R. Herzog, G. Müller
Universität Heidelberg

Übung II - 11

Ausgabedatum: 24. Juni 2024
Abgabedatum: 1. Juli 2024

Hausaufgabe II-11.1 (Zu quadratischen Formen und Räumen) 3 + 1 + 2 + 3 = 9 Punkte

(a) Es seien K ein Körper und V ein Vektorraum über K. Zeigen Sie Lemma 32.2, also dass $\mathrm{QF}(V)$ ein Unterraum des Vektorraumes K^V ist.

(b) Bestimmen Sie die von der Bilinearform aus Hausaufgabe II-10.3 induzierte quadratische Form.

(c) Bestimmen Sie diejenige symmetrische Bilinearform, welche die quadratische Form $\mathbb{R}[t] \ni p \mapsto \widetilde{p}(0)\widetilde{p}(1) \in \mathbb{R}$ induziert.

(d) Es seien K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$ und (V, γ_1) sowie (W, γ_2) quadratische Räume über K. Zeigen Sie Lemma 33.9, also dass wenn $f \colon V \to W$ ein Isomorphismus quadratischer Räume ist, dann ist es auch f^{-1}. Zeigen Sie außerdem, dass für $\dim(V) = \dim(W) = n \in \mathbb{N}$ dann $\mathrm{Rang}(\gamma_1) = \mathrm{Rang}(\gamma_2)$ gilt.

Hausaufgabe II-11.2 (Orthogonalität) 3 + 3 = 6 Punkte

(a) Es sei (V, γ) ein Euklidischer Raum. Zeigen Sie Satz 34.19, also dass Algorithmen 34.17 und 34.18 aus einer linear unabhängigen Familie $(u_1, \ldots, u_k)$ von V eine orthogonale Familie $(v_1, \ldots, v_k)$ von V mit der Eigenschaft $\langle v_1, \ldots, v_j \rangle = \langle u_1, \ldots, u_j \rangle$ für alle $j = 1, \ldots, k$ generieren.

(b) Es sei $M := \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Bestimmen Sie mithilfe des Gram-Schmidt Verfahrens in $(\mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto x^\mathsf{T} M y)$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$.

Hausaufgabe II-11.3 (Verallgemeinerte orthogonale Projektion) 2 + 2 + 2 = 6 Punkte

Sei (V, γ) ein euklidischer Raum. Sei weiterhin U ein Unterraum mit mit Orthogonalbasis $(u_1, \dots, u_m)$ für $m \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{proj}_U^\gamma \colon V \ni v \mapsto \operatorname{proj}_U^\gamma(v) := \sum_{k=1}^{m} \frac{\gamma(v, u_k)}{\gamma(u_k, u_k)} u_k \in U$$

eine (bzgl. Definition 34.15) verallgemeinerte Projektion auf den Unterraum U ist.

(b) Zeigen Sie, dass $V = \operatorname{Bild}(\operatorname{proj}_U^\gamma) \oplus \operatorname{Kern}(\operatorname{proj}_U^\gamma) = U \oplus U^\perp$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass

$$\gamma\left(v - \operatorname{proj}_U^\gamma(v), v - \operatorname{proj}_U^\gamma(v)\right) \le \gamma(v - u, v - u) \quad \text{für alle } u \in U.$$

Was bedeutet im Sinne der induzierten Norm?

Hausaufgabe II-11.4 (Normierte Räume) 1 + 4 = 5 Punkte

(a) Es sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter reeller Vektorraum. Zeigen Sie, dass wenn $\|\cdot\|$ von einem Innenprodukt induziert ist, dann gilt

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

(b) Es sei $\mathbb{R}^n$ für $n \in \mathbb{N}$ der Standardvektorraum über den reellen Zahlen. Entscheiden Sie, für welche Dimensionen n und $p \in [1, \infty)$ die Normen

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \|x\|_\infty := \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$$

von Innenprodukten induziert sind, und skizzieren Sie die deren **Einheitssphären**

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_p = 1\}$$

für $p = \{1, 2, \infty\}$ und $n = 2$.

Bitte reichen Sie Ihre Lösungen als ein PDF auf Mampf ein.