folgt direkt aus der Definition und ist in Hausaufgabe II-11.3 bereits besprochen worden. Zudem ist

$$\begin{aligned}
\gamma(S_U(v), S_U(v)) &= \gamma(v - 2\operatorname{proj}_U^\gamma(v), v - 2\operatorname{proj}_U^\gamma(v)) \\
&= \gamma(v - \operatorname{proj}_U^\gamma(v) - \operatorname{proj}_U^\gamma(v), v - \operatorname{proj}_U^\gamma(v) - \operatorname{proj}_U^\gamma(v)) \\
&= \gamma(v - \operatorname{proj}_U^\gamma(v), v - \operatorname{proj}_U^\gamma(v)) + \gamma(-\operatorname{proj}_U^\gamma(v), -\operatorname{proj}_U^\gamma(v)) \\
&= \gamma(v - \operatorname{proj}_U^\gamma(v), v - \operatorname{proj}_U^\gamma(v)) + (-1)^2\gamma(\operatorname{proj}_U^\gamma(v), \operatorname{proj}_U^\gamma(v)) \\
&= \gamma(v, v),
\end{aligned}$$

und S_U damit γ-orthogonal. (1.5 Punkte)

Dass S_U selbstinvers ist, sieht man anhand von

$$\begin{aligned}
S_U(S_U(v)) &= S_U(v) - 2\operatorname{proj}_U^\gamma(S_U(v)) \\
&= v - 2\operatorname{proj}_U^\gamma(v) - 2\operatorname{proj}_U^\gamma(v - 2\operatorname{proj}_U^\gamma(v)) \\
&= v - 2\operatorname{proj}_U^\gamma(v) - 2\operatorname{proj}_U^\gamma(v) + 4\underbrace{\operatorname{proj}_U^\gamma(\operatorname{proj}_U^\gamma(v))}_{\operatorname{proj}_U^\gamma(v)} \\
&= v.
\end{aligned}$$

(1 Punkt)

(ii) Aufgrund von Lemma 34.29 wissen wir bereits, dass S_U nur Eigenwerte 1 und -1 besitzen kann. Wir erhalten mithilfe von Hausaufgabe II-11.3:

$$\operatorname{Eig}(S_U, 1) = \operatorname{Kern}(\operatorname{id} - S_U) = \operatorname{Kern}(\operatorname{proj}_U^\gamma) = U^\perp.$$

(1 Punkt)

Weiterhin ist mithilfe von Hausaufgabe II-11.3:

$$\operatorname{Eig}(S_U, -1) = \operatorname{Kern}(-\operatorname{id} - S_U) = \operatorname{Kern}(\operatorname{id} - \operatorname{proj}_U^\gamma) = U.$$

(iii) Da S_U selbst invers ist folgt aus

$$S_U(v) = w \quad \text{auch} \quad S_U(w) = v.$$

Für beliebiges U mit $S_U(v) = w$ ist daher

$$S_U(v - w) = S_U(v) - S_U(w) = w - v,$$

also $v - w \in \operatorname{Eig}(S_U, -1) = U$, die einzige Möglichkeit ist daher $U = \langle v - w\rangle$ zu setzen. Dieser Raum hat tatsächlich die geforderte Eigenschaft, denn er ist eindimensional und

$$\begin{aligned}
S_U(v) &= v - 2\frac{\gamma(v, v - w)}{\gamma(v - w, v - w)}(v - w) \\
&= v - 2\frac{\gamma(v, v) - \gamma(v, w)}{\gamma(v, v) - 2\gamma(v, w) + \underbrace{\gamma(w, w)}_{=\gamma(v,v)}}(v - w) \\
&= v - (v - w) = w.
\end{aligned}$$

(2.5 Punkte)

Hausaufgabe II-12.2 (Orthogonale Gruppe) 2 + 3 = 5 Punkte

Es sei (V, γ) ein endlichdimensionaler Euklidischer Raum. Zeigen Sie Lemma 34.30 zur orthogonalen und speziellen orthogonalen Gruppe, also die folgenden Aussagen:

(i) Die Menge

$$\mathrm{O}(V, \gamma) \coloneqq \{f \in \mathrm{End}(V) \mid f \text{ ist } \gamma\text{-orthogonal}\} \tag{34.13}$$

bildet mit der Komposition eine Gruppe.

(ii) Ist V endlich-dimensional, dann ist die Menge

$$\mathrm{SO}(V, \gamma) \coloneqq \{f \in \mathrm{O}(V, \gamma) \mid \det(f) = 1\} \tag{34.14}$$

ein Normalteiler in $\mathrm{O}(V, \gamma)$.

Lösung.

(i) Endomorphismen sind offensichtlich stabil unter Verknüpfung, die Verkettung ist also auf $\mathrm{End}(V)$ eine abgeschlossene Verknüpfung. Lemma 34.23 zeigt, dass auch die γ-Orthogonalität unter Verknüpfung erhalten bleibt. Assoziativität der Verkettung kennen wir bereits aus der Linearen Algebra I, damit liegt eine Halbgruppe vor. Das neutrale Element ist die Identität. Die Existenz der Inversen in $\mathrm{O}(V, \gamma)$ haben wir in Hausaufgabe II-11.1 gezeigt, wobei die Bijektivität ein Folgerung aus Lemma 34.22 aufgrund der Endlichdimensionalität ist. (2 Punkte)

(ii) Die Untergruppeneigenschaft der speziellen orthogonalen Gruppe folgt mit dem Untergruppenkriterium wieder mit Lemma 34.23 (Orthogonalität ist stabil unter Verkettung) und der Eigenschaft $\det(f^{-1}) = \det(f)^{-1}$. (1 Punkt)

Dass es sich hier auch um einen Normalteiler handelt, also dass für alle $f \in \mathrm{O}(V, \gamma)$ gilt, dass

$$f \circ \mathrm{SO}(V, \gamma) = \mathrm{SO}(V, \gamma) \circ f$$

für alle $f \in \mathrm{O}(V, \gamma)$ sieht man aufgrund deren Invertierbarkeit anhand von

$$f \circ g = f \circ g \circ f^{-1} \circ f$$

für beliebige $g \in \mathrm{SO}(V, \gamma)$, da $\det(f \circ g \circ f^{-1}) = \det(f) \det(g) \det(f^{-1})) = \det(g) = 1$.

Alternativ könnte man argumentieren, dass det ein Gruppenhomomorphismus von $\mathrm{O}(V, \gamma)$ nach $(\{-1, 1\}, \cdot)$ als Untergruppe von $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist und die $\mathrm{SO}(V, \gamma)$ gerade deren Kern, also ein Normalteiler ist. (2 Punkte)

Hausaufgabe II-12.3 (Riesz-Isomorphismus und Adjungierte) 3 + 3 + 2 = 8 Punkte

(a) Es sei $\mathbb{R}_2[t]$ mit dem Innenprodukt $\gamma\colon \mathbb{R}_2[t]^2 \ni (p,q) \mapsto \sum_{i=0}^{2} p(i)q(i) \in \mathbb{R}$ gegeben. Bestimmen Sie $(\Gamma_{\mathbb{R}_2[t]\to\mathbb{R}_2[t]^*})^{-1}(p \mapsto p''(0)) \in \mathbb{R}_2[t]$.

(b) Für $m, n \in \mathbb{N}$ sei auf $\mathbb{R}^{m\times n}$ das Innenprodukt $\gamma_{m,n}(A,B) := \operatorname{Spur}(A^\intercal B)$ definiert.

Nun seien $m, n, r, s \in \mathbb{N}$ und $C \in \mathbb{R}^{r\times m}$, $D \in \mathbb{R}^{n\times s}$. Bestimmen Sie die $(\gamma_{m,n}, \gamma_{r,s})$-adjungierte Abbildung von $\mathbb{R}^{m\times n} \ni X \mapsto C\,X\,D \in \mathbb{R}^{r\times s}$.

Hinweis: Für Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gilt $\operatorname{Spur}(AB) = \operatorname{Spur}(BA)$.

(c) Es sei (V,γ) ein Euklidischer Raum sowie $f, g \in \operatorname{End}(V)$. Zeigen Sie, dass

(i) $(\alpha f)^\circ = \alpha(f^\circ)$

(ii) $(f \circ g)^\circ = g^\circ \circ f^\circ$

Lösung.

(a) Die Aufgabe entspricht der Frage, durch welches primale Objekt die Linearform $p \mapsto p''(0)$ bezüglich des gegebenen Innenprodukts γ im Sinne des dazugehörigen Riesz-Isomorphismus repräsentiert wird.

Mit der Monombasis $B := (1, t, t^2)$ erhalten wir die Darstellungsmatrizen

$$\mathcal{M}_{B^*}^{B}(\gamma) = \mathcal{M}_{B^*}^{B}(\Gamma_{\mathbb{R}_2[t]\to\mathbb{R}_2[t]^*}) = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 17 \end{bmatrix}, \qquad \Phi_{B^*}^{-1}(p \mapsto p''(0)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\mathcal{M}_{B^*}^{B}(\gamma)^{-1}\Phi_{B^*}^{-1}(p \mapsto p''(0)) = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 17 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

also im Polynomraum das Element $1 - 6t + 3t^2$. (3 Punkte)

(b) Gemäß des Hinweises gilt für $Y \in \mathbb{R}^{n\times m}$

$$\gamma_{r,s}(Y, CXD) = \operatorname{Spur}(Y^\intercal(CXD))$$

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{Spur}(Y(CXD)^\intercal) \\
&= \operatorname{Spur}(YD^\intercal X^\intercal C^\intercal) \\
&= \operatorname{Spur}(X^\intercal C^\intercal YD^\intercal) \\
&= \operatorname{Spur}((C^\intercal YD^\intercal)^\intercal X) \\
&= \gamma_{m,n}(C^\intercal YD^\intercal, X),
\end{aligned}$$

entsprechend ist $f^\circ(Y) = C^\intercal YD^\intercal$. (3 Punkte)

(c) (i) Folgt sofort aus der Linearität der Riesz-Isomorphismen und der entsprechenden Eigenschaft für duale Abbildungen, siehe auch Hausaufgabe II-2.1. (1 Punkt)

(ii) Es ist

$$\begin{aligned}
(f \circ g)^\circ &= \Gamma_{V\to V^*}^{-1} \circ (f \circ g)^* \circ \Gamma_{V\to V^*} \\
&= \Gamma_{V\to V^*}^{-1} \circ g^* \circ f^* \circ \Gamma_{V\to V^*} \\
&= \Gamma_{V\to V^*}^{-1} \circ g^* \circ \Gamma_{V\to V^*} \circ \Gamma_{V\to V^*}^{-1} \circ f^* \circ \Gamma_{V\to V^*} = g^\circ \circ f^\circ,
\end{aligned}$$

siehe auch Hausaufgabe II-2.2. (1 Punkt)

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf Mampf ein.